

DELS BABILONIS A GALOIS: UNA HISTÒRIA DE LES EQUACIONS

Ferran Cedó

La història de les equacions és molt llarga i complicada. Així que em limitaré a exposar una història de la resolució algebraica, és a dir, amb sumes, restes, multiplicacions, divisions i extraccions d'arrels, d'equacions polinòmiques.

Els babilonis, uns 2.000 anys abans de Crist, ja sabien resoldre les equacions de segon grau.

“He restat de l'àrea el costat del meu quadrat: 14.30. Agafa 1, el coeficient. Divideix 1 en dues parts: 30. Multiplica 30 i 30: 15. Suma-ho a 14.30, i 14.30.15 té l'arrel 29.30. Suma a 29.30 el 30 que has multiplicat per ell mateix: 30, i aquest és el costat del quadrat.”

Aquest text babiloni ens dóna el mètode per resoldre l'equació

$$x^2 - x = 870.$$

Observem que el sistema numèric babiloni era posicional en base 60, a més no tenien cap símbol per al zero ni la coma decimal. La solució de l'equació que proposen és:

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 870} + \frac{1}{2} = 30.$$

Les equacions quadràtiques que resolien els babilonis eren dels tipus següents:

$$x^2 + ax = b, \quad x^2 - ax = b,$$

amb a i b nombres positius. Aquestes equacions tenen una única solució positiva. Les equacions del tipus $x^2 + b = ax$, que tenen dues solucions positives, no es troben explícitament en els escrits babilonis. En canvi si que es troben resolucions de problemes equivalents a aquesta equació, per exemple, la del problema de trobar la llargada i l'amplada d'un rectangle si coneixem el perímetre i l'àrea.

Però en cap escrit babiloni es troba cap justificació del mètode de resolució de les equacions quadràtiques.

Mohammed ibn-Musa Al-Khowarizmi, escriu el seu llibre “Al-jabr w'al muqabalah” a l'any 830 aproximadament.

En aquest llibre, primer explica el procediment per resoldre els sis tipus d'equacions següents:

$$mx^2 = ax, \quad mx^2 = b, \quad ax = b,$$

$$mx^2 + ax = b, \quad mx^2 + b = ax \quad \text{i} \quad mx^2 = ax + b,$$

amb a , b i m nombres positius, (donant les dues solucions positives de la cinquena).

A continuació, justifica geomètricament la resolució de les tres últimes equacions, completant quadrats.

Al 1079, Omar Khayyam donà una solució geomètrica d'equacions cúbiques. Però no es troba encara cap fórmula algebraica per a la solució d'aquestes equacions. De fet, al 1494, Luca Pacioli escriu a la seva obra “Summa de Arithmetica” que les solucions (algebraiques) de $x^3 + mx = n$ i $x^3 + n = mx$ són tan impossibles de trobar com la quadratura del cercle.

Però, a principis del segle XVI, a Itàlia, en ple Renaixement, dos fets històrics importants havien succeït: el descobriment d'Amèrica (1492) i la invenció de la impremta (1450). Això permetia, al menys teòricament, escampar la cultura a tots per tot el món. I l'home del Renaixement no només admira i aprèn dels clàssics grecs, sinó que és capaç de superar els seus coneixements.

Scipione del Ferro (1465-1526), professor de matemàtiques a la Universitat de Bolònia va trobar la solució de l'equació

$$x^3 + mx = n$$

al voltant del 1515. No ho va fer públic.

Abans de morir, del Ferro confià la solució de la cúbica al seu deixeble Antonio Maria de Fior.

Amb aquesta nova arma, de Fior va desafiar, al 1535, a un conegut científic de Brèscia, Niccolò Fontana, anomenat Tartaglia (1499-1557). El repte consistia a resoldre cadascun 30 problemes proposats per l'altre, de manera que un només podia proposar problemes que sabés resoldre. Per resoldre aquests problemes, es fixava un termini, al final del qual s'havien d'exposar públicament les solucions.

De Fior va proposar a Tartaglia 30 equacions de tercer grau, i Tartaglia a de Fior, 30 problemes variats. Tartaglia, la nit del 13 de febrer de 1535, va trobar la solució de les equacions

$$x^3 + mx = n, \quad x^3 = mx + n \quad \text{i} \quad x^3 + n = mx,$$

cosa que va fer que guanyés brillantment al seu contrincant.

Gerolamo Cardano (1501-1576), un metge milanès amb gran formació matemàtica, en conèixer la victòria de Tartaglia en el desafiament matemàtic contra de Fior, demanà a Tartaglia la solució de les equacions cúbiques per incloure-les en un tractat d'aritmètica. Però Tartaglia es negà. Més tard, al 25 de març de 1539, Tartaglia va donar-li la solució de les tres cúbiques que sabia resoldre en vers, fent jurar a Cardano que no faria públic el mètode.

Cardano va trobar la justificació del mètode de Tartaglia i va resoldre tots els tipus de cúbiques.

El seu deixeble Ludovico Ferrari (1522-1566), va trobar la solució de l'equació de quart grau. Però el mètode de resolució de la quàrtica usa la resolució de la cúbica. Per tant Cardano i Ferrari no podien publicar els seus resultats.

Al 1543, Cardano i Ferrari van anar a Bolònia. Allí van trobar entre els papers de del Ferro la solució de la cúbica. Així, Cardano se sentí lliure del jurament fet a Tartaglia.

Al 1545, Cardano va publicar tots aquests resultats a la seva obra "Ars Magna", donant el degut crèdit a del Ferro i a Tartaglia.

Solució de la cúbica.

Considerem l'equació

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Fent el canvi de variable $y = x + \frac{a}{3}$, es converteix en

$$y^3 + py + q = 0,$$

on

$$p = b - \frac{a^2}{3} \quad \text{i} \quad q = c - \frac{a}{3}b + 2\left(\frac{a}{3}\right)^3.$$

Ara introduïm dues noves variables u i v tals que

$$y = u + v \quad \text{i} \quad uv = -\frac{p}{3}.$$

Així tenim que l'equació es transforma en

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0,$$

i com que

$$(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3(u + v)uv = u^3 + v^3 - p(u + v),$$

tenim que

$$u^3 + v^3 + q = 0.$$

Com que $u^3v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$, resolent una equació de segon grau obtenim:

$$u^3, v^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Així,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Solució de la quàrtica.

Considerem l'equació

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Fent el canvi de variable $y = x + \frac{a}{4}$, es converteix en

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0,$$

on

$$p = b - 6\left(\frac{a}{4}\right)^2, \\ q = c - \frac{a}{2}b + \left(\frac{a}{2}\right)^3, \\ r = d - \frac{a}{4}c + \left(\frac{a}{4}\right)^2b - 3\left(\frac{a}{4}\right)^4.$$

Completant quadrats, tenim

$$\left(y^2 + \frac{p}{2}\right)^2 = -qy - r + \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Ara introduïm una nova variable u :

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + u\right)^2 = -qy - r + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - 2uy^2 + pu + u^2,$$

i imposem que el segon membre sigui un quadrat perfecte:

$$\left(\sqrt{2u}y - \frac{q}{2\sqrt{2u}}\right)^2 = -qy - r + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - 2uy^2 + pu + u^2.$$

D'aquí obtenim:

$$\frac{q^2}{8u} = -r + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + pu + u^2,$$

que és equivalent a

$$8u^3 + 8pu^2 + (2p^2 - 8r)u - q^2 = 0.$$

Resolent aquesta cúbica, obtenim

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + u\right)^2 = \left(\sqrt{2u}y - \frac{q}{2\sqrt{2u}}\right)^2,$$

és a dir,

$$y^2 + \frac{p}{2} + u = \pm \left(\sqrt{2u}y - \frac{q}{2\sqrt{2u}}\right).$$

Observem que implícitament hem suposat que $u \neq 0$. En el cas en què $u = 0$ és solució de la cúbica, tenim $q = 0$. Però llavors l'equació que hem de resoldre és biquadràtica:

$$y^4 + py^2 + r = 0.$$

I les equacions de grau superior a quatre?

Al 1802, va nèixer a Findö (Noruega) un dels matemàtics més brillants de la història, Niels Henrik Abel (1802- 1829). Als 19 anys, Abel va demostrar que no hi pot haver cap fórmula amb arrels, sumes, restes, multiplicacions i divisions de la solució de les equacions de grau superior a quatre. Aquest resultat es va publicar al 1824.

L'últim heroi d'aquesta història és Évariste Galois (1811-1832). Al 1830, va caracteritzar les equacions que es podien resoldre usant arrels, sumes, restes, multiplicacions i divisions. Va presentar el seu treball a l'Acadèmia de Ciències de París dues vegades (el primer cop li van perdre) i va ser rebutjat per incompreensible. Al 1846, Liouville, matemàtic de l'Acadèmia de Ciències de París, va entendre el treball de Galois i el va publicar.

BIBLIOGRAFIA

- Carl B. Boyer, *Historia de la matemática*, Alianza Universidad Textos, Madrid, 1994.
- William Dunham, *Viaje a través de los genios*, Pirámide, Madrid, 1992.
- Morris Kline, *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, (3 volums), Alianza Universidad, Madrid, 1992.
- Antoni Malet, *Obra d'Evariste Galois*, Institut d'Estudis Catalans, Monografies de la Secció de Ciències, 1, Barcelona, 1984.
- Jean-Pierre Tignol, *Galois' Theory of Algebraic Equations*, World Scientific, Singapur, 2001.