Índex

Capítol 6

Valors Multi Zeta

XAVIER XARLES

Introducció

Aquestes notes són, essencialment, les transparències que vaig presentar en una xerrada a Vilanova el dia 2 de Febrer del 2008. En elles explico algunes idees del article del Kentaro Ihara , Masanobu Kaneko i Don Zagier "Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values"[4] publicat l'any 2006, on diuen a l'introducció que *some of the results in this paper (...) originated in work which the third-named author did in the year 1988 - 1994 but never published.*.

6.1 Aperitiu

L'any 1730, Leonhard Euler va demostrar un resultat espectacular, del qual sempre n'estaria ben orgullós.

$$\zeta(2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Amb finançament parcial del MEC, MTM 2006-11391.

Seguidament va demostrar, si denotem com és usual ara,

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

que

$$\zeta(4) = \frac{1}{90}\pi^4$$

i que

$$\zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2,\ \zeta(4) = \frac{1}{90}\pi^4,\ \zeta(6) = \frac{1}{945}\pi^6,\ \zeta(8) = \frac{1}{9450}\pi^8,$$

$$\zeta(10) = \frac{1}{93555}\pi^{10},\ \zeta(12) = \frac{691}{638512875}\pi^{12}, \cdots,$$

fins a

$$\zeta(26) = \frac{1315862}{11094481976030578125}\pi^{26}$$

Finalment, un temps més tard, va demostrar que

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1}B_{2n}2^{2n-1}}{(2n)!}\pi^{2n}$$

i per tant que

$$\zeta(2n) = c_{2n}\zeta(2)^{2n} \quad c_{2n} \in \mathbb{Q}.$$

La seva demostració, ara prou ben entesa, tenia llacunes que es varen haver d'anar omplint amb el temps.

Tot i així, ens podríem preguntar si no hi ha una demostració elemental sense passar per la fórmula amb els nombres de Bernoulli, de la racionalitat de $\zeta(2n)/\zeta(2)^n$.

Començarem per explicar una idea de Zagier de com provar aquesta relació. Aquesta està explicada en un article seu al primer congrés europeu de Matemàtiques [8].

6.1.1 Observació. Considerem

$$f(m,n) = \frac{2}{mn^3} + \frac{1}{m^2n^2} + \frac{2}{m^3n}$$

És un exercici elemental veure que tenim la relació

$$f(m,n) - f(m,n+m) - f(m+n,n) = \frac{2}{m^2n^2}.$$

Així tenim com a conseqüència que

$$2\zeta(2)^2 = \sum_{m>0,n>0} \frac{2}{m^2n^2} =$$

$$= \sum_{m>0,n>0} f(m,n) - \sum_{m>0,n>0} f(m,n+m) - \sum_{m>0,n>0} f(m+n,n) =$$

$$= \sum_{m>0,n>0} f(m,n) - \sum_{n>m>0} f(m,n) - \sum_{m>n>0} f(m,n) =$$

$$= \sum_{n>0} f(n,n) = \sum_{n>0} \left(\frac{2}{n^4} + \frac{1}{n^4} + \frac{2}{n^4} \right) = 5\zeta(4).$$

Seguint la mateixa idea podem demostrar el següent.

6.1.2 Lema. *Si considerem*

$$f(m,n) = \frac{2}{mn^{k-1}} + \frac{1}{m^2n^{k-2}} + \cdots + \frac{1}{m^{k-2}n^2} + \frac{2}{m^{k-1}n}$$

aleshores

$$f(m,n) - f(m,n+m) - f(m+n,n) = 2 \sum_{\substack{0<j<k \\ j_{parell}}} \frac{1}{m^j n^{k-j}}.$$

d'on es dedueix fàcilment que

6.1.3 Corol·lari.

$$(2n+1)\zeta(2n) = \sum_{m>0} f(m,m) = 2 \sum_{\substack{0<j<k \\ j_{parell}}} \zeta(j)\zeta(2n-j)$$

Per tant, per inducció, obtenim que

$$\zeta(2n) \in \zeta(2)^n \mathbb{Q}.$$

6.2 Preguntes, respostes i conjectures

Ja des dels resultats d'Euler, els matemàtics s'han fet varies preguntes sobre quins resultats podrien ser certs sobre els altres valors (en els senars) de la funció zeta. Per exemple, ens podríem preguntar

- Hi ha altres possibles relacions entre els valors de $\zeta(n)$, $n \in \mathbb{N}$?
- Podria ser que $\zeta(kn) \in \zeta(k)^n\mathbb{Q}$?
- Donat que

$$\mathbb{Q}(\{\zeta(2n) \mid n = 1, 2, \dots\}) = \mathbb{Q}(\zeta(2)),$$

  amb grau de trascendencia 1 sobre $\mathbb{Q}$, que podem dir del grau de transcendència de

$$\mathbb{Q}(\{\zeta(n) \mid n = 2, 3, 4, \dots\})?$$

- I el de $\mathbb{Q}(\{\zeta(n) \mid n = 2, 3, \cdots, k\})$?

I que sabem? La veritat, no sabem gairebé res.

Sabem que

6.2.1 Teorema.

- *Apéry 1978 [1]: $\zeta(3)$ és irracional.*
- *Rivoal 2000 [6]: Per a tot $\epsilon > 0$ existeix n_0 tal que per tot $n \geq n_0$*

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} + \zeta(3)\mathbb{Q} + \zeta(5)\mathbb{Q} + \cdots + \zeta(2n+1)\mathbb{Q} \geq \frac{1-\epsilon}{1+\log(2)} \log(n)$$

- *Zudilin 2001 [9]:*

  Un com a mínim dels 4 nombres $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ i $\zeta(11)$ és irracional.

I també algunes petites millores dels resultats anteriors.

D'altra banda, que creiem que es cert? Doncs creiem que

6.2.2 Conjectura.

- Els nombres $\zeta(n)$ són sempre transcendents.
- Els nombres $\zeta(2n+1)$ són sempre algebraicament independents entre si.
- grau $\mathrm{trans}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\pi, \{\zeta(2n+1) \mid n = 1, 2, \cdots, k\})) = k + 1$.

6.3 Valors multizeta

Els valors multizeta apareixen per primer cop en una carta d'Euler a Goldbach. En ella es defineix, amb la notació actual, el valor

$$\zeta(n_1, n_2, \dots, n_k) := \sum_{a_1 > \cdots > a_k > 0} \frac{1}{a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k}}.$$

on $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Aquesta serie està definida (o sigui és convergent) per $n_1 > 1$ i $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Denotem per $k \geq 1$ la profunditat i per $n := n_1 + \cdots + n_k$ el pes de $\zeta(n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Euler mateix va demostrar alguns results. Concretament tenim els següents.

6.3.1 Teorema. *(Euler) Si $k = 2$ i $n = n_1 + n_2$ és senar, aleshores $\zeta(n_1, n_2)$ és una combinació lineal amb coeficients racionals de $\zeta(n_1 + n_2)$ i de $\zeta(n_1 + n_2 - i)\zeta(i)$, variant i. A més es té que*

$$2\zeta(m, 1) = m\zeta(n+1) - \sum_{i=1}^{m-2} \zeta(n-i)\zeta(i+1)$$

$$\zeta(n) = \sum_{n_1+n_2=n} \zeta(n_1, n_2)$$

i que

$$\zeta(3) = \zeta(2, 1).$$

Aquests valors varen ser "oblidats" fins que el 1988 Drinfeld "retroba" aquests valors com a coeficients del seu "associador".

Cap els 90's, Zagier els "redescobreix" i es va posar a estudiar les relacions entre ells.

comencem per introduir algunes notacions.

6.3.2 Notació. Definim

$$\mathcal{Z} := \langle \zeta(n_1, n_2, \ldots, n_k) \mid n_1 > 1, n_i \geq 1 \forall i = 1, \ldots, k, \forall k \geq 1 \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}.$$

Un punt clau que ara veure és que $\mathcal{Z}$ és un sub-anell commutatiu (de $\mathbb{R}$). Definim també

$$\mathcal{Z}_n := \langle \zeta(n_1, n_2, \ldots, n_k) \mid n_1 + \cdots + n_k = n \ \forall k \geq 1 \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$$

En la següent secció veurem que $\mathcal{Z}$ és un anell commutatiu, veient que el producte de valors multizeta és una suma de valors multizeta. I en la propera, que de fet ho és de dues formes diferents.

6.4 Producte Harmònic

6.4.1 Proposició. *(Producte Harmònic)*

$$\zeta(n_1, \ldots, n_k) \cdot \zeta(m_1, \ldots, m_{k'}) =$$

$$= \sum \textit{multizetes de pes } n_1 + \cdots + n_k + m_1 + \cdots + m_{k'}$$

Per exemple tenim que

$$\zeta(n) \cdot \zeta(m) = \zeta(n, m) + \zeta(m, n) + \zeta(n + m).$$

Això s'obté simplement reordenant la serie:

$$\sum_{0<a,b} \frac{1}{a^n b^m} = \left(\sum_{0<a<b} + \sum_{0<b<a} + \sum_{0<a=b} \right) \frac{1}{a^n b^m}.$$

La demostració de la proposició (i el seu enunciat!) és similar. Veure l'enunciat més precís més endavant.

6.4.2 Exemples.

$$\zeta(n)^2 = 2\zeta(n,n) + \zeta(2n)$$

Per $n = 2$ tenim:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \ \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

Per tant

$$\zeta(2,2) = \sum_{m>n\geq 1} \frac{1}{(mn)^2} = \frac{\pi^4}{120}.$$

Un altre exemple:

$$\zeta(2)\cdot\zeta(3) = \zeta(2,3) + \zeta(3,2) + \zeta(5).$$

De fet, el punt clau de tota la teoria és que

$$\zeta(n_1,\ldots,n_k)\cdot\zeta(m_1,\ldots,m_{k'}) =$$

$$= \sum \text{multiples racionals de multizetes de pes } n_1 + \cdots + m_{k'}$$

de dues maneres diferents!

6.4.3 Exemple. Tenim que

$$\zeta(2)\cdot\zeta(3) = \zeta(2,3) + \zeta(3,2) + \zeta(5)$$

i que

$$\zeta(2)\cdot\zeta(3) = \zeta(2,3) + 3\zeta(3,2) + 6\zeta(4,1).$$

Aquest segon s'anomena producte "shuffle"o escartejat. Obtenim

$$\zeta(5) = 2\zeta(3,2) + 6\zeta(4,1)$$

6.5 Producte escartejat

Per a poder definir-lo, primer necessitem una nova expressió dels valors multizeta, deguda a Drinfeld i Konsevich.

6.5.1 Proposició. *(Drinfeld-Konsevich) Si $n = n_1 + \cdots + n_k$, aleshores*

$$\zeta(n_1, \ldots, n_k) =$$
$$= \int_{\Delta_n} \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2} \cdots \frac{dt_{n_1}}{1-t_{n_1}} \cdots \frac{dt_{n-n_k+1}}{t_{n-n_k+1}}\frac{dt_{n-n_k+2}}{t_{n-n_k+2}} \cdots \frac{dt_n}{1-t_n}$$

on

$$\Delta_n = \{(t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R} \mid 1 > t_1 > \cdots > t_n > 0\}.$$

Per exemple tenim el següent resultat degut a Leibniz

$$\zeta(3) = \int_{1>t_1>t_2>t_3>0} \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\frac{dt_3}{1-t_3}.$$

La demostració és fàcil: només cal desenvolupar en serie de potencies les funcions de dins la integral.

Per tal d'introduir el producte escartejat, utilitzarem un seguit de notacions, aparentment deslligades del problema original, que a la llarga ens seran molt útils.

6.5.2 Notació.

- Denotem per $\mathfrak{H} := \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$ l'àlgebra de polinomis no commutatius en dues variables x i y.
- Denotem per $\mathfrak{H}^1 := \mathbb{Q} + \mathfrak{H}y$, la subalgebra generada per les paraules "acabades en y".
- Denotem per $\mathfrak{H}^0 := \mathbb{Q} + x\mathfrak{H}y$, la subalgebra generada per les paraules çomençades amb x i acabades en y".
- Denotem per $\omega_x(t) = dt/t$ i per $\omega_y(t) = dt/(1-t)$.
- Denotem per $Z : \mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}$ l'únic morfisme $\mathbb{Q}$-lineal amb $Z(1) = 1$ que assigna a cada paraula $u_1u_2 \cdots u_k$ (on $u_i = x$ o y), la integral múltiple

$$Z(u_1u_2 \cdots u_k) := \int_{\Delta_n} \omega_{u_1}\omega_{u_2} \cdots \omega_{u_k}.$$

Associem a cada $n_i \in \mathbb{N}$ el monomi no commutatiu $z_{n_i} = x^{n_i-1}y$, i a $\underline{n} = (n_1, \cdots, n_k)$ la paraula

$$z_{\underline{n}} := z_{n_1} \ldots z_{n_k} = x^{n_1-1}yx^{n_2-1}y \cdots x^{n_k-1}y.$$

Tenim aleshores que el teorema de Drinfeld ens diu

$$Z(z_{\underline{n}}) = Z(x^{n_1-1}yx^{n_2-1}y\cdots x^{n_k-1}y) = \zeta(n_1,\cdots,n_k).$$

Així z_k correspon al valor de la funció zeta de Riemman $\zeta(k)$.

6.5.3 Observació. Observeu que $z_k = x^{k-1}y$, $k = 1,2,3,\cdots$ generen lliurement $\mathfrak{H}^1$, però amb $k = 2,3,\cdots$ no generen $\mathfrak{H}^0$.

Per exemple, la paraula $xy^2 \in \mathfrak{H}^0$ no està generada per les z_k's.

A cada monomi de $\mathfrak{H}^1$ li associem el pes, que és el grau total, i la profunditat, que és el grau en y. Diem que un element de $\mathfrak{H}^1$ té pes (pur) n si tots els monomis que el formen tenen pes n.

El producte escartejat (o shuffle) que hem mencionat abans és fàcil de definir en paraules.

6.5.4 Definició. Un escartejament de dues paraules és una paraula obtinguda posant les lletres de cadascuna de les paraules mantenint l'ordre intern de cada paraula.

Per exemple, els escartejaments de ab i cd són

$$abcd\ ,\ acbd\ ,\ acdb\ ,\ cabd\ ,\ cadb\ ,\ cdab.$$

6.5.5 Definició. Si w_1 i w_2 són dues paraules qualsevol de $\mathfrak{H}$, definim el producte escartejat

$$w_1 \sqcup\!\sqcup\, w_2 = \sum \text{tots els escartejaments de } w_1 \text{ i } w_2.$$

6.5.6 Exemple. Vegem que

$$\zeta(2)\cdot\zeta(3) = \zeta(2,3) + 3\zeta(3,2) + 6\zeta(4,1)$$

Qui és $xy \sqcup\!\sqcup\, \mathbf{x^2y} =?$

Els escartejaments són

$$xy\mathbf{x^2y}, x\mathbf{x}y\mathbf{xy}, x\mathbf{x^2}y\mathbf{y}, x\mathbf{x^2y}y, \mathbf{x}xy\mathbf{xy},$$
$$\mathbf{x}x\mathbf{x}y\mathbf{y}, \mathbf{x}x\mathbf{xy}y, \mathbf{x^2}xy\mathbf{y}, \mathbf{x^2}x\mathbf{y}y, \mathbf{x^2y}xy,$$

d'on

$$xy \sqcup\!\sqcup\, x^2y = xyx^2y + 3x^2yxy + 6x^3y^2.$$

6.5.7 Proposició. *Propietats del producte escartejat.*

- $\mathfrak{H}$ *esdevé un anell commutatiu amb aquest producte, una* $\mathbb{Q}$-*àlgebra.*
- $\mathfrak{H}^1$ *i* $\mathfrak{H}^0$ *són subanells, sub-*$\mathbb{Q}$*-àlgebres.*
- *El producte escartejat de dues paraules de pes pur* n *i* m *té pes* $n+m$.
- Z *és un morfisme d'anells, o sigui*

$$Z(w_1 \shuffle w_2) = Z(w_1)Z(w_2).$$

Aquesta última propietat és una conseqüència "formal"de la definició, no depèn de com em definit ω_x i ω_y, només de si convergeix la integral.

A $\mathfrak{H}^1$ podem definir el producte harmònic inductivament per

$$1 * w = w * 1 = w$$

$$z_k w_1 * z_l w_2 := z_k(w_1 * z_l w_2) + z_l(z_k w_1 * w_2) + z_{k+l}(w_1 * w_2)$$

per a totes $k, l \geq 1$, i per a totes les paraules $w, w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$, i estenent-lo per $\mathbb{Q}$-bilinearitat. També es pot estendre a tot $\mathfrak{H} = \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$.

6.5.8 Proposició. *Propietats del producte harmònic.*

- *El producte harmònic de dos elements de pes pu* n *i* m *té pes pur* $n+m$.
- $\mathfrak{H}^1$ *és una àlgebra commutativa per* $*$, *i* $\mathfrak{H}^0$ *és una subàlgebra.*
- Z *és un morfisme d'anells també per* $*$, *o sigui*

$$Z(w_1 * w_2) = Z(w_1)Z(w_2).$$

Per exemple, tenim que

$$z_k * z_l = z_k z_l + z_l z_k + z_{k+l}.$$

6.6 Relacions Dobles finites

Donades dues paraules w_1 i w_2 de $\mathfrak{H}^0$, tenim per tant que

$$Z(w_1 ш w_2) = Z(w_1 * w_2).$$

Les relacions obtingudes s'anomenen les relacions dobles finites.

El primer exemple és

$$4\zeta(3,1) + 2\zeta(2,2) = 2\zeta(2,2) + \zeta(4) \quad (= \zeta(2)^2).$$

d'on tenim que $4\zeta(3,1) = \zeta(4)$.

Observació important: Hi ha més relacions que aquestes.

6.6.1 Exemples. Les igualtats $\zeta(2,1) = \zeta(3)$ i $4\zeta(2,2) = 3\zeta(4)$ no s'obtenen d'aquestes relacions.

Podem obtenir més relacions considerant elements de $\mathfrak{H}^1$, que corresponen a sumes divergents.

6.6.2 Observació. Si $w \in \mathfrak{H}^0$, aleshores

$$y * w = yw + w' \quad \text{amb} \quad w' \in \mathfrak{H}^0.$$

6.6.3 Observació. Si $w \in \mathfrak{H}^0$, aleshores

$$y ш w = yw + w'' \quad \text{amb} \quad w'' \in \mathfrak{H}^0$$

6.6.4 Corol·lari.

$$\forall w \in \mathfrak{H}^0, \ y ш w - y * w \in \mathfrak{H}^0.$$

6.6.5 Teorema. *(Zagier)* $\forall w \in \mathfrak{H}^0, Z(y ш w - y * w) = 0.$

Conseqüència: Tenim més relacions entre els valors zeta múltiples.

6.6.6 Conjectura. Aquestes relacions

$$\forall w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^0, Z(w_1 ш w_2 - w_1 * w_2) = 0,$$

$$\forall w \in \mathfrak{H}^0, Z(y ш w - y * w) = 0,$$

generen totes les relacions sobre $\mathbb{Q}$ que hi ha.

6.6.7 Exemple. Prenem $w = xy$ al Teorema anterior. De $y \sqcup\!\sqcup\, xy = yxy + 2xy^2$ i de $y * xy = z_1 * z_2 = z_1z_2 + z_2z_1 + z_3 = yxy + xy^2 + x^2y$ tenim que

$$y \sqcup\!\sqcup\, xy - y * xy = xy^2 - x^2y.$$

Com a conseqüència $\zeta(2,1) = \zeta(3)$.

6.6.8 Exemple. Prenem $w = x^2y$ al Teorema anterior. De $y \sqcup\!\sqcup\, x^2y = yx^2y + xyxy + 2x^2y^2$ i de $y * x^2y = z_1 * z_3 = z_1z_3 + z_3z_1 + z_4 = yx^2y + x^2y^2 + x^3y$ tenim que $y \sqcup\!\sqcup\, x^2y - y * x^2y = xyxy + x^2y^2 - x^3y$. Com a conseqüència $\zeta(2,2) + \zeta(3,1) = \zeta(4)$.

6.6.9 Exemple. Prenem $w = xy^2$ al Teorema anterior, obtenim que $\zeta(2,2) + \zeta(3,1) = \zeta(2,1,1)$.

6.6.10 Corol·lari. *(dels exemples i de la irracionalitat) La dimensió sobre $\mathbb{Q}$ del espai vectorial $\mathcal{Z}_n$ generat pels valors multizetes de pes n és 1 per a pesos $n = 2, 3, 4$, i estan generades per $\zeta(n)$.*

6.7 Relacions Dobles Generals

Anem a estudiar més relacions entre valors multizeta, aquest cop utilitzant series divergents sortint de elements qualsevol de $\mathfrak{H}^1$, i no només els de la forma $y \sqcup\!\sqcup\, \chi^0$. Per a fer-ho necessitem dos resultats sobre l'estructura de χ com a anell commutatiu, tant pel producte escartejat $\sqcup\!\sqcup$ com pel producte harmònic $*$.

6.7.1 Teorema. *(Reutenauer 1993 [5])* $\mathrm{reg}^T_{\sqcup\!\sqcup} : \mathfrak{H}^1_{\sqcup\!\sqcup} \cong \mathfrak{H}^0_{\sqcup\!\sqcup}[T]$ *com a $\mathbb{Q}$-àlgebres, enviant y a T i $\mathfrak{H}^0$ a ell mateix. O sigui*

1. *$\forall w \in \mathfrak{H}^1$, $\exists n \geq 0$ tal que $\forall i = 0, \ldots, n$ $\exists w_i \in \mathfrak{H}^0$ tal que*

$$w = \sum_{i=0}^{n} w_i \sqcup\!\sqcup\, y^{\sqcup\!\sqcup\, i}.$$

2. *És morfisme d'anells, o sigui*

$$\left(\sum_{i=0}^{n} w_i \sqcup\!\sqcup\, y^{\sqcup\!\sqcup\, i}\right) \sqcup\!\sqcup \left(\sum_{j=0}^{m} u_j \sqcup\!\sqcup\, y^{\sqcup\!\sqcup\, j}\right) = \sum_{k=0}^{n+m} v_k \sqcup\!\sqcup\, y^{\sqcup\!\sqcup\, k}$$

on $v_k = \sum_{i+j=k} w_i \sqcup\!\sqcup\, u_j$.

6.7.2 Observació. $y^{\sqcup\!\sqcup\, n} = n! y^n$.

6.7.3 Teorema. *(Hoffman 1997 [3])* $\mathrm{reg}_*^T : \mathfrak{H}_*^1 \cong \mathfrak{H}_*^0[T]$ *com a* $\mathbb{Q}$-*àlgebres, enviant* y *a* T *i* $\mathfrak{H}^0$ *a ell mateix.*

Exercici: $y^{*2} = 2y^2 + xy$, $y^{*3} = 6y^3 + 3yxy + 3xy^2 + x^2y$.

6.7.4 Corol·lari. *Existeixen dos morfismes d'anells*

$$Z^{\sqcup\!\sqcup} : \mathfrak{H}_{\sqcup\!\sqcup}^1 \to \mathbb{R}[T]$$

$$Z^* : \mathfrak{H}_*^1 \to \mathbb{R}[T]$$

tals que envien y *a* T *i estenen el morfisme* Z *de* $\mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}$.

El teorema del Zagier d'abans s'interpreta així com que

$$Z^{\sqcup\!\sqcup}(w) = Z^*(w)$$

si $w = yw'$ amb $w' \in \mathfrak{H}^0$.

Potser podríem pensar que $Z^{\sqcup\!\sqcup}(w) = Z^*(w)$ és sempre cert per a tot $w \in \chi^1$. Però l'exemple següent ens demostra que això no es cert.

6.7.5 Exemple.

$$y^{*2} = 2y^2 + xy \Rightarrow Z^*(y^2) = \frac{T^2}{2} - \frac{\zeta(2)}{2}$$

$$y^{\sqcup\!\sqcup\, 2} = 2y^2 \Rightarrow Z^{\sqcup\!\sqcup}(y^2) = \frac{T^2}{2}$$

6.7.6 Definició. Considerem

$$A(u) := \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\zeta(n)u^n\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k u^k \in \mathbb{R}[[T]],$$

Tenim que

$$A(u) = e^{\gamma u}\Gamma(1+u) \text{ per } |u| < 1 \text{ i } \gamma \text{ constant d'Euler.}$$

Tenim $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \frac{\zeta(2)}{2}$, $\gamma_3 = -\frac{\zeta(3)}{3}$, $\gamma_4 = \frac{\zeta(4)}{4} + \frac{\zeta(2)^2}{8}$,...

6.7.7 Definició. Considerem el morfisme $\mathbb{R}$-lineal $\rho : \mathbb{R}[T] \to \mathbb{R}[T]$ determinat per

$$\rho\left(\frac{T^n}{n!}\right) := \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \frac{T^{n-k}}{(n-k)!} \text{ o sigui } \rho(e^{Tu}) = A(u)e^{Tu}$$

El teorema principal del article de Ihara, Kaneko i Zagier [4] és el següent.

6.7.8 Teorema. *(Ihara-Kaneko-Zagier)*

$$Z^{ш}(w) = \rho(Z^*(w)).$$

6.7.9 Exemple. Tenim que

$$Z^{ш}(y^2xy) = \frac{\zeta(2)}{2}T^2 - 2\zeta(2,1)T + 3\zeta(2,1,1),$$

i que

$$Z^*(y^2xy) = \frac{\zeta(2)}{2}T^2 - (\zeta(3) + \zeta(2,1))T + \frac{\zeta(4)}{2} + \zeta(3,1) + \zeta(2,1,1).$$

D'altra banda,

$$\rho(T^2) = T^2 + \zeta(2),$$

i per tant deduïm del teorema que

$$\zeta(3) = \zeta(2,1)$$

i que

$$3\zeta(2,1,1) = \frac{\zeta(2)}{2} + \frac{\zeta(4)}{2} + \zeta(3,1) + \zeta(2,1,1)$$

La demostració del teorema 6.7.8 utilitza, entre altres coses, unes funcions de les quals el Zagier té força resultats: els polilogaritmes.

6.8 Polilogaritmes

6.8.1 Definició. El polilogaritme associat a $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ és

$$\mathrm{Li}_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)}(t) := \sum_{a_1>\cdots>a_k>0} \frac{t^{a_1}}{a_1^{n_1}\cdots a_k^{n_k}}.$$

6.8.2 Lema. *(Representació integral) Si $n = n_1 + \cdots + n_k$, aleshores*

$$\mathrm{Li}_{(n_1,\ldots,n_k)}(t) = \int\cdots\int_{t>t_1>\cdots>t_n>0} \omega_1(t_1)\omega_2(t_2)\cdots\omega_n(t_n)$$

$\omega_i(t) = dt/(1-t)$ *si* $i = n_1, n_1+n_2, \cdots, n$, $\omega_i(t) = dt/t$ *si no.*

6.8.3 Observació. 1. $\mathrm{Li}_1(t) = \log(1/(1-t))$.

2. $\mathrm{Li}_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)}(1) = \zeta((n_1, n_2, \ldots, n_k))$ si $n_1 > 1$.

6.8.4 Definició. Definim el valor multizeta truncat fins a M com

$$\zeta_M(n_1, n_2, \ldots, n_k) := \sum_{M>a_1>\cdots>a_k>0} \frac{1}{a_1^{n_1}\cdots a_k^{n_k}}.$$

Tenim aleshores que el producte harmònic s'estén als valors multizeta truncats, obtenint que

$$\zeta_M(\underline{n})\zeta_M(\underline{n'}) = \sum_{\text{certes } \underline{n''}} \zeta_M(\underline{n''}).$$

D'altra banda, pel producte escartejat tenim que el producte de polilogaritmes també s'expressa com a suma de polilogaritmes, seguint la regla del producte escartejat:

$$\mathrm{Li}_{\underline{n}}(t)\,\mathrm{Li}_{\underline{n'}}(t) = \sum_{\text{certes } \underline{n''}} \mathrm{Li}_{\underline{n''}}(t).$$

Això és relaciona amb els valors multizeta truncats utilitzant la fórmula següent:

$$\mathrm{Li}_{\underline{n}}(t) = (1-t)\sum_{M=1}^{\infty} \zeta_M(\underline{n})t^{M-1}$$

Els dos lemmes següents són claus en la demostració del teorema 6.7.8.

6.8.5 Lema.

$$\zeta_M(\underline{n}) = Z^*(\underline{n})(\log(M)+\gamma) + O(M^{-1}\log^J(M))$$

$$\mathrm{Li}_{\underline{n}}(t) = Z^{ш}(\underline{n})(\log(\frac{1}{1-t})) + O((1-t)\log^J(\frac{1}{1-t}))$$

6.8.6 Lema. *Si $P(T) \in \mathbb{R}[T]$ i $Q(T) = \rho(P(T))$, aleshores*

$$\sum_{M=1}^{\infty} P(\log(M)+\gamma)t^{M-1} = \frac{1}{1-t}Q(\log(\frac{1}{1-t})) + O(\log^J(\frac{1}{1-t}))$$

6.8.7 Notació. Definim les regularitzacions com

$$\mathrm{reg}^T_{ш} : \mathfrak{H}^1_{ш} \cong \mathfrak{H}^0_{ш}[T]$$

$$\mathrm{reg}_{ш} = \mathrm{reg}^T_{ш}{}_{|T=0} : \mathfrak{H}^1_{ш} \to \mathfrak{H}^0$$

$$\mathrm{reg}^T_* : \mathfrak{H}^1_* \cong \mathfrak{H}^0_*[T]$$

$$\mathrm{reg}_* = \mathrm{reg}^T_*{}_{|T=0} : \mathfrak{H}^1_* \to \mathfrak{H}^0$$

6.8.8 Exemple.

$$\mathrm{reg}^T_{ш}(y^2) = \frac{T^2}{2}\ ,\ \mathrm{reg}_{ш}(y^2) = 0$$

$$\mathrm{reg}^T_*(y^2) = \frac{T^2}{2} - \frac{xy}{2}\ ,\ \mathrm{reg}_{ш}(y^2) = -\frac{xy}{2}$$

6.8.9 Proposició. *(Fórmules explícites per les regularitzacions) Per a tot $m \geq 0$ i tot w_0' de $\mathfrak{H}^1$ tenim que*

$$\mathrm{reg}^T_{ш}(y^m x w_0') = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l x(y^l \,ш\, w_0')\frac{T^{m-l}}{(m-l)!}$$

$$\mathrm{reg}_{ш}(y^m x w_0') = (-1)^m x(y^m \,ш\, w_0').$$

Si $w_0 \in \mathfrak{H}^0$, tenim que

$$\operatorname{reg}_{ш}(y^m w_0) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i y^i \mathbin{ш} y^{m-i} w_0$$

$$\operatorname{reg}_*(y^m w_0) = \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i}{i!} y^i * y^{m-i} w_0.$$

6.9 Equivalències

Un dels resultats principals de l'article de Ihara, Kaneko i Zagier és una llista de afirmacions equivalents a la formula del teorema 6.7.8.

6.9.1 Teorema. *Suposem sabudes les relacions dobles finites. Aleshores les següents propietats són equivalents:*

1. $Z^{ш}(w) - \rho Z^*(w) = 0$ *per tota* $w \in \mathfrak{H}^1$.
2. $(Z^{ш}(w) - \rho Z^*(w))_{|T=0} = 0$ *per tota* $w \in \mathfrak{H}^1$.
3. $Z^{ш}(w_1 \mathbin{ш} w_0 - w_1 * w_0) = 0$ *per tota* $w_1 \in \mathfrak{H}^1$ *i* $w_0 \in \mathfrak{H}^0$.
4. $Z(\operatorname{reg}_{ш}(w_1 \mathbin{ш} w_0 - w_1 * w_0)) = 0$ *per tota* $w_1 \in \mathfrak{H}^1$ *i* $w_0 \in \mathfrak{H}^0$.
5. *El mateix canviant* $ш$ *per* $*$.
6. $Z(\operatorname{reg}_{ш}(y^m * w_0)) = 0$ *per tota* $w_0 \in \mathfrak{H}^0$.

Aquest resultat de fet es pot aplicar a qualssevol morfismes Z^* i $Z^{ш}$ a un anell de característica zero.

D'aquest resultat es poden deduir alguns resultats coneguts, i d'altres menys coneguts. Un d'ells és l'anomenat teorema de la suma, que va ser demostrat per primer cop per Andrew Granville. És una generalització d'un resultat d'Euler 6.3.1, qui ho va demostrar per cas $k = 2$.

6.9.2 Proposició. *Sigui $S(m,k)$ la suma de tots els monomis a $\mathfrak{H}^0$ de pes m i profunditat k. Aleshores, si $m > k+1 \geq 2$, tenim*

$$(-1)^k \operatorname{reg}_{ш}(y^k * x^{m-k-1} y) = S(m, k+1) - S(m,k).$$

DEMOSTRACIÓ:Tenim que

$$S(m,k) = (-1)^k x(y^k \shuffle x^{m-k-2})y.$$

D'altra banda tenim

$$y^k * x^{m-k-1}y = \sum_{i=0}^{k} y^i x^{m-k-1} y^{k+1-i} + \sum_{j=0}^{k-1} y^j x^{m-k} y^{k-j}.$$

i com que

$$\mathrm{reg}_{\shuffle}(y^a x^b y^c) = (-1)^a x(y^a \shuffle x^{b-1} y^c)$$

obtenim el resultat. □

6.9.3 Corol·lari. *(El teorema de la suma de Granville [2]) La suma de tots els valors multi zeta de pes fixat n i profunditat fixada $< n$ és igual a $\zeta(n)$. O sigui, fixada $k < n$ tenim que*

$$\sum_{n_1+\cdots+n_k=n} \zeta(n_1,\ldots,n_k) = \zeta(n)$$

6.9.4 Exemple. $\zeta(2,1) = \zeta(3)$,

$$\zeta(3,1) + \zeta(2,2) = \zeta(4) = \zeta(2,1,1)$$

DEMOSTRACIÓ: Per la última de les equivalències tenim que

$$Z((-1)^k \mathrm{reg}_{\shuffle}(y^k * x^{m-k-1}y)) = 0$$

Per tant

$$Z(S(m,k+1)) = Z(S(m,k)) = \cdots = Z(S(m,1)) = \zeta(m).$$

□

6.9.5 Conjectura. Les úniques relacions entre els valors de les funcions multizeta s'obtenen d'igualar

$$Z^{\shuffle}(w) = \rho(Z^*(w)) \quad \forall w \in \mathfrak{H}^1$$

O, equivalentment, el nucli del morfisme

$$Z : \mathfrak{H}^0 \to \mathcal{Z} := \langle \zeta(n_1, n_2, \ldots, n_k) \mid n_1 > 1, n_i \geq 1 \forall i, \forall k \geq 1 \rangle_{\mathbb{Q}}$$

és igual a

$$\ker(Z) = \{\mathrm{reg}_{\shuffle}(y^m * w_0) \mid \forall w_0 \in \mathfrak{H}^0\}.$$

La conjectura 6.6.6 que hem anunciat abans és equivalent a

6.9.6 Conjectura.

$$\ker(Z) = \{\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(y * w_0) \mid \forall w_0 \in \mathfrak{H}^0\}.$$

Com a conseqüències de qualsevol les conjectures anteriors obtenim les conjectures següents, que formen part del folclore.

6.9.7 Conjectura. Dos valors de multi zeta de pesos diferents són linealment independents sobre $\mathbb{Q}$. O sigui $\mathcal{Z} = \bigoplus_n \mathcal{Z}_n$ com a $\mathbb{Q}$-algebra.

Per tant tenim que les $\zeta(n_1, \dots, n_k)$ són sempre transcendents.

Per exemple, $\zeta(2)^3$ i $\zeta(3)^2$ són independents sobre $\mathbb{Q}$.

6.10 Dimensions

Una de les últimes coses que fan en l'article és estudiar i demostrar alguna petita cosa sobre quines poden ser les dimensions del espai generat per les multizetes de pes fixat. El resultat que esperen provar ve donat per una conjectura famosa.

6.10.1 Conjectura. (Zagier,Broadhurst-Kreimer) La dimensió sobre $\mathbb{Q}$ de $\mathcal{Z}_n$ és d_n, on $d_0 = 1$, $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ i $d_n = d_{n-2} + d_{n-3}$.

Aquesta conjectura va sortir de l'estudi de les multizetes de profunditat ≤ 2.

6.10.2 Corol·lari. *Suposem certa la conjectura 6.10.1. Aleshores els següents valors són linealment independents sobre $\mathbb{Q}$ i generen $\mathcal{Z}_{\leq 10}$:*

$$\zeta(2),\ \zeta(3),\ \zeta(5),\ \zeta(9),$$

$$\zeta(6,8),\ \zeta(8,2).$$

De fet, hi ha una conjectura que si fos certa justificaria la conjectura 6.10.1, i que explicita una base per els espais $\mathcal{Z}_n$.

6.10.3 Conjectura. (La conjectura de la base (Hoffman)) Tot valor multizeta pot ser escrit com a suma de múltiples racionals de valors multi zeta que sols contenen 2 i 3.

A diferencia de la conjectura 6.10.1, aquesta conjectura pot ser atacada per a mètodes purament algebraics, estudiant com són els espais equivalents a $\mathfrak{H}^1$.

6.10.4 Exemple.

$$\zeta(7) = \frac{252}{151}\zeta(3,2,2) + \frac{672}{151}\zeta(2,3,2) + \frac{528}{151}\zeta(2,2,3)$$

Com a conseqüència de la conjectura de la base i de la dimensió tindríem que

6.10.5 Conjectura. Els valors multi zeta que sols contenen 2 i 3 són tots linealment independents sobre $\mathbb{Q}$ i generen $\mathcal{Z}$.

Sobre la conjectura sobre les dimensions, tenim un resultat que ens dóna una de les desigualtats.

6.10.6 Teorema. *(Goncharov, Terasoma [7])*

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}_n) \leq d_n$$

Finalment, voldria mencionar un dels teoremes de Zagier sobre valors multizeta, que en certa manera generalita el càlcul d'Euler.

6.10.7 Teorema. *(Teorema de la paritat) (Zagier) Tot valor de les funcions multizeta amb pes n i profunditat k, si $n \not\equiv k (mod\, 2)$, és combinació lineal de valors amb profunditat menor i productes de valors amb pes menor.*

Bibliografia

[1] R. Apéry, Ïrrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$."Astérisque 61, 11-13, 1979.

[2] A. Granville, 'A decomposition of Riemann's zeta-function,' in Analytic Number Theory, London Mathematical Society Lecture Note Series 247, Y. Motohashi (ed.), Cambridge University Press, 1997, pp. 95-101.

[3] M. Hoffman, The algebra of multiple harmonic series, *J. of Algebra* 194 (1997), 477û495.

[4] Ihara, K. ; Kaneko, M; Zagier, D.: Derivation and double shuffle relations for multiple zeta functions, *Comp. Math.* 142 (2006), 307–338.

[5] C. Reutenauer, Free Lie Algebras, Oxford Science Publications, 1993.

[6] T. Rivoal, La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs, C. R. A. S. Paris Sér. I Math. 331.4 (2000), 267-270.

[7] T. Terasoma, Mixed Tate motives and multiple zeta values, Invent. Math. 149 (2002), 339û369.

[8] D. Zagier, 'Values of zeta functions and their applications,' in *First European Congress of Mathematics (Paris, 1992)*, Vol. II, A. Joseph et. al. (eds.), Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 497-512.

[9] W. Zudilin, One of the numbers $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ is irrational, Uspekhi Mat. Nauk [Russian Math. Surveys] 56:4 (2001), 149–15

X. Xarles

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

08193, Bellaterra

xarles@mat.uab.cat