Valors Multi Zeta

Xavier Xarles

Vilanova i la Geltrú

2 de Febrer de 2008

Altres titulars

Altres titulars

D'Euler a Zagier

O Jo també reciclo

Altres titulars

D'Euler a Zagier

O Jo també reciclo

Que feia Zagier quan estava avorrit del 1988 al 1994

Preliminar

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Preliminar

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Euler (1730)

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Preliminar

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Euler (1730)

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \frac{1}{90}\pi^4$$

Euler: $\zeta(2n)$

$$\zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2,\ \zeta(4) = \frac{1}{90}\pi^4,$$

Euler: $\zeta(2n)$

$$\zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2,\ \zeta(4) = \frac{1}{90}\pi^4,\ \zeta(6) = \frac{1}{945}\pi^6,$$

Euler: $\zeta(2n)$

$$\zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2,\ \zeta(4) = \frac{1}{90}\pi^4,\ \zeta(6) = \frac{1}{945}\pi^6,\ \zeta(8) = \frac{1}{9450}\pi^8,$$

Euler: $\zeta(2n)$

$$\zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2, \ \zeta(4) = \frac{1}{90}\pi^4, \ \zeta(6) = \frac{1}{945}\pi^6, \ \zeta(8) = \frac{1}{9450}\pi^8,$$

$$\zeta(10) = \frac{1}{93555}\pi^{10},$$

Euler: $\zeta(2n)$

$$\zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2,\ \zeta(4) = \frac{1}{90}\pi^4,\ \zeta(6) = \frac{1}{945}\pi^6,\ \zeta(8) = \frac{1}{9450}\pi^8,$$

$$\zeta(10) = \frac{1}{93555}\pi^{10},\ \zeta(12) = \frac{691}{638512875}\pi^{12}, \cdots ,$$

Euler: $\zeta(2n)$

$$\zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2,\ \zeta(4) = \frac{1}{90}\pi^4,\ \zeta(6) = \frac{1}{945}\pi^6,\ \zeta(8) = \frac{1}{9450}\pi^8,$$

$$\zeta(10) = \frac{1}{93555}\pi^{10},\ \zeta(12) = \frac{691}{638512875}\pi^{12}, \cdots,$$

$$\zeta(26) = \frac{1315862}{11094481976030578125}\pi^{26}$$

Euler: $\zeta(2n)$

$$\zeta(2)=\frac{1}{6}\pi^2,\ \zeta(4)=\frac{1}{90}\pi^4,\ \zeta(6)=\frac{1}{945}\pi^6,\ \zeta(8)=\frac{1}{9450}\pi^8,$$

$$\zeta(10)=\frac{1}{93555}\pi^{10},\ \zeta(12)=\frac{691}{638512875}\pi^{12},\cdots,$$

$$\zeta(26)=\frac{1315862}{11094481976030578125}\pi^{26}$$

$$\zeta(2n)=\frac{(-1)^{n+1}B_{2n}2^{2n-1}}{(2n)!}\pi^{2n}$$

Conseqüència

$$\zeta(2n) = c_{2n}\zeta(2)^{2n} \quad c_{2n} \in \mathbb{Q}$$

Conseqüència

$$\zeta(2n) = c_{2n}\zeta(2)^{2n} \quad c_{2n} \in \mathbb{Q}$$

Pregunta: Podem demostrar això sense utilitzar el càlcul d'Euler?

Conseqüència

$$\zeta(2n) = c_{2n}\zeta(2)^{2n} \quad c_{2n} \in \mathbb{Q}$$

Pregunta: Podem demostrar això sense utilitzar el càlcul d'Euler?

Pregunta: Podem demostrar això de manera elemental?

Idea

Considerem

$$f(m,n) = \frac{2}{mn^3} + \frac{1}{m^2n^2} + \frac{2}{m^3n}$$

Idea

Considerem

$$f(m,n) = \frac{2}{mn^3} + \frac{1}{m^2n^2} + \frac{2}{m^3n}$$

Exercici Elemental:

$$f(m,n) - f(m,n+m) - f(m+n,n) = \frac{2}{m^2n^2}$$

Idea (cont)

Conseqüència:

$$2\zeta(2)^2 = \sum_{m>0,n>0} \frac{2}{m^2n^2} =$$

Idea (cont)

Conseqüència:

$$2\zeta(2)^2 = \sum_{m>0,n>0} \frac{2}{m^2n^2} =$$

$$= \sum_{m>0,n>0} f(m,n) - \sum_{m>0,n>0} f(m,n+m) - \sum_{m>0,n>0} f(m+n,n) =$$

Idea (cont)

Conseqüència:

$$2\zeta(2)^2 = \sum_{m>0,n>0} \frac{2}{m^2n^2} =$$

$$= \sum_{m>0,n>0} f(m,n) - \sum_{m>0,n>0} f(m,n+m) - \sum_{m>0,n>0} f(m+n,n) =$$

$$= \sum_{m>0,n>0} f(m,n) - \sum_{n>m>0} f(m,n) - \sum_{m>n>0} f(m,n) =$$

Idea (cont)

Conseqüència:

$$2\zeta(2)^2 = \sum_{m>0,n>0} \frac{2}{m^2n^2} =$$

$$= \sum_{m>0,n>0} f(m,n) - \sum_{m>0,n>0} f(m,n+m) - \sum_{m>0,n>0} f(m+n,n) =$$

$$= \sum_{m>0,n>0} f(m,n) - \sum_{n>m>0} f(m,n) - \sum_{m>n>0} f(m,n) =$$

$$= \sum_{n>0} f(n,n) = \sum_{n>0} \left(\frac{2}{n^4} + \frac{1}{n^4} + \frac{2}{n^4} \right) = 5\zeta(4)$$

Idea General

Considerem

$$f(m,n) = \frac{2}{mn^{k-1}} + \frac{1}{m^2n^{k-2}} + \cdots + \frac{1}{m^{k-2}n^2} + \frac{2}{m^{k-1}n}$$

Idea General

Considerem

$$f(m,n) = \frac{2}{mn^{k-1}} + \frac{1}{m^2n^{k-2}} + \cdots + \frac{1}{m^{k-2}n^2} + \frac{2}{m^{k-1}n}$$

Exercici no tant Elemental:

$$f(m,n) - f(m,n+m) - f(m+n,n) = 2 \sum_{\substack{0<j<k \\ j \text{ parell}}} \frac{1}{m^j n^{k-j}}$$

Conseqüència

$$(2n+1)\zeta(2n) = \sum_{m>0} f(m,m) =$$

Conseqüència

$$(2n+1)\zeta(2n) = \sum_{m>0} f(m,m) =$$

$$= 2 \sum_{\substack{0<j<k \\ j\,\text{parell}}} \zeta(j)\zeta(2n-j)$$

Conseqüència

$$(2n+1)\zeta(2n) = \sum_{m>0} f(m,m) =$$

$$= 2 \sum_{\substack{0<j<k \\ j \text{ parell}}} \zeta(j)\zeta(2n-j)$$

Per inducció:

$$\zeta(2n) \in \zeta(2)^n \mathbb{Q}$$

Preguntes

Preguntes

- Hi ha altres possibles relacions entre els valors de $\zeta(n)$, $n \in \mathbb{N}$?

Preguntes

- Hi ha altres possibles relacions entre els valors de $\zeta(n)$, $n \in \mathbb{N}$?
- Podria ser que $\zeta(kn) \in \zeta(k)^n\mathbb{Q}$?

Preguntes

- Hi ha altres possibles relacions entre els valors de $\zeta(n)$, $n \in \mathbb{N}$?
- Podria ser que $\zeta(kn) \in \zeta(k)^n \mathbb{Q}$?
- Donat que

$$\mathbb{Q}(\{\zeta(2n) \mid n = 1, 2, \dots\}) = \mathbb{Q}(\zeta(2)),$$

amb grau de trascendencia 1 sobre $\mathbb{Q}$, que podem dir del grau de transcendència de

$$\mathbb{Q}(\{\zeta(n) \mid n = 2, 3, 4, \dots\})?$$

Preguntes

- Hi ha altres possibles relacions entre els valors de $\zeta(n)$, $n \in \mathbb{N}$?
- Podria ser que $\zeta(kn) \in \zeta(k)^n \mathbb{Q}$?
- Donat que

$$\mathbb{Q}(\{\zeta(2n) \mid n = 1, 2, \dots\}) = \mathbb{Q}(\zeta(2)),$$

  amb grau de trascendencia 1 sobre $\mathbb{Q}$, que podem dir del grau de transcendència de

$$\mathbb{Q}(\{\zeta(n) \mid n = 2, 3, 4, \dots\})?$$

- I el de $\mathbb{Q}(\{\zeta(n) \mid n = 2, 3, \cdots, k\})$?

Que sabem?

Que sabem?

No sabem gairebé res.

Que sabem?

No sabem gairebé res.

- Apéry 1978: $\zeta(3)$ és irracional.

Que sabem?

No sabem gairebé res.

- Apéry 1978: $\zeta(3)$ és irracional.
- Rivoal 2000: Per a tot $\epsilon > 0$ existeix n_0 tal que per tot $n \geq n_0$

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}+\zeta(3)\mathbb{Q}+\zeta(5)\mathbb{Q}+\cdots+\zeta(2n+1)\mathbb{Q} \geq \frac{1-\epsilon}{1+\log(2)} \log(n)$$

Que sabem?

No sabem gairebé res.

- Apéry 1978: $\zeta(3)$ és irracional.
- Rivoal 2000: Per a tot $\epsilon > 0$ existeix n_0 tal que per tot $n \geq n_0$

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}+\zeta(3)\mathbb{Q}+\zeta(5)\mathbb{Q}+\cdots+\zeta(2n+1)\mathbb{Q} \geq \frac{1-\epsilon}{1+\log(2)}\log(n)$$

- Zudilin 2001:
  Un com a mínim dels 4 nombres $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ i $\zeta(11)$ és irracional.

Que creiem?

Que creiem?

- Els nombres $\zeta(n)$ són sempre transcendents.

Que creiem?

- Els nombres $\zeta(n)$ són sempre transcendents.
- Els nombres $\zeta(2n+1)$ són sempre algebraicament independents entre si.

Que creiem?

- Els nombres $\zeta(n)$ són sempre transcendents.
- Els nombres $\zeta(2n+1)$ són sempre algebraicament independents entre si.
- grau trans$_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\{\zeta(2n+1) \mid n = 1, 2, \cdots, k\})) = k$.

L'Article

Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values

Kentaro Ihara , Masanobu Kaneko and Don Zagier

Compositio Mathematica (2006), 142: 307-338

L'Article

Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values

Kentaro Ihara , Masanobu Kaneko and Don Zagier

Compositio Mathematica (2006), 142: 307-338

Some of the results in this paper (...) originated in work which the third-named author did in the year 1988 - 1994 but never published.

$\zeta(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}, \ldots, \mathbf{n_k})$

Euler en una carta a Goldbach:

$$\zeta(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \sum_{a_1 > \cdots > a_k > 0} \frac{1}{a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k}}.$$

on $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

$\zeta(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}, \ldots, \mathbf{n_k})$

Euler en una carta a Goldbach:

$$\zeta(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \sum_{a_1 > \cdots > a_k > 0} \frac{1}{a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k}}.$$

on $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Ben definida (o sigui convergent) per $n_1 > 1$, $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$\zeta(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}, \ldots, \mathbf{n_k})$

Euler en una carta a Goldbach:

$$\zeta(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \sum_{a_1 > \cdots > a_k > 0} \frac{1}{a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k}}.$$

on $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Ben definida (o sigui convergent) per $n_1 > 1$, $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$k \geq 1$ la profunditat.

$\zeta(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}, \ldots, \mathbf{n_k})$

Euler en una carta a Goldbach:

$$\zeta(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \sum_{a_1 > \cdots > a_k > 0} \frac{1}{a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k}}.$$

on $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

Ben definida (o sigui convergent) per $n_1 > 1$, $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$k \geq 1$ la profunditat.

$n := n_1 + \cdots + n_k$ el pes.

$\zeta(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}, \ldots, \mathbf{n_k})$: Euler

Si $k = 2$ i $n = n_1 + n_2$ és senar, aleshores $\zeta(n_1, n_2)$ és una combinació lineal amb coeficients racionals de $\zeta(n_1 + n_2)$ i de $\zeta(n_1 + n_2 - i)\zeta(i)$, variant i.

$\zeta(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}, \ldots, \mathbf{n_k})$: Euler

Si $k = 2$ i $n = n_1 + n_2$ és senar, aleshores $\zeta(n_1, n_2)$ és una combinació lineal amb coeficients racionals de $\zeta(n_1 + n_2)$ i de $\zeta(n_1 + n_2 - i)\zeta(i)$, variant i.

$$2\zeta(m, 1) = m\zeta(n+1) - \sum_{i=1}^{m-2} \zeta(n-i)\zeta(i+1)$$

$\zeta(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}, \ldots, \mathbf{n_k})$: Euler

Si $k = 2$ i $n = n_1 + n_2$ és senar, aleshores $\zeta(n_1, n_2)$ és una combinació lineal amb coeficients racionals de $\zeta(n_1 + n_2)$ i de $\zeta(n_1 + n_2 - i)\zeta(i)$, variant i.

$$2\zeta(m, 1) = m\zeta(n+1) - \sum_{i=1}^{m-2} \zeta(n-i)\zeta(i+1)$$

$$\zeta(n) = \sum_{n_1+n_2=n} \zeta(n_1, n_2)$$

$\zeta(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}, \ldots, \mathbf{n_k})$: Euler

Si $k = 2$ i $n = n_1 + n_2$ és senar, aleshores $\zeta(n_1, n_2)$ és una combinació lineal amb coeficients racionals de $\zeta(n_1 + n_2)$ i de $\zeta(n_1 + n_2 - i)\zeta(i)$, variant i.

$$2\zeta(m, 1) = m\zeta(n+1) - \sum_{i=1}^{m-2} \zeta(n-i)\zeta(i+1)$$

$$\zeta(n) = \sum_{n_1+n_2=n} \zeta(n_1, n_2)$$

$$\zeta(3) = \zeta(2, 1)$$

$\zeta(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}, \ldots, \mathbf{n_k})$: Zagier

$\sim$ 1988 Drinfeld “retroba” aquests valors com a coeficients del seu "associador".

$\zeta(\mathbf{n_1, n_2, \ldots, n_k})$: Zagier

$\sim$ 1988 Drinfeld “retroba” aquests valors com a coeficients del seu "associador".

$\sim$ 1990 Zagier els “redescobreix” i estudia les relacions entre ells.

$\zeta(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}, \ldots, \mathbf{n_k})$: Zagier

$\sim$ 1988 Drinfeld “retroba” aquests valors com a coeficients del seu "associador".

$\sim$ 1990 Zagier els “redescobreix” i estudia les relacions entre ells.

Definim

$$\mathcal{Z} := \langle \zeta(n_1, n_2, \ldots, n_k) \mid n_1 > 1, n_i \geq 1 \forall i = 1, \ldots, k, \forall k \geq 1 \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$$

$\zeta(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}, \ldots, \mathbf{n_k})$: Zagier

$\sim$ 1988 Drinfeld “retroba” aquests valors com a coeficients del seu "associador".

$\sim$ 1990 Zagier els “redescobreix” i estudia les relacions entre ells.

Definim

$$\mathcal{Z} := \langle \zeta(n_1, n_2, \ldots, n_k) \mid n_1 > 1, n_i \geq 1 \forall i = 1, \ldots, k, \forall k \geq 1 \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$$

Punt Clau: $\mathcal{Z}$ és un sub-anell commutatiu (de $\mathbb{R}$). Definim també

$$\mathcal{Z}_n := \langle \zeta(n_1, n_2, \ldots, n_k) \mid n_1 + \cdots + n_k = n \; \forall k \geq 1 \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$$

$\mathcal{Z}$ anell commutatiu

Fet clau: Existencia del “producte harmònic”

$$\zeta(n_1, \ldots, n_k) \cdot \zeta(m_1, \ldots, m_{k'}) =$$

$$= \sum \text{multizetetes de pes } n_1 + \cdots + n_k + m_1 + \cdots + m_{k'}$$

$\mathcal{Z}$ anell commutatiu

Fet clau: Existencia del “producte harmònic”

$$\zeta(n_1,\ldots,n_k)\cdot\zeta(m_1,\ldots,m_{k'}) =$$

$$= \sum \text{multizetes de pes } n_1+\cdots+n_k+m_1+\cdots+m_{k'}$$

Exemple:

$$\zeta(n)\cdot\zeta(m) = \zeta(n,m)+\zeta(m,n)+\zeta(n+m)$$

$\mathcal{Z}$ anell commutatiu

Fet clau: Existencia del “producte harmònic”

$$\zeta(n_1,\ldots,n_k)\cdot\zeta(m_1,\ldots,m_{k'})=$$

$$=\sum \text{multizetes de pes } n_1+\cdots+n_k+m_1+\cdots+m_{k'}$$

Exemple:

$$\zeta(n)\cdot\zeta(m)=\zeta(n,m)+\zeta(m,n)+\zeta(n+m)$$

S’obté simplement reordenant la serie:

$$\sum_{0<a,b}\frac{1}{a^nb^m}=\left(\sum_{0<a<b}+\sum_{0<b<a}+\sum_{0<a=b}\right)\frac{1}{a^nb^m}$$

Exemples

$$\zeta(n)^2 = 2\zeta(n,n) + \zeta(2n)$$

Exemples

$$\zeta(n)^2 = 2\zeta(n,n) + \zeta(2n)$$

Per $n = 2$ tenim:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \ \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

Exemples

$$\zeta(n)^2 = 2\zeta(n,n) + \zeta(2n)$$

Per $n = 2$ tenim:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},\ \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

Per tant

$$\zeta(2,2) = \sum_{m>n\geq 1} \frac{1}{(mn)^2} = \frac{\pi^4}{120}$$

Exemples

$$\zeta(n)^2 = 2\zeta(n,n) + \zeta(2n)$$

Per $n = 2$ tenim:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \ \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

Per tant

$$\zeta(2,2) = \sum_{m>n\geq 1} \frac{1}{(mn)^2} = \frac{\pi^4}{120}$$

Un altre exemple:

$$\zeta(2)\cdot\zeta(3) = \zeta(2,3) + \zeta(3,2) + \zeta(5)$$

$\mathcal{Z}$ anell commutatiu

Fet clau 2:

$$\zeta(n_1, \ldots, n_k) \cdot \zeta(m_1, \ldots, m_{k'}) =$$

$= \sum$ multiples racionals de multizetes de pes $n_1 + \cdots + m_{k'}$

de dues maneres diferents!

$\mathcal{Z}$ anell commutatiu

Fet clau 2:

$$\zeta(n_1, \ldots, n_k) \cdot \zeta(m_1, \ldots, m_{k'}) =$$

$= \sum$ multiples racionals de multizetes de pes $n_1 + \cdots + m_{k'}$

de dues maneres diferents!
Exemple:

$$\zeta(2) \cdot \zeta(3) = \zeta(2,3) + \zeta(3,2) + \zeta(5)$$

$\mathcal{Z}$ anell commutatiu

Fet clau 2:

$$\zeta(n_1, \ldots, n_k) \cdot \zeta(m_1, \ldots, m_{k'}) =$$

$= \sum$ multiples racionals de multizetes de pes $n_1 + \cdots + m_{k'}$

de dues maneres diferents!
Exemple:

$$\zeta(2) \cdot \zeta(3) = \zeta(2,3) + \zeta(3,2) + \zeta(5)$$

$$\zeta(2) \cdot \zeta(3) = \zeta(2,3) + 3\zeta(3,2) + 6\zeta(4,1)$$

$\mathcal{Z}$ anell commutatiu

Fet clau 2:

$$\zeta(n_1, \ldots, n_k) \cdot \zeta(m_1, \ldots, m_{k'}) =$$

$= \sum$ multiples racionals de multizetes de pes $n_1 + \cdots + m_{k'}$

de dues maneres diferents!
Exemple:

$$\zeta(2) \cdot \zeta(3) = \zeta(2,3) + \zeta(3,2) + \zeta(5)$$

$$\zeta(2) \cdot \zeta(3) = \zeta(2,3) + 3\zeta(3,2) + 6\zeta(4,1)$$

Aquest segon s'anomena producte "shuffle" o escartejat.
Obtenim

$$\zeta(5) = 2\zeta(3,2) + 6\zeta(4,1)$$

Representació integral

Drinfeld-Konsevich: Si $n = n_1 + \cdots + n_k$

$$\zeta(n_1, \ldots, n_k) =$$

$$= \int_{\Delta_n} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \cdots \frac{dt_{n_1}}{1 - t_{n_1}} \cdots \frac{dt_{n-n_k+1}}{t_{n-n_k+1}} \frac{dt_{n-n_k+2}}{t_{n-n_k+2}} \cdots \frac{dt_n}{1 - t_n}$$

on

$$\Delta_n = \{(t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R} \mid 1 > t_1 > \cdots > t_n > 0\}$$

Representació integral

Drinfeld-Konsevich: Si $n = n_1 + \cdots + n_k$

$$\zeta(n_1, \ldots, n_k) =$$

$$= \int_{\Delta_n} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \cdots \frac{dt_{n_1}}{1 - t_{n_1}} \cdots \frac{dt_{n-n_k+1}}{t_{n-n_k+1}} \frac{dt_{n-n_k+2}}{t_{n-n_k+2}} \cdots \frac{dt_n}{1 - t_n}$$

on

$$\Delta_n = \{(t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R} \mid 1 > t_1 > \cdots > t_n > 0\}$$

Exemple (Leibniz?):

$$\zeta(3) = \int_{1>t_1>t_2>t_3>0} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_3}{1 - t_3}$$

Notacions

- Denotem per $\mathfrak{H} := \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$ l'àlgebra de polinomis no commutatius en dues variables x i y.

Notacions

- Denotem per $\mathfrak{H} := \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$ l'àlgebra de polinomis no commutatius en dues variables x i y.
- Denotem per $\mathfrak{H}^1 := \mathbb{Q} + \mathfrak{H}y$, la subalgebra generada per les paraules "acabades en y".

Notacions

- Denotem per $\mathfrak{H} := \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$ l'àlgebra de polinomis no commutatius en dues variables x i y.
- Denotem per $\mathfrak{H}^1 := \mathbb{Q} + \mathfrak{H}y$, la subalgebra generada per les paraules "acabades en y".
- Denotem per $\mathfrak{H}^0 := \mathbb{Q} + x\mathfrak{H}y$, la subalgebra generada per les paraules "començades amb x i acabades en y".

Notacions

- Denotem per $\mathfrak{H} := \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$ l'àlgebra de polinomis no commutatius en dues variables x i y.
- Denotem per $\mathfrak{H}^1 := \mathbb{Q} + \mathfrak{H}y$, la subalgebra generada per les paraules "acabades en y".
- Denotem per $\mathfrak{H}^0 := \mathbb{Q} + x\mathfrak{H}y$, la subalgebra generada per les paraules "començades amb x i acabades en y".
- Denotem per $\omega_x(t) = dt/t$ i per $\omega_y(t) = dt/(1-t)$.

Notacions

- Denotem per $\mathfrak{H} := \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$ l'àlgebra de polinomis no commutatius en dues variables x i y.
- Denotem per $\mathfrak{H}^1 := \mathbb{Q} + \mathfrak{H}y$, la subalgebra generada per les paraules "acabades en y".
- Denotem per $\mathfrak{H}^0 := \mathbb{Q} + x\mathfrak{H}y$, la subalgebra generada per les paraules "començades amb x i acabades en y".
- Denotem per $\omega_x(t) = dt/t$ i per $\omega_y(t) = dt/(1-t)$.
- Denotem per $Z : \mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}$ l'únic morfisme $\mathbb{Q}$-lineal amb $Z(1) = 1$ que assigna a cada paraula $u_1 u_2 \cdots u_k$ (on $u_i = x$ o y), la integral múltiple

$$Z(u_1 u_2 \cdots u_k) := \int_{\Delta_n} \omega_{u_1} \omega_{u_2} \cdots \omega_{u_k}$$

Notacions

Associem a cada $n_i \in \mathbb{N}$ el monomi no commutatiu $z_{n_i} = x^{n_i - 1} y$, i a $\underline{n} = (n_1, \cdots, n_k)$ la paraula

$$z_{\underline{n}} := z_{n_1} \dots z_{n_k} = x^{n_1 - 1} y x^{n_2 - 1} y \cdots x^{n_k - 1} y.$$

Notacions

Associem a cada $n_i \in \mathbb{N}$ el monomi no commutatiu $z_{n_i} = x^{n_i-1}y$, i a $\underline{n} = (n_1, \cdots, n_k)$ la paraula

$$z_{\underline{n}} := z_{n_1} \ldots z_{n_k} = x^{n_1-1}yx^{n_2-1}y \cdots x^{n_k-1}y.$$

Tenim aleshores que el teorema de Drinfeld ens diu

$$Z(z_{\underline{n}}) = Z(x^{n_1-1}yx^{n_2-1}y \cdots x^{n_k-1}y) = \zeta(n_1, \cdots, n_k).$$

Notacions

Associem a cada $n_i \in \mathbb{N}$ el monomi no commutatiu $z_{n_i} = x^{n_i - 1}y$, i a $\underline{n} = (n_1, \cdots, n_k)$ la paraula

$$z_{\underline{n}} := z_{n_1} \ldots z_{n_k} = x^{n_1-1}yx^{n_2-1}y \cdots x^{n_k-1}y.$$

Tenim aleshores que el teorema de Drinfeld ens diu

$$Z(z_{\underline{n}}) = Z(x^{n_1-1}yx^{n_2-1}y \cdots x^{n_k-1}y) = \zeta(n_1, \cdots, n_k).$$

Així z_k correspon al valor de la funció zeta de Riemman $\zeta(k)$.
Observeu que $z_k = x^{k-1}y$, $k = 1, 2, 3, \cdots$ generen lliurement a $\mathfrak{H}^1$, però amb $k = 2, 3, \cdots$ no generen $\mathfrak{H}^0$.

Producte Escartejat

El producte escartejat (o shuffle) que hem mencionat abans és fàcil de definir en paraules.

Producte Escartejat

El producte escartejat (o shuffle) que hem mencionat abans és fàcil de definir en paraules.
Un escartejament de dues paraules és una paraula obtinguda posant les lletres de cadascuna de les paraules mantenint l'ordre intern de cada paraula.

Producte Escartejat

El producte escartejat (o shuffle) que hem mencionat abans és fàcil de definir en paraules.
Un escartejament de dues paraules és una paraula obtinguda posant les lletres de cadascuna de les paraules mantenint l'ordre intern de cada paraula.
Per exemple, els escartejaments de ab i cd són

$$abcd\ ,\ acbd\ ,\ acdb\ ,\ cabd\ ,\ cadb\ ,\ cdab.$$

Producte Escartejat

El producte escartejat (o shuffle) que hem mencionat abans és fàcil de definir en paraules.
Un escartejament de dues paraules és una paraula obtinguda posant les lletres de cadascuna de les paraules mantenint l'ordre intern de cada paraula.
Per exemple, els escartejaments de ab i cd són

$$abcd\ ,\ acbd\ ,\ acdb\ ,\ cabd\ ,\ cadb\ ,\ cdab.$$

Si w_1 i w_2 són dues paraules qualsevol de $\mathfrak{H}$, definim el producte escartejat

$$w_1 ш w_2 = \sum \text{tots els escartejaments de } w_1 \text{ i } w_2.$$

Producte Escartejat (Exemple)

$$\zeta(2) \cdot \zeta(3) = \zeta(2,3) + 3\zeta(3,2) + 6\zeta(4,1)$$

Producte Escartejat (Exemple)

$$\zeta(2) \cdot \zeta(3) = \zeta(2,3) + 3\zeta(3,2) + 6\zeta(4,1)$$

$xy ш x^2y$?

Producte Escartejat (Exemple)

$$\zeta(2)\cdot\zeta(3)=\zeta(2,3)+3\zeta(3,2)+6\zeta(4,1)$$

$xy \,ш\, x^2y$?

Escartejaments

$$xyx^2y,\, xxyxy,\, xx^2yy,\, xx^2yy,\, xxyxy,$$

$$xxxyy,\, xxxyy,\, x^2xyy,\, x^2xyy,\, x^2yxy,$$

Producte Escartejat (Exemple)

$$\zeta(2)\cdot\zeta(3) = \zeta(2,3) + 3\zeta(3,2) + 6\zeta(4,1)$$

$xy ⧢ x^2y$?

Escartejaments

$$xyx^2y,\ xxyxy,\ xx^2yy,\ xx^2yy,\ xxyxy,$$

$$xxxyy,\ xxxyy,\ x^2xyy,\ x^2xyy,\ x^2yxy,$$

$$xy ⧢ x^2y = xyx^2y + 3x^2yxy + 6x^3y^2.$$

Producte Escartejat (Propietats)

$\mathfrak{H}$ esdevé un anell commutatiu amb aquest producte, una $\mathbb{Q}$-àlgebra.

Producte Escartejat (Propietats)

$\mathfrak{H}$ esdevé un anell commutatiu amb aquest producte, una $\mathbb{Q}$-àlgebra.

$\mathfrak{H}^1$ i $\mathfrak{H}^0$ són subanells, sub-$\mathbb{Q}$-àlgebres.

Producte Escartejat (Propietats)

$\mathfrak{H}$ esdevé un anell commutatiu amb aquest producte, una $\mathbb{Q}$-àlgebra.

$\mathfrak{H}^1$ i $\mathfrak{H}^0$ són subanells, sub-$\mathbb{Q}$-àlgebres.
Z és un morfisme d'anells, o sigui

$$Z(w_1 \sqcup\!\sqcup\, w_2) = Z(w_1)Z(w_2).$$

Producte Escartejat (Propietats)

$\mathfrak{H}$ esdevé un anell commutatiu amb aquest producte, una $\mathbb{Q}$-àlgebra.

$\mathfrak{H}^1$ i $\mathfrak{H}^0$ són subanells, sub-$\mathbb{Q}$-àlgebres.
Z és un morfisme d'anells, o sigui

$$Z(w_1 \mathbin{ш} w_2) = Z(w_1)Z(w_2).$$

És una conseqüència "formal" de la definició, no depèn de com em definit ω_x i ω_y, només de si convergeix la integral.

Producte harmònic revisitat.

A $\mathfrak{H}^1$ podem definir el producte harmònic inductivament per

$$1 * w = w * 1 = w$$

$$z_k w_1 * z_l w_2 := z_k(w_1 * z_l w_2) + z_l(z_k w_1 * w_2) + z_{k+l}(w_1 * w_2)$$

per a totes $k, l \geq 1$, i per a totes les paraules $w, w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$, i estenent-lo per $\mathbb{Q}$-bilinearitat.

Producte harmònic revisitat.

A $\mathfrak{H}^1$ podem definir el producte harmònic inductivament per

$$1 * w = w * 1 = w$$

$$z_k w_1 * z_l w_2 := z_k(w_1 * z_l w_2) + z_l(z_k w_1 * w_2) + z_{k+l}(w_1 * w_2)$$

per a totes $k, l \geq 1$, i per a totes les paraules $w, w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$, i estenent-lo per $\mathbb{Q}$-bilinearitat.

$\mathfrak{H}^1$ és una àlgebra commutativa, i $\mathfrak{H}^0$ és una subàlgebra.

Producte harmònic revisitat.

A $\mathfrak{H}^1$ podem definir el producte harmònic inductivament per

$$1 * w = w * 1 = w$$

$$z_k w_1 * z_l w_2 := z_k(w_1 * z_l w_2) + z_l(z_k w_1 * w_2) + z_{k+l}(w_1 * w_2)$$

per a totes $k, l \geq 1$, i per a totes les paraules $w, w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$, i estenent-lo per $\mathbb{Q}$-bilinearitat.

$\mathfrak{H}^1$ és una àlgebra commutativa, i $\mathfrak{H}^0$ és una subàlgebra.

Z és un morfisme d'anells també per $*$, o sigui

$$Z(w_1 * w_2) = Z(w_1)Z(w_2).$$

Producte harmònic revisitat.

A $\mathfrak{H}^1$ podem definir el producte harmònic inductivament per

$$1 * w = w * 1 = w$$

$$z_k w_1 * z_l w_2 := z_k(w_1 * z_l w_2) + z_l(z_k w_1 * w_2) + z_{k+l}(w_1 * w_2)$$

per a totes $k, l \geq 1$, i per a totes les paraules $w, w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$, i estenent-lo per $\mathbb{Q}$-bilinearitat.
$\mathfrak{H}^1$ és una àlgebra commutativa, i $\mathfrak{H}^0$ és una subàlgebra.
Z és un morfisme d'anells també per $*$, o sigui

$$Z(w_1 * w_2) = Z(w_1)Z(w_2).$$

Per exemple, tenim

$$z_k * z_l = z_k z_l + z_l z_k + z_{k+l}.$$

Relacions dobles shuffle "finites"

Donades dues paraules w_1 i w_2 de $\mathfrak{H}^0$, tenim per tant que

$$Z(w_1 \sqcup\!\sqcup\, w_2) = Z(w_1 * w_2).$$

Relacions dobles shuffle "finites"

Donades dues paraules w_1 i w_2 de $\mathfrak{H}^0$, tenim per tant que

$$Z(w_1 \sqcup\!\sqcup w_2) = Z(w_1 * w_2).$$

El primer exemple és

$$4\zeta(3,1) + 2\zeta(2,2) = 2\zeta(2,2) + \zeta(4) \ \ (= \zeta(2)^2).$$

d'on tenim que $4\zeta(3,1) = \zeta(4)$.

Relacions dobles shuffle "finites"

Donades dues paraules w_1 i w_2 de $\mathfrak{H}^0$, tenim per tant que

$$Z(w_1 \sqcup\!\sqcup\, w_2) = Z(w_1 * w_2).$$

El primer exemple és

$$4\zeta(3,1) + 2\zeta(2,2) = 2\zeta(2,2) + \zeta(4) \ \ (= \zeta(2)^2).$$

d'on tenim que $4\zeta(3,1) = \zeta(4)$.

Observació important: Hi ha més relacions que aquestes.

Relacions dobles shuffle "finites"

Donades dues paraules w_1 i w_2 de $\mathfrak{H}^0$, tenim per tant que

$$Z(w_1 \sqcup\!\sqcup\, w_2) = Z(w_1 * w_2).$$

El primer exemple és

$$4\zeta(3,1) + 2\zeta(2,2) = 2\zeta(2,2) + \zeta(4) \ \ (= \zeta(2)^2).$$

d'on tenim que $4\zeta(3,1) = \zeta(4)$.

Observació important: Hi ha més relacions que aquestes.
Exemples:

$$\zeta(2,1) = \zeta(3)$$

$$4\zeta(2,2) = 3\zeta(4)$$

Relacions dobles shuffle generals: cas 1

Podem obtenir més relacions considerant elements de $\mathfrak{H}^1$, que corresponen a sumes divergents.

Relacions dobles shuffle generals: cas 1

Podem obtenir més relacions considerant elements de $\mathfrak{H}^1$, que corresponen a sumes divergents.

Observació: Si $w \in \mathfrak{H}^0$, aleshores

$$y * w = yw + w' \text{ amb } w' \in \mathfrak{H}^0$$

Relacions dobles shuffle generals: cas 1

Podem obtenir més relacions considerant elements de $\mathfrak{H}^1$, que corresponen a sumes divergents.

Observació: Si $w \in \mathfrak{H}^0$, aleshores

$$y * w = yw + w' \text{ amb } w' \in \mathfrak{H}^0$$

Observació: Si $w \in \mathfrak{H}^0$, aleshores

$$y \sqcup\!\sqcup w = yw + w'' \text{ amb } w'' \in \mathfrak{H}^0$$

Relacions dobles shuffle generals: cas 1

Podem obtenir més relacions considerant elements de $\mathfrak{H}^1$, que corresponen a sumes divergents.

Observació: Si $w \in \mathfrak{H}^0$, aleshores

$$y * w = yw + w' \text{ amb } w' \in \mathfrak{H}^0$$

Observació: Si $w \in \mathfrak{H}^0$, aleshores

$$y \sqcup\!\sqcup\, w = yw + w'' \text{ amb } w'' \in \mathfrak{H}^0$$

Conseqüència

$$\forall w \in \mathfrak{H}^0, \; y \sqcup\!\sqcup\, w - y * w \in \mathfrak{H}^0$$

Relacions dobles shuffle generals: cas 1

Teorema (Zagier?)

$$\forall w \in \mathfrak{H}^0, Z(y ш w - y * w) = 0.$$

Relacions dobles shuffle generals: cas 1

Teorema (Zagier?)

$$\forall w \in \mathfrak{H}^0, Z(y \sqcup\!\sqcup\, w - y * w) = 0.$$

Conseqüència: Tenim més relacions entre els valors zeta múltiples.

Relacions dobles shuffle generals: cas 1

Teorema (Zagier?)

$$\forall w \in \mathfrak{H}^0, Z(y \sqcup\!\sqcup\, w - y * w) = 0.$$

Conseqüència: Tenim més relacions entre els valors zeta múltiples.

Conjectura forta: Aquestes relacions

$$\forall w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^0, Z(w_1 \sqcup\!\sqcup\, w_2 - w_1 * w_2) = 0,$$

$$\forall w \in \mathfrak{H}^0, Z(y \sqcup\!\sqcup\, w - y * w) = 0,$$

generen totes les relacions sobre $\mathbb{Q}$ que hi ha.

Exemple 1

Prenem $w = xy$ al Teorema anterior.

Exemple 1

Prenem $w = xy$ al Teorema anterior.

$$y \sqcup\!\sqcup\, xy = yxy + 2xy^2$$

Exemple 1

Prenem $w = xy$ al Teorema anterior.

$$y \sqcup\!\sqcup\, xy = yxy + 2xy^2$$

$$y * xy = z_1 * z_2 = z_1 z_2 + z_2 z_1 + z_3 = yxy + xy^2 + x^2 y$$

Exemple 1

Prenem $w = xy$ al Teorema anterior.

$$y ⧢ xy = yxy + 2xy^2$$

$$y * xy = z_1 * z_2 = z_1 z_2 + z_2 z_1 + z_3 = yxy + xy^2 + x^2 y$$

$$y ⧢ xy - y * xy = xy^2 - x^2 y$$

Exemple 1

Prenem $w = xy$ al Teorema anterior.

$$y ш xy = yxy + 2xy^2$$

$$y * xy = z_1 * z_2 = z_1 z_2 + z_2 z_1 + z_3 = yxy + xy^2 + x^2 y$$

$$y ш xy - y * xy = xy^2 - x^2 y$$

Conseqüència

$$\zeta(2,1) = \zeta(3)$$

Exemple 2

Prenem $w = x^2y$ al Teorema anterior.

Exemple 2

Prenem $w = x^2y$ al Teorema anterior.

$$y \sqcup\!\sqcup\, x^2y = yx^2y + xyxy + 2x^2y^2$$

Exemple 2

Prenem $w = x^2y$ al Teorema anterior.

$$y \,ш\, x^2y = yx^2y + xyxy + 2x^2y^2$$

$$y * x^2y = z_1 * z_3 = z_1z_3 + z_3z_1 + z_4 = yx^2y + x^2y^2 + x^3y$$

Exemple 2

Prenem $w = x^2y$ al Teorema anterior.

$$y \sqcup\!\sqcup x^2y = yx^2y + xyxy + 2x^2y^2$$

$$y * x^2y = z_1 * z_3 = z_1z_3 + z_3z_1 + z_4 = yx^2y + x^2y^2 + x^3y$$

$$y \sqcup\!\sqcup x^2y - y * x^2y = xyxy + x^2y^2 - x^3y$$

Exemple 2

Prenem $w = x^2y$ al Teorema anterior.

$$y \text{ ш } x^2y = yx^2y + xyxy + 2x^2y^2$$

$$y * x^2y = z_1 * z_3 = z_1z_3 + z_3z_1 + z_4 = yx^2y + x^2y^2 + x^3y$$

$$y \text{ ш } x^2y - y * x^2y = xyxy + x^2y^2 - x^3y$$

Conseqüència

$$\zeta(2,2) + \zeta(3,1) = \zeta(4)$$

Exemple 3

Prenem $w = xy^2$ al Teorema anterior.

Exemple 3

Prenem $w = xy^2$ al Teorema anterior.

Conseqüència

$$\zeta(2,2) + \zeta(3,1) = \zeta(2,1,1)$$

Exemple 3

Prenem $w = xy^2$ al Teorema anterior.

Conseqüència

$$\zeta(2,2) + \zeta(3,1) = \zeta(2,1,1)$$

Conseqüència
La dimensió sobre $\mathbb{Q}$ del espai vectorial $\mathcal{Z}_n$ generat pels valors multizetes de pes n és 1 per a pesos $n = 2, 3, 4$, i estan generades per $\zeta(n)$.

Estructura de $\mathfrak{H}^1$ amb $\sqcup\!\sqcup$

Teorema (Reutenauer 1993) $\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}^{T} : \mathfrak{H}^1_{\sqcup\!\sqcup} \cong \mathfrak{H}^0_{\sqcup\!\sqcup}[T]$ com a $\mathbb{Q}$-àlgebres, enviant y a T i $\mathfrak{H}^0$ a ell mateix.

Estructura de $\mathfrak{H}^1$ amb ш

Teorema (Reutenauer 1993) $\mathrm{reg}^T_ш : \mathfrak{H}^1_ш \cong \mathfrak{H}^0_ш[T]$ com a $\mathbb{Q}$-àlgebres, enviant y a T i $\mathfrak{H}^0$ a ell mateix.

I.e.

1. $\forall w \in \mathfrak{H}^1,\ \exists n \geq 0$ tal que $\forall i = 0, \ldots, n\ \exists w_i \in \mathfrak{H}^0$ tal que

$$w = \sum_{i=0}^{n} w_i ш y^{ш i}.$$

Estructura de $\mathfrak{H}^1$ amb ш

Teorema (Reutenauer 1993) $\mathrm{reg}_{ш}^{T} : \mathfrak{H}^1_{ш} \cong \mathfrak{H}^0_{ш}[T]$ com a $\mathbb{Q}$-àlgebres, enviant y a T i $\mathfrak{H}^0$ a ell mateix.

I.e.

1. $\forall w \in \mathfrak{H}^1,\ \exists n \geq 0$ tal que $\forall i = 0, \ldots, n\ \exists w_i \in \mathfrak{H}^0$ tal que

$$w = \sum_{i=0}^{n} w_i \;ш\; y^{\,ш\, i}.$$

2. És morfisme d'anells, o sigui

$$\left(\sum_{i=0}^{n} w_i \;ш\; y^{\,ш\, i}\right)\left(\sum_{j=0}^{m} u_j \;ш\; y^{\,ш\, j}\right) = \sum_{k=0}^{n+m} v_k \;ш\; y^{\,ш\, k}$$

on $v_k = \sum_{i+j=k} w_i \;ш\; u_j$.

Estructura de $\mathfrak{H}^1$ amb $ш$

Teorema (Reutenauer 1993) $\mathrm{reg}^T_{ш} : \mathfrak{H}^1_{ш} \cong \mathfrak{H}^0_{ш}[T]$ com a $\mathbb{Q}$-àlgebres, enviant y a T i $\mathfrak{H}^0$ a ell mateix.

I.e.

1. $\forall w \in \mathfrak{H}^1,\ \exists n \geq 0$ tal que $\forall i = 0, \ldots, n\ \exists w_i \in \mathfrak{H}^0$ tal que

$$w = \sum_{i=0}^{n} w_i \, ш \, y^{\, ш \, i}.$$

2. És morfisme d'anells, o sigui

$$\left(\sum_{i=0}^{n} w_i \, ш \, y^{\, ш \, i}\right)\left(\sum_{j=0}^{m} u_j \, ш \, y^{\, ш \, j}\right) = \sum_{k=0}^{n+m} v_k \, ш \, y^{\, ш \, k}$$

on $v_k = \sum_{i+j=k} w_i \, ш \, u_j$.

Observació: $y^{\, ш \, n} = ?????$.

Estructura de $\mathfrak{H}^1$ amb ш

Teorema (Reutenauer 1993) $\mathrm{reg}^T_{ш} : \mathfrak{H}^1_{ш} \cong \mathfrak{H}^0_{ш}[T]$ com a $\mathbb{Q}$-àlgebres, enviant y a T i $\mathfrak{H}^0$ a ell mateix.

I.e.

1. $\forall w \in \mathfrak{H}^1,\ \exists n \geq 0$ tal que $\forall i = 0, \ldots, n\ \exists w_i \in \mathfrak{H}^0$ tal que

$$w = \sum_{i=0}^{n} w_i \,ш\, y^{ш i}.$$

2. És morfisme d'anells, o sigui

$$\Big(\sum_{i=0}^{n} w_i \,ш\, y^{ш i}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{m} u_j \,ш\, y^{ш j}\Big) = \sum_{k=0}^{n+m} v_k \,ш\, y^{ш k}$$

on $v_k = \sum_{i+j=k} w_i \,ш\, u_j$.

Observació: $y^{ш n} = n! y^n$.

Estructura de $\mathfrak{H}^1$ amb $*$

Teorema (Hoffman 1997) $\mathrm{reg}_*^T : \mathfrak{H}_*^1 \cong \mathfrak{H}_*^0[T]$ com a $\mathbb{Q}$-àlgebres, enviant y a T i $\mathfrak{H}^0$ a ell mateix.

Estructura de $\mathfrak{H}^1$ amb $*$

Teorema (Hoffman 1997) $\mathrm{reg}_*^T : \mathfrak{H}_*^1 \cong \mathfrak{H}_*^0[T]$ com a $\mathbb{Q}$-àlgebres, enviant y a T i $\mathfrak{H}^0$ a ell mateix.

Exercici: $y^{*2} = 2y^2 + xy$, $y^{*3} = 6y^3 + 3yxy + 3xy^2 + x^2y$.

Estructura de $\mathfrak{H}^1$ amb $*$

Teorema (Hoffman 1997) $\mathrm{reg}_*^T : \mathfrak{H}_*^1 \cong \mathfrak{H}_*^0[T]$ com a $\mathbb{Q}$-àlgebres, enviant y a T i $\mathfrak{H}^0$ a ell mateix.

Exercici: $y^{*2} = 2y^2 + xy$, $y^{*3} = 6y^3 + 3yxy + 3xy^2 + x^2y$.

Conseqüència: Existeixen dos morfismes d'anells

$$Z^{\text{ш}} : \mathfrak{H}_{\text{ш}}^1 \to \mathbb{R}[T]$$

$$Z^* : \mathfrak{H}_*^1 \to \mathbb{R}[T]$$

tals que envien y a T i estenen el morfisme Z de $\mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}$.

Relacions dobles shuffle generals

Teorema(Zagier)

$$Z^{ш}(w) = Z^{*}(w)$$

si $w = yw'$ amb $w? \in \mathfrak{H}^0$.

Relacions dobles shuffle generals

Teorema(Zagier)

$$Z^{ш}(w) = Z^*(w)$$

si $w = yw'$ amb $w? \in \mathfrak{H}^0$.

Potser

$$Z^{ш}(w) = Z^*(w) \forall w \in \mathfrak{H}^1?$$

Relacions dobles shuffle generals

Teorema(Zagier)

$$Z^{ш}(w) = Z^*(w)$$

si $w = yw'$ amb $w? \in \mathfrak{H}^0$.

Potser

$$Z^{ш}(w) = Z^*(w) \forall w \in \mathfrak{H}^1?$$

NO.

Relacions dobles shuffle generals

Teorema(Zagier)

$$Z^{ш}(w) = Z^{*}(w)$$

si $w = yw'$ amb $w? \in \mathfrak{H}^0$.

Potser

$$Z^{ш}(w) = Z^{*}(w) \forall w \in \mathfrak{H}^1?$$

NO.

Exemple.

$$y^{*2} = 2y^2 + xy \Rightarrow Z^{*}(y^2) = \frac{T^2}{2} - \frac{\zeta(2)}{2}$$

Relacions dobles shuffle generals

Teorema(Zagier)

$$Z^{ш}(w) = Z^{*}(w)$$

si $w = yw'$ amb $w? \in \mathfrak{H}^0$.

Potser

$$Z^{ш}(w) = Z^{*}(w) \forall w \in \mathfrak{H}^1?$$

NO.

Exemple.

$$y^{*2} = 2y^2 + xy \Rightarrow Z^{*}(y^2) = \frac{T^2}{2} - \frac{\zeta(2)}{2}$$

$$y^{ш 2} = 2y^2 \Rightarrow Z^{ш}(y^2) = \frac{T^2}{2}$$

Notacions

Definició Considerem

$$A(u) := \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\zeta(n)u^n\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k u^k \in \mathbb{R}[[T]]$$

Notacions

Definició Considerem

$$A(u) := \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\zeta(n)u^n\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k u^k \in \mathbb{R}[[T]]$$

$A(u) = e^{\gamma u}\Gamma(1+u)$ per $|u| < 1$ i γ constant d'Euler

Notacions

Definició Considerem

$$A(u) := \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\zeta(n)u^n\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k u^k \in \mathbb{R}[[T]]$$

$A(u) = e^{\gamma u}\Gamma(1+u)$ per $|u| < 1$ i γ constant d'Euler

Tenim $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \frac{\zeta(2)}{2}$, $\gamma_3 = -\frac{\zeta(3)}{3}$, $\gamma_4 = \frac{\zeta(4)}{4} + \frac{\zeta(2)^2}{8}$,...

Notacions

Definició Considerem

$$A(u) := \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n) u^n\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k u^k \in \mathbb{R}[[T]]$$

$A(u) = e^{\gamma u}\Gamma(1+u)$ per $|u| < 1$ i γ constant d'Euler

Tenim $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \frac{\zeta(2)}{2}$, $\gamma_3 = -\frac{\zeta(3)}{3}$, $\gamma_4 = \frac{\zeta(4)}{4} + \frac{\zeta(2)^2}{8}$,...

Definició Considerem el morfisme $\mathbb{R}$-lineal $\rho : \mathbb{R}[T] \to \mathbb{R}[T]$ determinat per

$$\rho\left(\frac{T^n}{n!}\right) := \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \frac{T^{n-k}}{(n-k)!}$$

Notacions

Definició Considerem

$$A(u) := \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n) u^n\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k u^k \in \mathbb{R}[[T]]$$

$A(u) = e^{\gamma u}\Gamma(1+u)$ per $|u| < 1$ i γ constant d'Euler

Tenim $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \frac{\zeta(2)}{2}$, $\gamma_3 = -\frac{\zeta(3)}{3}$, $\gamma_4 = \frac{\zeta(4)}{4} + \frac{\zeta(2)^2}{8}$,...

Definició Considerem el morfisme $\mathbb{R}$-lineal $\rho : \mathbb{R}[T] \to \mathbb{R}[T]$ determinat per

$$\rho\left(\frac{T^n}{n!}\right) := \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \frac{T^{n-k}}{(n-k)!}$$ o sigui $\rho(e^{Tu}) = A(u)e^{Tu}$

Relacions dobles shuffle generals

Teorema (Ihara-Kaneko-Zagier)

$$Z^{ш}(w) = \rho(Z^*(w)).$$

Relacions dobles shuffle generals

Teorema (Ihara-Kaneko-Zagier)

$$Z^{ш}(w) = \rho(Z^*(w)).$$

Exemple

$$Z^{ш}(y^2xy) = \frac{\zeta(2)}{2}T^2 - 2\zeta(2,1)T + 3\zeta(2,1,1),$$

$$Z^*(y^2xy) = \frac{\zeta(2)}{2}T^2 - (\zeta(3)+\zeta(2,1))T + \frac{\zeta(4)}{2} + \zeta(3,1) + \zeta(2,1,1).$$

Relacions dobles shuffle generals

Teorema (Ihara-Kaneko-Zagier)

$$Z^{ш}(w) = \rho(Z^*(w)).$$

Exemple

$$Z^{ш}(y^2xy) = \frac{\zeta(2)}{2}T^2 - 2\zeta(2,1)T + 3\zeta(2,1,1),$$

$$Z^*(y^2xy) = \frac{\zeta(2)}{2}T^2 - (\zeta(3)+\zeta(2,1))T + \frac{\zeta(4)}{2} + \zeta(3,1) + \zeta(2,1,1).$$

$$\rho(T^2) = T^2 + \zeta(2)$$

Relacions dobles shuffle generals

Teorema (Ihara-Kaneko-Zagier)

$$Z^{ш}(w) = \rho(Z^*(w)).$$

Exemple

$$Z^{ш}(y^2xy) = \frac{\zeta(2)}{2}T^2 - 2\zeta(2,1)T + 3\zeta(2,1,1),$$

$$Z^*(y^2xy) = \frac{\zeta(2)}{2}T^2 - (\zeta(3)+\zeta(2,1))T + \frac{\zeta(4)}{2} + \zeta(3,1) + \zeta(2,1,1).$$

$$\rho(T^2) = T^2 + \zeta(2)$$

$$\zeta(3) = \zeta(2,1)$$

$$3\zeta(2,1,1) = \frac{\zeta(2)}{2} + \frac{\zeta(4)}{2} + \zeta(3,1) + \zeta(2,1,1)$$

Polilogaritmes

Definició El polilogaritme associat a $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ és

$$\mathrm{Li}_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)}(t) := \sum_{a_1>\cdots>a_k>0} \frac{t^{a_1}}{a_1^{n_1}\cdots a_k^{n_k}}.$$

Polilogaritmes

Definició El polilogaritme associat a $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ és

$$\mathrm{Li}_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)}(t) := \sum_{a_1 > \cdots > a_k > 0} \frac{t^{a_1}}{a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k}}.$$

Representació integral: Si $n = n_1 + \cdots + n_k$

$$\mathrm{Li}_{(n_1,\ldots,n_k)}(t) = \int \cdots \int_{t > t_1 > \cdots > t_n > 0} \omega_1(t_1)\omega_2(t_2) \cdots \omega_n(t_n)$$

$\omega_i(t) = dt/(1-t)$ si $i = n_1, n_1 + n_2, \cdots, n$, $\omega_i(t) = dt/t$ si no.

Polilogaritmes

Definició El polilogaritme associat a $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ és

$$\mathrm{Li}_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)}(t) := \sum_{a_1>\cdots>a_k>0} \frac{t^{a_1}}{a_1^{n_1}\cdots a_k^{n_k}}.$$

Representació integral: Si $n = n_1 + \cdots + n_k$

$$\mathrm{Li}_{(n_1,\ldots,n_k)}(t) = \int\cdots\int_{t>t_1>\cdots>t_n>0} \omega_1(t_1)\omega_2(t_2)\cdots\omega_n(t_n)$$

$\omega_i(t) = dt/(1-t)$ si $i = n_1, n_1+n_2, \cdots, n$, $\omega_i(t) = dt/t$ si no.
Observacions 1. $\mathrm{Li}_1(t) = \log(1/(1-t))$.

Polilogaritmes

Definició El polilogaritme associat a $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ és

$$\mathrm{Li}_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)}(t) := \sum_{a_1>\cdots>a_k>0} \frac{t^{a_1}}{a_1^{n_1}\cdots a_k^{n_k}}.$$

Representació integral: Si $n = n_1 + \cdots + n_k$

$$\mathrm{Li}_{(n_1,\ldots,n_k)}(t) = \int_{t>t_1>\cdots>t_n>0}\!\!\cdots\int \omega_1(t_1)\omega_2(t_2)\cdots\omega_n(t_n)$$

$\omega_i(t) = dt/(1-t)$ si $i = n_1, n_1+n_2, \cdots, n$, $\omega_i(t) = dt/t$ si no.
Observacions 1. $\mathrm{Li}_1(t) = \log(1/(1-t))$.
2.$\mathrm{Li}_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)}(1) = \zeta((n_1, n_2, \ldots, n_k))$ si $n_1 > 1$.

Demostració del Teorema IKZ

Definició El valor multizeta truncat

$$\zeta_M(n_1, n_2, \ldots, n_k) := \sum_{M > a_1 > \cdots > a_k > 0} \frac{1}{a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k}}.$$

Demostració del Teorema IKZ

Definició El valor multizeta truncat

$$\zeta_M(n_1, n_2, \ldots, n_k) := \sum_{M > a_1 > \cdots > a_k > 0} \frac{1}{a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k}}.$$

Producte harmònic:

$$\zeta_M(\underline{n})\zeta_M(\underline{n'}) = \sum_{\text{certes } \underline{n''}} \zeta_M(\underline{n''}).$$

Demostració del Teorema IKZ

Definició El valor multizeta truncat

$$\zeta_M(n_1, n_2, \ldots, n_k) := \sum_{M > a_1 > \cdots > a_k > 0} \frac{1}{a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k}}.$$

Producte harmònic:

$$\zeta_M(\underline{n})\zeta_M(\underline{n'}) = \sum_{\text{certes } \underline{n''}} \zeta_M(\underline{n''}).$$

Producte escartejat:

$$\mathrm{Li}\,\underline{n}(t)\,\mathrm{Li}_{\underline{n'}}(t) = \sum_{\text{certes } \underline{n''}} \mathrm{Li}_{\underline{n''}}(t).$$

Demostració del Teorema IKZ

Definició El valor multizeta truncat

$$\zeta_M(n_1, n_2, \ldots, n_k) := \sum_{M > a_1 > \cdots > a_k > 0} \frac{1}{a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k}}.$$

Producte harmònic:

$$\zeta_M(\underline{n})\zeta_M(\underline{n'}) = \sum_{\text{certes } \underline{n''}} \zeta_M(\underline{n''}).$$

Producte escartejat:

$$\mathrm{Li}\,\underline{n}(t)\,\mathrm{Li}_{\underline{n'}}(t) = \sum_{\text{certes } \underline{n''}} \mathrm{Li}_{\underline{n''}}(t).$$

Relació amb el Polilogaritme

$$\mathrm{Li}_{\underline{n}}(t) = (1-t)\sum_{M=1}^{\infty} \zeta_M(\underline{n}) t^{M-1}$$

Demostració del Teorema IKZ

Fets

$$\zeta_M(\underline{n}) = Z^*(\underline{n})(\log(M) + \gamma) + O(M^{-1}\log^J(M))$$

Demostració del Teorema IKZ

Fets

$$\zeta_M(\underline{n}) = Z^*(\underline{n})(\log(M) + \gamma) + O(M^{-1}\log^J(M))$$

$$\mathrm{Li}_{\underline{n}}(t) = Z^{ш}(\underline{n})(\log(\frac{1}{1-t})) + O((1-t)\log^J(\frac{1}{1-t}))$$

Demostració del Teorema IKZ

Fets

$$\zeta_M(\underline{n}) = Z^*(\underline{n})(\log(M) + \gamma) + O(M^{-1}\log^J(M))$$

$$\mathrm{Li}_{\underline{n}}(t) = Z^{ш}(\underline{n})(\log(\frac{1}{1-t})) + O((1-t)\log^J(\frac{1}{1-t}))$$

Lemma Si $P(T) \in \mathbb{R}[T]$ i $Q(T) = \rho(P(T))$, aleshores

$$\sum_{M=1}^{\infty} P(\log(M) + \gamma)t^{M-1} = \frac{1}{1-t}Q(\log(\frac{1}{1-t})) + O(\log^J(\frac{1}{1-t}))$$

Demostració del Teorema IKZ

Fets

$$\zeta_M(\underline{n}) = Z^*(\underline{n})(\log(M) + \gamma) + O(M^{-1}\log^J(M))$$

$$\mathrm{Li}_{\underline{n}}(t) = Z^{\sqcup\!\sqcup}(\underline{n})(\log(\frac{1}{1-t})) + O((1-t)\log^J(\frac{1}{1-t}))$$

Lemma Si $P(T) \in \mathbb{R}[T]$ i $Q(T) = \rho(P(T))$, aleshores

$$\sum_{M=1}^{\infty} P(\log(M) + \gamma)t^{M-1} = \frac{1}{1-t}Q(\log(\frac{1}{1-t})) + O(\log^J(\frac{1}{1-t}))$$

$$\mathrm{Li}_{\underline{n}}(t) = (1-t)\sum_{M=1}^{\infty} \zeta_M(\underline{n})t^{M-1}$$

Regularitzacions

Notacions

$$\mathrm{reg}_{ш}^{T} : \mathfrak{H}_{ш}^{1} \cong \mathfrak{H}_{ш}^{0}[T]$$

$$\mathrm{reg}_{ш} = \mathrm{reg}_{ш}^{T}{}_{|T=0} : \mathfrak{H}_{ш}^{1} \to \mathfrak{H}^{0}$$

Regularitzacions

Notacions

$$\mathrm{reg}_{ш}^{T} : \mathfrak{H}_{ш}^{1} \cong \mathfrak{H}_{ш}^{0}[T]$$

$$\mathrm{reg}_{ш} = \mathrm{reg}_{ш}^{T}{}_{|T=0} : \mathfrak{H}_{ш}^{1} \to \mathfrak{H}^{0}$$

$$\mathrm{reg}_{*}^{T} : \mathfrak{H}_{*}^{1} \cong \mathfrak{H}_{*}^{0}[T]$$

$$\mathrm{reg}_{*} = \mathrm{reg}_{*}^{T}{}_{|T=0} : \mathfrak{H}_{*}^{1} \to \mathfrak{H}^{0}$$

Regularitzacions

Notacions

$$\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}^{T} : \mathfrak{H}_{\sqcup\!\sqcup}^{1} \cong \mathfrak{H}_{\sqcup\!\sqcup}^{0}[T]$$

$$\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup} = \mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}^{T}{}_{|T=0} : \mathfrak{H}_{\sqcup\!\sqcup}^{1} \to \mathfrak{H}^{0}$$

$$\mathrm{reg}_{*}^{T} : \mathfrak{H}_{*}^{1} \cong \mathfrak{H}_{*}^{0}[T]$$

$$\mathrm{reg}_{*} = \mathrm{reg}_{*}^{T}{}_{|T=0} : \mathfrak{H}_{*}^{1} \to \mathfrak{H}^{0}$$

Exemple

$$\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}^{T}(y^2) = \qquad , \ \mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(y^2) =$$

Regularitzacions

Notacions

$$\mathrm{reg}_{ш}^{T} : \mathfrak{H}_{ш}^{1} \cong \mathfrak{H}_{ш}^{0}[T]$$

$$\mathrm{reg}_{ш} = \mathrm{reg}_{ш}^{T}{}_{|T=0} : \mathfrak{H}_{ш}^{1} \to \mathfrak{H}^{0}$$

$$\mathrm{reg}_{*}^{T} : \mathfrak{H}_{*}^{1} \cong \mathfrak{H}_{*}^{0}[T]$$

$$\mathrm{reg}_{*} = \mathrm{reg}_{*}^{T}{}_{|T=0} : \mathfrak{H}_{*}^{1} \to \mathfrak{H}^{0}$$

Exemple

$$\mathrm{reg}_{ш}^{T}(y^2) = \frac{T^2}{2}\,,\ \mathrm{reg}_{ш}(y^2) =$$

Regularitzacions

Notacions

$$\mathrm{reg}^T_{\text{ш}} : \mathfrak{H}^1_{\text{ш}} \cong \mathfrak{H}^0_{\text{ш}}[T]$$

$$\mathrm{reg}_{\text{ш}} = \mathrm{reg}^T_{\text{ш}}{}_{|T=0} : \mathfrak{H}^1_{\text{ш}} \to \mathfrak{H}^0$$

$$\mathrm{reg}^T_{*} : \mathfrak{H}^1_{*} \cong \mathfrak{H}^0_{*}[T]$$

$$\mathrm{reg}_{*} = \mathrm{reg}^T_{*}{}_{|T=0} : \mathfrak{H}^1_{*} \to \mathfrak{H}^0$$

Exemple

$$\mathrm{reg}^T_{\text{ш}}(y^2) = \frac{T^2}{2}\,, \ \mathrm{reg}_{\text{ш}}(y^2) = 0$$

Regularitzacions

Notacions

$$\mathrm{reg}^T_{ш} : \mathfrak{H}^1_{ш} \cong \mathfrak{H}^0_{ш}[T]$$

$$\mathrm{reg}_{ш} = \mathrm{reg}^T_{ш}{}_{|T=0} : \mathfrak{H}^1_{ш} \longrightarrow \mathfrak{H}^0$$

$$\mathrm{reg}^T_{*} : \mathfrak{H}^1_{*} \cong \mathfrak{H}^0_{*}[T]$$

$$\mathrm{reg}_{*} = \mathrm{reg}^T_{*}{}_{|T=0} : \mathfrak{H}^1_{*} \longrightarrow \mathfrak{H}^0$$

Exemple

$$\mathrm{reg}^T_{ш}(y^2) = \frac{T^2}{2}, \quad \mathrm{reg}_{ш}(y^2) = 0$$

Exemple

$$\mathrm{reg}^T_{*}(y^2) = \qquad\qquad , \quad \mathrm{reg}_{ш}(y^2) =$$

Regularitzacions

Notacions

$$\mathrm{reg}_{ш}^{T} : \mathfrak{H}_{ш}^{1} \cong \mathfrak{H}_{ш}^{0}[T]$$

$$\mathrm{reg}_{ш} = \mathrm{reg}_{ш}^{T}{}_{|T=0} : \mathfrak{H}_{ш}^{1} \longrightarrow \mathfrak{H}^{0}$$

$$\mathrm{reg}_{*}^{T} : \mathfrak{H}_{*}^{1} \cong \mathfrak{H}_{*}^{0}[T]$$

$$\mathrm{reg}_{*} = \mathrm{reg}_{*}^{T}{}_{|T=0} : \mathfrak{H}_{*}^{1} \longrightarrow \mathfrak{H}^{0}$$

Exemple

$$\mathrm{reg}_{ш}^{T}(y^2) = \frac{T^2}{2}\,,\;\; \mathrm{reg}_{ш}(y^2) = 0$$

Exemple

$$\mathrm{reg}_{*}^{T}(y^2) = \frac{T^2}{2} - \frac{xy}{2}\,,\;\; \mathrm{reg}_{ш}(y^2) =$$

Regularitzacions

Notacions

$$\mathrm{reg}_{Ш}^{T} : \mathfrak{H}_{Ш}^{1} \cong \mathfrak{H}_{Ш}^{0}[T]$$

$$\mathrm{reg}_{Ш} = \mathrm{reg}_{Ш}^{T}{}_{|T=0} : \mathfrak{H}_{Ш}^{1} \longrightarrow \mathfrak{H}^{0}$$

$$\mathrm{reg}_{*}^{T} : \mathfrak{H}_{*}^{1} \cong \mathfrak{H}_{*}^{0}[T]$$

$$\mathrm{reg}_{*} = \mathrm{reg}_{*}^{T}{}_{|T=0} : \mathfrak{H}_{*}^{1} \longrightarrow \mathfrak{H}^{0}$$

Exemple

$$\mathrm{reg}_{Ш}^{T}(y^2) = \frac{T^2}{2}\,,\ \mathrm{reg}_{Ш}(y^2) = 0$$

Exemple

$$\mathrm{reg}_{*}^{T}(y^2) = \frac{T^2}{2} - \frac{xy}{2}\,,\ \mathrm{reg}_{Ш}(y^2) = -\frac{xy}{2}$$

Fórmules explícites

Proposició Per a tot $m \geq 0$ i tot w_0' de $\mathfrak{H}^1$ tenim que

$$\mathrm{reg}_{ш}^{T}(y^m x w_0') = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l x(y^l \text{ ш } w_0') \frac{T^{m-l}}{(m-l)!}$$

$$\mathrm{reg}_{ш}(y^m x w_0') = (-1)^m x(y^m \text{ ш } w_0')$$

Fórmules explícites

Proposició Per a tot $m \geq 0$ i tot w_0' de $\mathfrak{H}^1$ tenim que

$$\mathrm{reg}_{ш}^{T}(y^m x w_0') = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l x(y^l \,ш\, w_0') \frac{T^{m-l}}{(m-l)!}$$

$$\mathrm{reg}_{ш}(y^m x w_0') = (-1)^m x(y^m \,ш\, w_0')$$

Si $w_0 \in \mathfrak{H}^0$, tenim que

$$\mathrm{reg}_{ш}(y^m w_0) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i y^i \,ш\, y^{m-i} w_0$$

$$\mathrm{reg}_{*}(y^m w_0) = \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i}{i!} y^i * y^{m-i} w_0$$

Equivalències

Teorema Les següents propietats són equivalents:

Equivalències

Teorema Les següents propietats són equivalents:

- $Z^{\sqcup\!\sqcup}(w) - \rho Z^*(w) = 0$ per tota $w \in \mathfrak{H}^1$.

Equivalències

Teorema Les següents propietats són equivalents:

- $Z^{\text{ш}}(w) - \rho Z^{*}(w) = 0$ per tota $w \in \mathfrak{H}^1$.
- $(Z^{\text{ш}}(w) - \rho Z^{*}(w))_{|T=0} = 0$ per tota $w \in \mathfrak{H}^1$.

Equivalències

Teorema Les següents propietats són equivalents:

- $Z^{ш}(w) - \rho Z^{*}(w) = 0$ per tota $w \in \mathfrak{H}^1$.
- $(Z^{ш}(w) - \rho Z^{*}(w))_{|T=0} = 0$ per tota $w \in \mathfrak{H}^1$.
- $Z^{ш}(w_1 \,ш\, w_0 - w_1 * w_0) = 0$ per tota $w_1 \in \mathfrak{H}^1$ i $w_0 \in \mathfrak{H}^0$.

Equivalències

Teorema Les següents propietats són equivalents:

- $Z^{ш}(w) - \rho Z^{*}(w) = 0$ per tota $w \in \mathfrak{H}^1$.
- $(Z^{ш}(w) - \rho Z^{*}(w))_{|T=0} = 0$ per tota $w \in \mathfrak{H}^1$.
- $Z^{ш}(w_1 \, ш \, w_0 - w_1 * w_0) = 0$ per tota $w_1 \in \mathfrak{H}^1$ i $w_0 \in \mathfrak{H}^0$.
- $Z(\mathrm{reg}_{ш}(w_1 \, ш \, w_0 - w_1 * w_0)) = 0$ per tota $w_1 \in \mathfrak{H}^1$ i $w_0 \in \mathfrak{H}^0$.

Equivalències

Teorema Les següents propietats són equivalents:

- $Z^{ш}(w) - \rho Z^{*}(w) = 0$ per tota $w \in \mathfrak{H}^1$.
- $(Z^{ш}(w) - \rho Z^{*}(w))_{|T=0} = 0$ per tota $w \in \mathfrak{H}^1$.
- $Z^{ш}(w_1 \,ш\, w_0 - w_1 * w_0) = 0$ per tota $w_1 \in \mathfrak{H}^1$ i $w_0 \in \mathfrak{H}^0$.
- $Z(\mathrm{reg}_{ш}(w_1 \,ш\, w_0 - w_1 * w_0)) = 0$ per tota $w_1 \in \mathfrak{H}^1$ i $w_0 \in \mathfrak{H}^0$.
- El mateix canviant $ш$ per $*$.

Equivalències

Teorema Les següents propietats són equivalents:

- $Z^{\sqcup\!\sqcup}(w) - \rho Z^*(w) = 0$ per tota $w \in \mathfrak{H}^1$.
- $(Z^{\sqcup\!\sqcup}(w) - \rho Z^*(w))_{|T=0} = 0$ per tota $w \in \mathfrak{H}^1$.
- $Z^{\sqcup\!\sqcup}(w_1 \sqcup\!\sqcup\, w_0 - w_1 * w_0) = 0$ per tota $w_1 \in \mathfrak{H}^1$ i $w_0 \in \mathfrak{H}^0$.
- $Z(\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(w_1 \sqcup\!\sqcup\, w_0 - w_1 * w_0)) = 0$ per tota $w_1 \in \mathfrak{H}^1$ i $w_0 \in \mathfrak{H}^0$.
- El mateix canviant $\sqcup\!\sqcup$ per $*$.
- $Z(\mathrm{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(y^m * w_0)) = 0$ per tota $w_0 \in \mathfrak{H}^0$.

Teorema de la suma

Proposició Sigui $S(m,k)$ la suma de tots els monomis a $\mathfrak{H}^0$ de pes m i profunditat k. Aleshores, si $m > k+1 \geq 2$, tenim

$$(-1)^k \operatorname{reg}_{\text{ш}}(y^k * x^{m-k-1}y) = S(m,k+1) - S(m,k).$$

Teorema de la suma

Proposició Sigui $S(m,k)$ la suma de tots els monomis a $\mathfrak{H}^0$ de pes m i profunditat k. Aleshores, si $m > k+1 \geq 2$, tenim

$$(-1)^k \operatorname{reg}_{ш}(y^k * x^{m-k-1}y) = S(m,k+1) - S(m,k).$$

Conseqüència (El teorema de la suma de Granville)
La suma de tots els valors multi zeta de pes fixat n i profunditat fixada $< n$ és igual a $\zeta(n)$.

Teorema de la suma

Proposició Sigui $S(m,k)$ la suma de tots els monomis a $\mathfrak{H}^0$ de pes m i profunditat k. Aleshores, si $m > k+1 \geq 2$, tenim

$$(-1)^k \operatorname{reg}_{\text{ш}}(y^k * x^{m-k-1}y) = S(m,k+1) - S(m,k).$$

Conseqüència (El teorema de la suma de Granville)
La suma de tots els valors multi zeta de pes fixat n i profunditat fixada $< n$ és igual a $\zeta(n)$.
I.e. Fixada $k < n$ tenim

$$\sum_{n_1+\cdots+n_k=n} \zeta(n_1,\ldots,n_k) = \zeta(n)$$

Teorema de la suma

Proposició Sigui $S(m,k)$ la suma de tots els monomis a $\mathfrak{H}^0$ de pes m i profunditat k. Aleshores, si $m > k+1 \geq 2$, tenim

$$(-1)^k \operatorname{reg}_{\text{Ш}} (y^k * x^{m-k-1} y) = S(m,k+1) - S(m,k).$$

Conseqüència (El teorema de la suma de Granville)
La suma de tots els valors multi zeta de pes fixat n i profunditat fixada $< n$ és igual a $\zeta(n)$.
I.e. Fixada $k < n$ tenim

$$\sum_{n_1+\cdots+n_k=n} \zeta(n_1,\ldots,n_k) = \zeta(n)$$

Exemples $\zeta(2,1) = \zeta(3)$,

$$\zeta(3,1) + \zeta(2,2) = \zeta(4) = \zeta(2,1,1)$$

Demostració del Teorema de la suma

Per la última de les equivalències tenim que

$$Z((-1)^k \operatorname{reg}_{\text{ш}} (y^k * x^{m-k-1} y)) = 0$$

Demostració del Teorema de la suma

Per la última de les equivalències tenim que

$$Z((-1)^k \operatorname{reg}_{\text{ш}}(y^k * x^{m-k-1}y)) = 0$$

Per tant

$$Z(S(m,k+1)) = Z(S(m,k)) = \cdots = Z(S(m,1)) = \zeta(m)$$

Demostració del Teorema de la suma

Per la última de les equivalències tenim que

$$Z((-1)^k \operatorname{reg}_{ш} (y^k * x^{m-k-1} y)) = 0$$

Per tant

$$Z(S(m,k+1)) = Z(S(m,k)) = \cdots = Z(S(m,1)) = \zeta(m)$$

Demostració de la Proposició

$S(m,k) = (-1)^k x(y^k \,ш\, x^{m-k-2})y$

Demostració del Teorema de la suma

Per la última de les equivalències tenim que

$$Z((-1)^k \operatorname{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(y^k * x^{m-k-1}y)) = 0$$

Per tant

$$Z(S(m,k+1)) = Z(S(m,k)) = \cdots = Z(S(m,1)) = \zeta(m)$$

Demostració de la Proposició

$S(m,k) = (-1)^k x(y^k \sqcup\!\sqcup\, x^{m-k-2})y$

$$y^k * x^{m-k-1}y = \sum_{i=0}^{k} y^i x^{m-k-1} y^{k+1-i} + \sum_{j=0}^{k-1} y^j x^{m-k} y^{k-j}.$$

Demostració del Teorema de la suma

Per la última de les equivalències tenim que

$$Z((-1)^k \operatorname{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(y^k * x^{m-k-1}y)) = 0$$

Per tant

$$Z(S(m,k+1)) = Z(S(m,k)) = \cdots = Z(S(m,1)) = \zeta(m)$$

Demostració de la Proposició

$S(m,k) = (-1)^k x(y^k \sqcup\!\sqcup\, x^{m-k-2})y$

$$y^k * x^{m-k-1}y = \sum_{i=0}^{k} y^i x^{m-k-1} y^{k+1-i} + \sum_{j=0}^{k-1} y^j x^{m-k} y^{k-j}.$$

$$\operatorname{reg}_{\sqcup\!\sqcup}(y^a x^b y^c) = (-1)^a x(y^a \sqcup\!\sqcup\, x^{b-1} y^c)$$

Conjectures

Conjectura: Les úniques relacions entre els valors de les funcions multizeta s'obtenen d'igualar

$$Z^{\sqcup\!\sqcup}(w) = \rho(Z^{*}(w)) \quad \forall w \in \mathfrak{H}^{1}$$

Conjectures

Conjectura: Les úniques relacions entre els valors de les funcions multizeta s'obtenen d'igualar

$$Z^{ш}(w) = \rho(Z^*(w)) \quad \forall w \in \mathfrak{H}^1$$

Equivalentment: El nucli del morfisme

$$Z : \mathfrak{H}^0 \to \mathcal{Z} := \langle \zeta(n_1, n_2, \ldots, n_k) \mid n_1 > 1, n_i \geq 1 \forall i, \forall k \geq 1 \rangle_{\mathbb{Q}}$$

és igual a

$$\ker(Z) = \{\mathrm{reg}_{ш}(y^m * w_0) \mid \forall w_0 \in \mathfrak{H}^0\}.$$

Conjectures

Conjectura: Les úniques relacions entre els valors de les funcions multizeta s'obtenen d'igualar

$$Z^{ш}(w) = \rho(Z^*(w)) \ \ \forall w \in \mathfrak{H}^1$$

Equivalentment: El nucli del morfisme

$$Z : \mathfrak{H}^0 \to \mathcal{Z} := \langle \zeta(n_1, n_2, \ldots, n_k) \mid n_1 > 1, n_i \geq 1 \forall i, \forall k \geq 1 \rangle_{\mathbb{Q}}$$

és igual a

$$\ker(Z) = \{\mathrm{reg}_{ш}(y^m * w_0) \mid \forall w_0 \in \mathfrak{H}^0\}.$$

Conjectura forta:

$$\ker(Z) = \{\mathrm{reg}_{ш}(y * w_0) \mid \forall w_0 \in \mathfrak{H}^0\}.$$

Conseqüències

Dos valors de multi zeta de pesos diferents són linealment independents sobre $\mathbb{Q}$.

Conseqüències

Dos valors de multi zeta de pesos diferents són linealment independents sobre $\mathbb{Q}$.

O sigui $\mathcal{Z} = \bigoplus_n \mathcal{Z}_n$ com a $\mathbb{Q}$-algebra.

Conseqüències

Dos valors de multi zeta de pesos diferents són linealment independents sobre $\mathbb{Q}$.

O sigui $\mathcal{Z} = \bigoplus_n \mathcal{Z}_n$ com a $\mathbb{Q}$-algebra.

Conseqüència 1: Les $\zeta(n_1, \ldots, n_k)$ són sempre transcendents.

Conseqüències

Dos valors de multi zeta de pesos diferents són linealment independents sobre $\mathbb{Q}$.

O sigui $\mathcal{Z} = \bigoplus_n \mathcal{Z}_n$ com a $\mathbb{Q}$-algebra.

Conseqüència 1: Les $\zeta(n_1, \ldots, n_k)$ són sempre transcendents.

Conseqüència 2: Exemple: $\zeta(2)^3$ i $\zeta(3)^2$ són independents sobre $\mathbb{Q}$.

Dimensions

Conjectura (Zagier,Broadhurst-Kreimer): La dimensió sobre $\mathbb{Q}$ de $\mathcal{Z}_n$ és d_n, on $d_0 = 1$, $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ i $d_n = d_{n-2} + d_{n-3}$.

Dimensions

Conjectura (Zagier,Broadhurst-Kreimer): La dimensió sobre $\mathbb{Q}$ de $\mathcal{Z}_n$ és d_n, on $d_0 = 1$, $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ i $d_n = d_{n-2} + d_{n-3}$.

Va sortir de l'estudi de les multizetes de profunditat ≤ 2.

Dimensions

Conjectura (Zagier,Broadhurst-Kreimer): La dimensió sobre $\mathbb{Q}$ de $\mathcal{Z}_n$ és d_n, on $d_0 = 1$, $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ i $d_n = d_{n-2} + d_{n-3}$.

Va sortir de l'estudi de les multizetes de profunditat ≤ 2.

Conseqüència: Els següents valors són linealment independents sobre $\mathbb{Q}$ i generen $\mathcal{Z}_{\leq 10}$:

$$\zeta(2),\ \zeta(3),\ \zeta(5),\ \zeta(9),$$

$$\zeta(6,8),\ \zeta(8,2).$$

La conjectura de la base

La conjectura de la base (Hoffman): Tot valor multi zeta pot ser escrit com a suma de múltiples racionals de valors multi zeta que sols contenen 2 i 3.

La conjectura de la base

La conjectura de la base (Hoffman): Tot valor multi zeta pot ser escrit com a suma de múltiples racionals de valors multi zeta que sols contenen 2 i 3.

Exemple

$$\zeta(7) = \frac{252}{151}\zeta(3,2,2) + \frac{672}{151}\zeta(2,3,2) + \frac{528}{151}\zeta(2,2,3)$$

La conjectura de la base

La conjectura de la base (Hoffman): Tot valor multi zeta pot ser escrit com a suma de múltiples racionals de valors multi zeta que sols contenen 2 i 3.

Exemple

$$\zeta(7) = \frac{252}{151}\zeta(3,2,2) + \frac{672}{151}\zeta(2,3,2) + \frac{528}{151}\zeta(2,2,3)$$

Conseqüència de la conjectura de la base i de la dimensió: Els valors multi zeta que sols contenen 2 i 3 són tots linealment independents sobre $\mathbb{Q}$ i generen $\mathcal{Z}$

Resultats coneguts

Teorema (Goncharov, Terasoma):

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}_n) \leq d_n$$

Resultats coneguts

Teorema (Goncharov, Terasoma):

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}_n) \leq d_n$$

Teorema de la paritat (Zagier): Tot valor de les funcions multizeta amb pes n i profunditat k, si $n \not\equiv k \pmod 2$, és combinació lineal de valors amb profunditat menor i productes de valors amb pes menor.

Resultats coneguts

Teorema (Goncharov, Terasoma):

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}_n) \leq d_n$$

Teorema de la paritat (Zagier): Tot valor de les funcions multizeta amb pes n i profunditat k, si $n \not\equiv k (\text{mod } 2)$, és combinació lineal de valors amb profunditat menor i productes de valors amb pes menor.

Conseqüència: (Profunditat 1, pes $2n$) $\zeta(2n)$ és combinació lineal de valors de la forma $\prod_{i_1+\cdots+i_m=2n} \zeta(i_1) \dots \zeta(i_n)$.

Interpretació geomètrica

Els valors de les funcions multizeta són períodes.

Interpretació geomètrica

Els valors de les funcions multizeta són períodes.

Goncharov-Zagier: Són períodes de espais de moduli de corbes de gènere 0 amb m punts marcats.

Interpretació geomètrica

Els valors de les funcions multizeta són períodes.

Goncharov-Zagier: Són períodes de espais de moduli de corbes de gènere 0 amb m punts marcats.

Terasoma: Són períodes associats a esclataments d'espais afins respecte certes subvarietats lineals.

Interpretació geomètrica

Els valors de les funcions multizeta són períodes.

Goncharov-Zagier: Són períodes de espais de moduli de corbes de gènere 0 amb m punts marcats.

Terasoma: Són períodes associats a esclataments d'espais afins respecte certes subvarietats lineals.

Goncharov: Són períodes de motius de Tate mixtes definits sobre $\mathbb{Z}$.

Estan relacionades amb

Funcions Polilogaritmes.

Estan relacionades amb

Funcions Polilogaritmes.

El grup fonamental de la recta projectiva menys tres punts.

Estan relacionades amb

Funcions Polilogaritmes.

El grup fonamental de la recta projectiva menys tres punts.

El grup de Galois absolut de $\mathbb{Q}$.

Estan relacionades amb

Funcions Polilogaritmes.

El grup fonamental de la recta projectiva menys tres punts.

El grup de Galois absolut de $\mathbb{Q}$.

El grup de Grothendieck-Teichmüller

Estan relacionades amb

Funcions Polilogaritmes.

El grup fonamental de la recta projectiva menys tres punts.

El grup de Galois absolut de $\mathbb{Q}$.

El grup de Grothendieck-Teichmüller

Teoria de nusos i invariants de Vassiliev

Estan relacionades amb

Funcions Polilogaritmes.

El grup fonamental de la recta projectiva menys tres punts.

El grup de Galois absolut de $\mathbb{Q}$.

El grup de Grothendieck-Teichmüller

Teoria de nusos i invariants de Vassiliev

Diagrames de Feynman i teoria de camps quàntics

Estan relacionades amb

Funcions Polilogaritmes.

El grup fonamental de la recta projectiva menys tres punts.

El grup de Galois absolut de $\mathbb{Q}$.

El grup de Grothendieck-Teichmüller

Teoria de nusos i invariants de Vassiliev

Diagrames de Feynman i teoria de camps quàntics

Etc. Etc. Etc.