Geometria integral en espais de curvatura holomorfa constant

Judit Abardia Bochaca

Octubre de 2009

Memòria presentada per aspirar al grau de Doctor en Ciències Matemàtiques.

Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Directors:
Eduardo Gallego Gómez i Gil Solanes Farrés

CERTIFIQUEM que la present Memòria ha estat realitzada per na Judit Abardia Bochaca, sota la direcció dels Drs. Eduardo Gallego Gómez i Gil Solanes Farrés.

Bellaterra, octubre del 2009

Signat: Dr. Eduardo Gallego Gómez i Dr. Gil Solanes Farrés

Índex

Introduction

Classically, integral geometry in Euclidean space deals with two basic questions: the expression of the measure of planes meeting a convex domain, the so-called Crofton formulas; and the study of the measure of movements taking one convex domain over another fixed convex domain, the so-called kinematic formula.

In the Euclidean space $\mathbb{R}^n$, we denote by L_r a totally geodesic submanifold of dimension r, and we call it r-plane. We denote the space of r-planes by $\mathcal{L}_r$. This space has a unique (up to a constant factor) density invariant under the isometry group of $\mathbb{R}^n$, denoted by dL_r. Then, given a convex domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ with smooth boundary, the expression of the measure of r-planes meeting a convex domain is given by

$$\int_{\mathcal{L}_r} \chi(\Omega \cap L_r) dL_r = c_{n,r} M_{r-1}(\partial\Omega), \tag{1}$$

where $c_{n,r}$ only depends on the dimensions n, r, and $M_{r-1}(\partial\Omega)$ denotes the integral over $\partial\Omega$ of the $(r-1)$-th mean curvature integral.

Thus, the mean curvature integrals appear naturally in the Crofton formula. A classical known property of mean curvature integrals is the following

$$\int_{\mathcal{L}_r} M_i^{(r)}(\partial\Omega \cap L_r) dL_r = c'_{n,r,i} M_i(\partial\Omega) \tag{2}$$

where $c'_{n,r,i}$ only depends on the dimensions n, r, i, and $M_i^{(r)}(\partial\Omega \cap L_r)$ denotes the i-th mean curvature integral of $\partial\Omega \cap L_r$ as a hypersurface in $L_r \cong \mathbb{R}^r$. From (2), it is said that mean curvature integrals satisfy a *reproductive property.*

On the other hand, the kinematic formula in $\mathbb{R}^n$ is expressed as follows. Let Ω_1 and Ω_2 be two convex domains with smooth boundary, let $\overline{O(n)} := O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ denote the isometry group of $\mathbb{R}^n$, and let dg be an invariant density of $\overline{O(n)}$. Then,

$$\int_{\overline{O(n)}} \chi(\Omega_1 \cap g\Omega_2) dg = \sum_{i=0}^{n} c_{n,i} M_i(\partial\Omega_1) M_{n-i}(\partial\Omega_2). \tag{3}$$

The previous three formulas were extended to projective and hyperbolic spaces (cf. [San04]), i.e. they are known in the spaces of constant sectional curvature k. The generalization of integral (2) does not depend on k but in the expression (1) for projective and hyperbolic space appear other terms, depending on k. Moreover, its expression depends on the parity of the dimension of the planes. If r is even, then

$$\int_{\mathcal{L}_r} \chi(\Omega \cap L_r) dL_r = c_{n,r-1} M_{r-1}(\partial\Omega) + c_{n,r-3} M_{r-3}(\partial\Omega) + \cdots + c_{n,1} M_1(\partial\Omega) + c_n \mathrm{vol}(\Omega), \tag{4}$$

and if r is odd

$$\int_{\mathcal{L}_r} \chi(\Omega \cap L_r) dL_r = c_{n,r-1} M_{r-1}(\partial\Omega) + c_{n,r-3} M_{r-3}(\partial\Omega) + \cdots + c_{n,2} M_2(\partial\Omega) + c_n \mathrm{vol}(\partial\Omega), \tag{5}$$

where $c_{n,j}$ depends on the dimensions n and j and are multiples of k^{n-j}.

The facts that the expression depends on the parity, and that we study an integral of the Euler characteristic, remain us the Gauss-Bonnet formula in spaces of constant sectional curvature, which also depends on the parity of the ambient space. We recall here this formula in a space of constant sectional curvature k and dimension n.

If n is even, then

$$M_{n-1}(\partial\Omega) + c_{n-3}M_{n-3}(\partial\Omega) + \cdots + c_1 M_1(\partial\Omega) + k^{n/2}\mathrm{vol}(\Omega) = \mathrm{vol}(S^{n-1})\chi(\Omega),$$

and if n is odd,

$$M_{n-1}(\partial\Omega) + c_{n-3}M_{n-3}(\partial\Omega) + \cdots + c_2 M_2(\partial\Omega) + k^{(n-1)/2}\mathrm{vol}(\partial\Omega) = \frac{\mathrm{vol}(S^{n-1})}{2}\chi(\Omega)$$

where c_i depends only on the dimensions n, i and are multiples of the sectional curvature k.

Now, using the expression (2) and the Gauss-Bonnet formula, we get (4) and (5).

The goal of this work is generalize formulas (1) and (2) in the standard Hermitian space $\mathbb{C}^n$, in the complex projective space and in the complex hyperbolic space, denoted by $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ with 4ϵ the holomorphic curvature of the manifold (see Section 1.1).

In order to achieve this goal, we use the notion of valuation in a vector space V, a real-valued functional ϕ from the space of convex compact domains $\mathcal{K}(V)$ in V to $\mathbb{R}$ satisfying the following additive property

$$\phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B) - \phi(A \cap B)$$

whenever A, B, $A \cup B \in \mathcal{K}(V)$.

The first examples of valuations are the volume of the convex domain, the area of the boundary, and the Euler characteristic. Other classical examples of valuations are the so-called *intrinsic volumes*. They are defined from the Steiner formula: given a convex domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, if we denote by Ω_r the parallel domain at a distance r, the Steiner formula relates the volume of Ω_r with the so-called intrinsic volumes $V_i(\Omega)$ by

$$\mathrm{vol}(\Omega_r) = \sum_{i=0}^{n} r^{n-i}\omega_{n-i}V_i(\Omega)$$

where ω_{n-i} denotes the volume of the $(n-i)$-dimensional Euclidean ball with radius 1 (cf. Proposition 2.1.3).

If $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a convex domain with smooth boundary, then intrinsic volumes satisfy

$$V_i(\Omega) = cM_{n-i-1}(\partial\Omega),$$

and they are the natural generalization of the mean curvature integrals for non-smooth convex domains.

Hadwiger in [Had57] proved that all continuous valuations in $\mathbb{R}^n$ invariant under the isometry group of $\mathbb{R}^n$ are linear combination of the volume of the convex domain, the area of the boundary, and the intrinsic volumes (see Section 2.2). This result has as immediate consequence formulas (1), (2) and (3).

Alesker in [Ale03] proved that the dimension of the space of continuous valuations in $\mathbb{C}^n$ invariant under the holomorphic isometry group of $\mathbb{C}^n$ is $\binom{n+2}{2}$ and gave a basis of this space. In the recent paper of Bernig and Fu, [BF08], there are given other basis of valuations in $\mathbb{C}^n$. In particular, the *Hermitian intrinsic volumes* are defined (see Section 2.4.2). These are the valuations we will use to work with. The fact that the dimension of the space of continuous valuations invariant under the isometry group of $\mathbb{C}^n$ is bigger than the one of $\mathbb{R}^{2n}$ is not surprising if we recall that the holomorphic isometry group of $\mathbb{C}^n$, $U(n)$, is smaller than the isometry group of $\mathbb{R}^{2n}$, $O(2n)$.

Hermitian intrinsic volumes are a kind of generalization of mean curvature integrals, but taking into account that $\mathbb{C}^n$ has a complex structure which defines a canonical vector field on hypersurfaces. Indeed, at each point x of a hypersurface, if we consider the normal vector, and we apply the complex structure, then we get a distinguished vector JN in the tangent space of the hypersurface at x. Moreover, the orthogonal space to JN in the tangent space defines a complex space of maximum dimension, $n-1$.

So, if S is a smooth hypersurface in $\mathbb{C}^n$, we can consider the integral

$$\int_S k_n(JN)dx$$

where $k_n(JN)$ denotes the normal curvature in the direction JN, and this is a valuation in $\mathbb{C}^n$. Other valuations related to normal curvature of the direction JN appear as elements in of Hermitian intrinsic volumes basis.

The notion of valuation can be also defined in a differentiable manifold (see Definition 2.4.1). In real space forms the volume of a convex domain and the area of its boundary are valuations. But, it is not known an analogous result to Hadwiger Theorem in these spaces.

The definition of the Hermitian intrinsic volumes can be extended to other space of constant holomorphic curvature. We denote by $\{\mu_{k,q}\}$ the Hermitian intrinsic volumes. The subscript k denotes the *degree* of the valuation (see Section 2.4.2).

In order to give a similar expression of (1) and (2) in the spaces of constant holomorphic curvature, we need to describe the integration space. Note that in spaces of constant sectional curvature we integrate over the space of r-planes, i.e. totally geodesic submanifold of fixed dimension. In spaces of constant holomorphic curvature, complete totally geodesic submanifolds are classified. If $\epsilon \neq 0$ they are complex submanifolds isometric to $\mathbb{CK}^r(\epsilon) \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$, with $1 \leq r < n$ or totally real submanifolds isometric to $\mathbb{RK}^q(\epsilon) \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ with $1 \leq q \leq n$, where $\mathbb{RK}^q(\epsilon)$ denotes the space of constant sectional curvature ϵ. For $\epsilon = 0$ there are other totally geodesic submanifolds. We denote the space of complex planes with complex dimension r, $1 \leq r < n$, by $\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}$, and the space of totally real planes of maximum dimension n by $\mathcal{L}_n^{\mathbb{R}}$, the so-called Lagrangian manifolds.

In this work, we obtain a Crofton formula for complex r-planes and Lagrangian planes

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}} \chi(\Omega \cap L_r) dL_r = \operatorname{vol}(G_{n-1,r}^{\mathbb{C}}) \binom{n-1}{r}^{-1} \cdot \qquad (6)\\ \cdot \Big(\sum_{k=n-r}^{n-1} \epsilon^{k-(n-r)} \omega_{2n-2k} \binom{n}{k}^{-1} \left(\sum_{q=\max\{0,2k-n\}}^{k-1} \frac{\binom{2k-2q}{k-q}}{4^{k-q}} \mu_{2k,q}(\Omega) + (k+r-n+1)\mu_{2k,k}(\Omega) \right) \\ + \epsilon^r (r+1) \operatorname{vol}(\Omega) \Big),\end{aligned}$$

$$\int_{\mathcal{L}_n^{\mathbb{R}}} \chi(\Omega \cap L) dL = \frac{\operatorname{vol}(G_{2n,n})\omega_n}{n!} \sum_{q=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{2q-1}{q-1}^{-1} \frac{4^{q-n}}{2q+1} \mu_{n,q}(\Omega) \quad \text{if } n \text{ is odd,} \qquad (7)$$

and

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{L}_n^{\mathbb{R}}} \chi(\Omega \cap L) dL = \frac{\operatorname{vol}(G_{2n,n})}{n!} \cdot \qquad (8)\\ \cdot \left(\sum_{q=0}^{\frac{n}{2}} \binom{2q-1}{q-1}^{-1} \frac{4^{q-n}\omega_n}{2q+1} \mu_{n,q}(\Omega) + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \epsilon^i \binom{n}{\frac{n}{2}+i}^{-1} \frac{2^{-n+1}\omega_{n-2i}}{n+1} \mu_{n+2i,\frac{n}{2}+i}(\Omega) \right) \quad \text{if } n \text{ is even,}\end{aligned}$$

where ω_i denotes the volume of the i-dimensional Euclidean unit ball.

Previous formulas have more addends that the corresponding ones in the spaces of constant sectional curvature, but they are similar. If $\epsilon = 0$, i.e. in $\mathbb{C}^n$ also appear all the valuations with the corresponding degree. If $\epsilon \neq 0$ the notion of degree of a valuation has no sense but there is a similitude with the expression in spaces of constant sectional curvature comparing the subscripts of the valuations.

In order to get these expressions we use a variational method. That is, we take a smooth vector field X defined on the manifold and we consider its flow ϕ_t. We prove the following formula of first variation

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}} \chi(\phi_t(\Omega) \cap L_r) dL_r = \int_{\partial\Omega} \langle X, N \rangle \int_{G^{\mathbb{C}}_{n-1,r}(\mathcal{D}_p)} \sigma_{2r}(\mathrm{II}|_V) dV dp$$

where N is the exterior normal field, $\mathcal{D}$ is the distribution in the tangent space at $\partial\Omega$ orthogonal to JN, and $\sigma_{2r}(\mathrm{II}|_V)$ denotes the $2r$-th symmetric elementary function of the second fundamental form II restricted to $V \in G^{\mathbb{C}}_{n-1,r}(\mathcal{D}_p)$, the Grassmannian of complex planes with complex dimension r inside $\mathcal{D}_p$.

On the other hand, we get an expression of the variation of valuations $\mu_{k,q}$ using the method in [BF08].

Comparing both variations and solving a system of linear equations we obtain the result.

Using the same variational method we also obtain a Gauss-Bonnet formula for the spaces of constant holomorphic curvature. It is known that the variation of the Euler characteristic is zero. Thus, we can express it as a sum of Hermitian intrinsic volumes such that its variation vanishes. The obtained Gauss-Bonnet formula is the following

$$\omega_{2n}\chi(\Omega) = (n+1)\epsilon^n \mathrm{vol}(\Omega) + \sum_{c=0}^{n-1} \frac{\epsilon^c \omega_{2n-2c}(n-c)}{n\binom{n-1}{c}} \left(\sum_{q=\max\{0,2c-n\}}^{c-1} \frac{\binom{2c-2q}{c-q}}{4^{c-q}} \mu_{2c,q} + (c+1)\mu_{2c,c} \right). \tag{9}$$

In spaces of constant sectional curvature k, Solanes in [Sol06] related the measure of planes meeting a domain with the Euler characteristic of the domain

$$\omega_n \chi(\Omega) = \frac{1}{n} M_{n-1}(\partial\Omega) + \frac{2k}{n\omega_{n-1}} \int_{\mathcal{L}_{n-2}} \chi(\Omega \cap L_{n-2}) dL_{n-2}.$$

In $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$, we get

$$\omega_{2n}\chi(\Omega) = \frac{1}{2n} M_{2n-1}(\partial\Omega) + \epsilon \int_{\mathcal{L}^{\mathbb{C}}_{n-1}} \chi(\Omega \cap L_{n-1}) dL_{n-1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\epsilon^j \omega_{2n}}{\omega_{2j}} \mu_{2j,j}(\Omega).$$

The analogous expression to (2), it is given when we integrate the mean curvature integral over complex r-planes. The obtained expression for a compact oriented (possible with boundary) hypersurface S of class $\mathcal{C}^2$ is

$$\int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}} M_1^{(r)}(S \cap L_r) dL_r = \frac{\omega_{2n-2}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-2,r-1})}{2r(2r-1)} \binom{n}{r}^{-1} \left((2n-1)\frac{2nr-n-r}{n-r} M_1(S) + \int_S k_n(JN) \right) \tag{10}$$

where $k_n(JN)$ denotes the normal curvature in the direction $JN \in TS$.

To get this result, first we obtain, using moving frames, the following intermediate expression (for any mean curvature integral). If $r, i \in \mathbb{N}$ such that $1 \leq r \leq n$ and $0 \leq i \leq 2r-1$, then

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}} M_i^{(r)}(S \cap L_r) dL_r \qquad (11)\\
&\quad = \binom{2r-1}{i}^{-1} \int_S \int_{\mathbb{RP}^{2n-2}} \int_{G^{\mathbb{C}}_{n-2,r-1}} \frac{|\langle JN, e_r\rangle|^{2r-i}}{(1-\langle JN, e_r\rangle^2)^{r-1}} \sigma_i(p; e_r \oplus V) dV de_r dp,
\end{aligned}$$

where $e_r \in T_pS$ unit vector, V denotes a complex $(r-1)$-plane containing p and contained in $\{N, JN, e_r, Je_r\}^{\perp}$, $\sigma_i(p; e_r \oplus V)$ denotes the i-th symmetric elementary function of the second fundamental form of S restricted to the real subspace $e_r \oplus V$ and the integration over $\mathbb{RP}^{2n-2}$ denotes the projective space of the unit tangent space of the hypersurface.

In order to complete the generalization of equation (1) in $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$, it remains to study the measure of (non-maximal) totally real planes. These are the other totally geodesic submanifolds of $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$, $\epsilon \neq 0$. Using the same techniques as in the rest of this work, it does not seem possible to solve this case since we cannot obtain enough information of the variational properties of the measures of totally real planes meeting a domain in $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$.

On the other hand, it would be interesting to extend formula (10) to $i \in \{2, \ldots, 2r-1\}$.

Next we explain the organization of the text.

Chapter 1 contains a description of the spaces of constant holomorphic curvature. We review its definition and describe some of the most important submanifolds, i.e. the totally geodesic submanifolds, the geodesic spheres, and the complex planes. In this chapter we also recall the method of moving frames, which will be used along this text. Using moving frames, we give an expression for the density of the space of complex planes. Finally, we prove that integral $\int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}} \chi(\Omega \cap L_r) dL_r$ satisfies a reproductive property.

Chapter 2 is devoted to the study of valuations in $\mathbb{C}^n$ and in the spaces of constant holomorphic curvature. First of all, we review the concept and the main properties of the valuations on $\mathbb{R}^n$ together with the Hadwiger Theorem (which characterize all continuous valuations in $\mathbb{R}^n$ invariants under the isometry group). An analogous Hadwiger Theorem in $\mathbb{C}^n$ is stated. Finally, we define the used valuations in this work in spaces of constant holomorphic curvature, and we give new properties and relations with other valuations also important in the next chapters.

Chapter 3 gives a proof of (10). First of all, we prove some geometric lemmas and we obtain the expression for the mean curvature integrals over the space of complex planes in terms of an integral over the boundary of the domain given in (11). This expression will be fundamental to attain the goal of this chapter. As a corollary of (10) we characterize the valuations of degree $2n-2$ satisfying a reproductive property in $\mathbb{C}^n$, and we give the relation among different valuations defined by Alesker (already reviewed in Chapter 2). The results of this chapter are contained in [Aba].

In Chapter 4 we obtain the measure of complex planes intersecting a domain in the spaces of constant holomorphic curvature in terms of the Hermitian intrinsic volumes defined at Chapter 2. We also give an expression of the Gauss-Bonnet formula in terms of these valuations. In order to get these expressions we use a variational method. First, we obtain an expression for the variation of the measure of complex planes and for the Hermitian intrinsic volumes. In this chapter, we verify the certainty of (6). A constructive proof, where we find the constants in the expression is given in the appendix. As a corollary, we express the total mean Gauss curvature in $\mathbb{C}^n$ also in terms of the Hermitic intrinsic volumes. Finally, we relate Chapters 3 and 4 obtaining another method to compute the measure of complex lines meeting a domain. The results of this chapter are contained in [AGS09].

Chapter 5 studies the measure of another type of planes meeting a domain in $\mathbb{C}^n$, the so-called coisotropic planes. These planes are the orthogonal direct sum of a complex subspace of complex dimension $n-p$ and a totally real subspace of dimension p. Totally real planes of maximum dimension and real hyperplanes are particular cases of this type of planes. Using similar techniques as in Chapter 4 we give an expression for the measure of planes of this type meeting a domain. For the spaces of constant holomorphic curvature we prove (7) and (8), which give the measure of totally real planes of maximum dimension, the so-called Lagrangian planes.

The appendix contains the constructive proof of (6) and (9). That is, we give the method that allowed us to obtain the constants appearing in these expressions. This proof consists, at a final instance, to solve a linear system obtained from the study of the variation of both sides of the expressions, as it is detailed in Chapter 4.

Agraïments

En aquestes últimes línies de la introducció voldria agrair el suport de totes les persones que han permès que aquest treball acabi convertint-se en tesi. En especial, al meu tutor inicial, Eduard Gallego, i al meu cotutor, Gil Solanes, per la seva paciència i recolzament; i al grup de Geometria i Topologia de la Universitat Autònoma de Barcelona, en particular a l'Agustí Reventós, primer de tot per introduir-me gràcies al seu entusiasme al món de la geometria. També, a Andreas Bernig, per totes les converses que hem mantingut, i als membres del Departament de Matemàtiques de la Universitat de Fribourg, que m'han donat un magnífic ambient de treball durant els mesos de la meva estada a Suïssa. Tot i que no faré una llista amb el nom de totes les persones amb qui he parlat de matemàtiques i que han contribuït en aquest treball o en altres, espero, futurs treballs, sí que m'agradaria que si llegeixen aquests agraïments s'hi sentissin identificats.

Fora de l'àmbit matemàtic relacionat directament amb el treball de la tesi, voldria escriure en aquests agraïments, als companys de doctorat, en especial les companyes de despatx i els companys de geometria i topologia, tant de Barcelona com de Fribourg. Així com totes les persones que durant aquests anys he conegut i que, per un motiu o altre, s'han convertit amb més que companys.

Per últim agrair el suport, no només durant els anys de doctorat, dels meus pares.

Aquest treball ha estat realitzat amb el suport del Departament d'Universitats, Recerca i Societat de la Informació de la Generalitat de Catalunya i dels Fons Social Europeu i del Fons Nacional Suís.

Capítol 1

Espais de curvatura holomorfa constant

1.1 Primeres definicions

En aquesta secció introduïm els espais de curvatura holomorfa constant i donem algunes de les seves propietats que utilitzarem al llarg d'aquest treball. Primer de tot, recordem algunes definicions bàsiques.

Definició 1.1.1. Sigui M varietat diferenciable. Diem que M és una *varietat complexa* de dimensió complexa n si està dotada d'un atlas tal que els canvis de cartes són holomorfs, és a dir, $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ és un atlas amb $\{U_\alpha\}$ recobriment obert de M i $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ homeomorfismes tals que $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ són holomorfs en el seu domini de definició.

Exemples

(i) L'espai vectorial $\mathbb{C}^n$ és una varietat complexa de dimensió n.

(ii) L'espai projectiu complex $\mathbb{CP}^n$ és una varietat complexa de dimensió n.

L'espai projectiu complex es defineix de manera anàloga a l'espai projectiu real. Considerem a $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ la relació d'equivalència que identifica els punts que són l'un múltiple complex de l'altre. Llavors, podem prendre com a atlas els oberts $\{U_0, ..., U_n\}$ tals que

$$U_j = \{(z_0, ..., z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z_j \neq 0\}$$

i per a cada U_j prendre l'aplicació $\phi_j(z_0, ..., z_n) = (z_0/z_j, ..., z_{j-1}/z_j, z_{j+1}/z_j, ..., z_n/z_j)$ que és homeomorfisme. Llavors, es pot provar que els canvis de cartes són holomorfs.

Definició 1.1.2. Sigui M varietat diferenciable. Una aplicació lineal $J : TM \to TM$ és una *estructura quasi-complexa de M* si per a cada $x \in M$, la restricció de J a T_xM satisfà $J_x : T_xM \to T_xM$, $J_x^2 = -\mathrm{Id}$ i, a més, J varia diferenciablement punt a punt.

Notem que en qualsevol varietat complexa podem definir de manera natural una estructura quasi-complexa a partir de la multiplicació per i. L'espai tangent d'una varietat complexa té estructura d'espai vectorial complex, per tant, l'aplicació multiplicar per i hi està ben definida i compleix que aplicada dues vegades és $-\mathrm{Id}$. D'aquesta estructura quasi-complexa en diem *estructura complexa*.

Definició 1.1.3. Sigui V espai vectorial complex i u, $v \in V$. Diem que $h : V \times V \to \mathbb{C}$ és un *producte hermític* de V si compleix:

1. és $\mathbb{C}$-lineal respecte la primera component,
2. $h(u,v) = \overline{h(v,u)}$.

Observació 1.1.4. De les propietats que verifica un producte hermític es dedueix que els escalars complexos de la segona component surten conjugats. En efecte, per definició se satisfan les següents igualtats:

$$h(u, \lambda v) = \overline{h(\lambda v, u)} = \overline{\lambda h(v,u)} = \overline{\lambda} h(u,v).$$

Definició 1.1.5. Sigui M una varietat complexa amb estructura complexa J i mètrica Riemanniana g. Diem que g és una *mètrica hermítica* si és compatible amb l'estructura complexa de M, és a dir, si satisfà $g_x(Ju, Jv) = g_x(u,v)$ per a tot $x \in M$ i $u, v \in T_xM$.

Definició 1.1.6. Sigui M una varietat complexa amb estructura complexa J i mètrica hermítica g. Definim la forma de Kähler associada a g com la 2-forma diferencial ω que satisfà

$$\omega(u,v) = g(u, Jv), \ \ \forall \ u, v \in T_xM.$$

Observació 1.1.7. Donada M una varietat complexa amb un producte hermític definit a TM, podem obtenir una mètrica hermítica i una forma de Kähler de la varietat: la part real del producte hermític dóna una mètrica hermítica i la part imaginària dóna la forma de Kähler associada.

Definició 1.1.8. Diem que una varietat complexa M és *varietat de Kähler* si hi ha definida una mètrica hermítica tal que la forma de Kähler associada a la mètrica és tancada.

Proposició 1.1.9 ([O'N83] p.326)**.** *Sigui M una varietat de Kähler amb connexió ∇. Llavors,*

$$\nabla JX = J\nabla X, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Definició 1.1.10. Diem que un subespai W de T_xM de dimensió complexa 1 és una *direcció complexa* o *secció holomorfa* de l'espai tangent si W és invariant per J, és a dir, $JW = W$.

En aquest cas, donat $w \neq 0 \in W$ es compleix que $\{w, Jw\}$ és una base de W, pensat com a subespai real.

Definició 1.1.11. La *curvatura holomorfa* es defineix com la curvatura seccional de les seccions holomorfes.

Definició 1.1.12. Un *espai de curvatura holomorfa constant* 4ϵ de dimensió n és una varietat de Kähler de dimensió complexa n, completa, simplement connexa tal que la curvatura holomorfa és constant i igual a 4ϵ per a tot punt i per a tota direcció complexa.

Teorema 1.1.13 ([KN69] teorema 7.9 p. 170)**.** *Dues varietats de Kähler, completes, simplement connexes amb curvatura holomorfa constant igual a 4ϵ són holomòrficament isomètriques.*

Definició 1.1.14. Denotem tot espai de curvatura holomorfa constant 4ϵ de dimensió n com $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$. Si $\epsilon > 0$ coincideix amb l'espai projectiu complex $\mathbb{CP}^n(\epsilon)$, si $\epsilon < 0$ l'espai hiperbòlic complex $\mathbb{CH}^n(\epsilon)$ i si $\epsilon = 0$, $\mathbb{C}^n$ amb la seva estructura hermítica estàndard.

Observació 1.1.15. Els espais de curvatura holomorfa constant generalitzen, en cert sentit, els espais de curvatura seccional constant, és a dir, les varietats de Riemman completes, simplement connexes amb curvatura seccional constant per a tot punt i per a tota direcció. Els espais de curvatura seccional constant són (llevat d'isometria) l'espai euclidià $\mathbb{R}^n$, l'espai projectiu real $\mathbb{RP}^n$ i l'espai hiperbòlic real $\mathbb{H}^n$. Els resultats d'aquest treball estenen alguns dels resultats clàssics de geometria integral en espais de curvatura seccional constant als espais de curvatura holomorfa constant. Santaló a [San52], Griffiths a [Gri78], entre d'altres, han obtingut certs resultats de geometria integral a l'espai hermític estàndard i a l'espai projectiu complex però considerant subvarietats complexes. En aquest treball, considerem dominis de l'espai i, per tant, tractem amb hipersuperfícies reals.

Definició 1.1.16. Donats dos plans Π i Π' (de dimensió real 2) de l'espai tangent en un punt d'una varietat de Riemann definim l'*angle entre els dos plans* com l'ínfim entre els angles que formen totes les parelles d'un vector de Π i un vector de Π'.

Definició 1.1.17. Sigui Π un pla de dimensió real 2 de l'espai tangent en un punt d'una varietat complexa amb una estructura complexa J. Es defineix l'*angle d'holomorfia* $\mu(\Pi)$ com l'angle entre Π i $J(\Pi)$.

Proposició 1.1.18 ([KN69] p. 167)**.** *Sigui M varietat de Kähler amb estructura complexa J i mètrica hermítica g. L'angle d'holomorfia d'un pla $\Pi \subset T_xM$, $x \in M$, està donat per*

$$\cos\mu(\Pi) = |g(u, Jv)|$$

on u, v és base ortonormal de Π.

Observació 1.1.19. L'angle d'holomorfia d'un pla pren valors entre 0 i $\pi/2$. En els casos extrems tenim les direccions complexes, quan l'angle d'holomorfia és 0; i els *plans totalment reals* que són per definició aquells que tenen angle d'holomorfia $\pi/2$.

En un espai de curvatura holomorfa constant es pot calcular el valor de la curvatura seccional de qualsevol pla a partir de la curvatura holomorfa i l'angle d'holomorfia del pla.

Proposició 1.1.20 ([KN69] p. 167)**.** *Sigui M una varietat de Kähler amb curvatura holomorfa constant 4ϵ. Llavors, la curvatura seccional de qualsevol pla $\Pi \subset T_pM$, $p \in M$, està donada per*

$$K(\Pi) = \epsilon\left(1 + 3\cos^2\mu(\Pi)\right) \tag{1.1}$$

on $\mu(\Pi)$ és l'angle d'holomorfia del pla Π.

Corol·lari 1.1.21. *La curvatura seccional de qualsevol pla d'un espai de curvatura holomorfa constant 4ϵ està compresa a l'interval $[\epsilon, 4\epsilon]$, si $\epsilon > 0$ i a l'interval $[4\epsilon, \epsilon]$, si $\epsilon < 0$.*

1.2 Model projectiu

Al llarg d'aquest treball identificarem $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ amb el model projectiu que descrivim a continuació (cf. [Gol99]).

Quan $\epsilon = 0$, prenem el model estàndard, és a dir, l'espai hermític $\mathbb{C}^n$ amb el producte hermític estàndard. Així doncs, al llarg d'aquesta secció suposarem $\epsilon \neq 0$, excepte quan s'indiqui explícitament el contrari.

1.2.1 Punts

Considerem $\mathbb{C}^{n+1}$ amb el producte hermític

$$(z, w) = \mathrm{sign}(\epsilon) z_0 \overline{w_0} + \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j}. \tag{1.2}$$

Definim

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid (z, z) = \epsilon\}. \tag{1.3}$$

$\mathbb{H}$ és una hipersuperfície real de $\mathbb{C}^{n+1}$ (i.e. té dimensió real $2n+1$). Definim els punts de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ com

$$\mathbb{CK}^n(\epsilon) := \pi(\mathbb{H})$$

on

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}/\mathbb{C}^* = \mathbb{CP}^n. \tag{1.4}$$

Observacions 1.2.1. (i) La fibra de π dels punts de $\pi(\mathbb{H}) = \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ és S^1. En efecte, siguin z, $w \in \mathbb{H}$ tals que $\pi(z) = \pi(w)$. Per definició de π, dos punts projecten en el mateix si i només si són múltiples a $\mathbb{C}^{n+1}$, d'on $w = \alpha z$, però també cal $(z, z) = (\alpha z, \alpha z) = \epsilon$. Per tant, $\alpha = e^{i\theta}$ amb $\theta \in \mathbb{R}$ i $\pi^{-1}([z]) \cong S^1$.

(ii) Quan $\epsilon > 0$, tenim que $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ com a conjunt coincideix amb $\mathbb{CP}^n$. En canvi, si $\epsilon < 0$, $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ és un obert de $\mathbb{CP}^n$.

L'estructura diferenciable i de varietat complexa que prenem a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ és la d'un obert de $\mathbb{CP}^n$.

1.2.2 Espai tangent

L'espai tangent en un punt $z \in \mathbb{H}$ és

$$T_z\mathbb{H} = \{w \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \mathrm{Re}(z, w) = 0\}.$$

Els elements de l'espai tangent en un punt $\pi(z) \in \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ són la imatge per $d\pi$ dels elements de l'espai tangent en el punt z. A més, el nucli de $d\pi$ té dimensió 1.

La direcció que s'anul·la per $d\pi$ és Jz ja que és la direcció tangent a la fibra. (Notem que $Jz \in T_z\mathbb{H}$ ja que $\mathrm{Re}(z, Jz) = 0$.) En efecte, sabem que la fibra d'un punt $[z]$ és $\{e^{i\theta}z \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, llavors

$$\left.\frac{\partial(e^{i\theta}z)}{\partial\theta}\right|_{\theta=0} = iz = Jz.$$

Així, podem descomposar l'espai tangent en un punt $z \in \mathbb{H}$ com

$$T_z\mathbb{H} = \langle Jz\rangle \oplus \langle Jz\rangle^{\perp}.$$

L'espai tangent en els punts de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ coincideix, doncs, amb la imatge per la diferencial de la projecció dels vectors de $\langle Jz\rangle^{\perp}$ a $T_z\mathbb{H}$.

Donat un vector $v \in T_{\pi(z)}\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ hi ha infinits vectors de $T_z\mathbb{H}$ que per la diferencial de la projecció ens donen el vector v, però podem distingir el que pertany a $\langle Jz\rangle^{\perp}$, que anomenem *aixecament horitzontal* i denotem per v^L. Tots els altres són suma d'aquest i un múltiple de Jz.

1.2.3 Mètrica

Siguin v, $w \in T_{\pi(z)}\mathbb{CH}^n$. Definim el producte hermític a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ entre els vectors v, w com

$$(v, w)_\epsilon := (v^L, w^L), \tag{1.5}$$

és a dir, el producte hermític definit a $\mathbb{C}^{n+1}$ dels representants canònics dels vectors.

La part real d'aquest producte hermític dóna una mètrica hermítica de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$:

$$\langle v, w\rangle_\epsilon := \mathrm{Re}(v^L, w^L). \tag{1.6}$$

Aquesta mètrica de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ coincideix amb l'anomenada *mètrica de Fubini-Study*, quan $\epsilon > 0$ o amb la *mètrica de Bergmann*, quan $\epsilon < 0$ (cf. [Gol99, p. 74]).

Al llarg d'aquest treball denotarem la mètrica hermítica a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ per $\langle\, ,\rangle$, sense indicar la dependència de la curvatura holomorfa.

Notació 1.2.2. Per tal d'unificar l'estudi dels espais de curvatura holomorfa constant independentment del signe de la curvatura holomorfa, definim, tal com es fa clàssicament, les següents funcions trigonomètriques generalitzades

$$\sin_\epsilon(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\alpha\sqrt{\epsilon})}{\sqrt{\epsilon}}, & \text{si } \epsilon > 0 \\ \alpha, & \text{si } \epsilon = 0 \\ \dfrac{\sinh(\alpha\sqrt{-\epsilon})}{\sqrt{-\epsilon}}, & \text{si } \epsilon < 0 \end{cases}$$

$$\cos_\epsilon(\alpha) = \begin{cases} \cos(\alpha\sqrt{\epsilon}), & \text{si } \epsilon > 0 \\ 1, & \text{si } \epsilon = 0 \\ \cosh(\alpha\sqrt{|\epsilon|}), & \text{si } \epsilon < 0 \end{cases}$$

i

$$\cot_\epsilon(\alpha) = \frac{\cos_\epsilon(\alpha)}{\sin_\epsilon(\alpha)}.$$

1.2.4 Geodèsiques

Les geodèsiques de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ amb el model que estem definint estan donades per la projecció dels punts d'intersecció de $\mathbb{H}$ amb els punts d'un pla a $\mathbb{C}^{n+1}$, el qual té com a vectors directors un representant a $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ d'un punt z de la geodèsica a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ i l'altre vector director l'aixecament horitzontal d'un vector u tangent a la geodèsica en el punt z.

L'expressió de les geodèsiques a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ està donada per $[\gamma(t)] = [\cos_\epsilon(t)z + \sin_\epsilon(t)u]$ on $u \in \langle Jz \rangle^\perp \subset T_z\mathbb{H}$.

La distància entre dos punts de l'espai projectiu o hiperbòlic complex ve donada en termes del producte hermític definit a $\mathbb{C}^{n+1}$ a partir de:

Proposició 1.2.3 ([Gol99] p. 76). *Siguin $x, y \in \mathbb{CK}^n(\epsilon)$, $\epsilon \neq 0$ i d la distància entre els dos punts. Si x' i y' són dos representants de x i y, respectivament, llavors*

$$(\cos_\epsilon d(x,y))^2 = \frac{(x',y')(y',x')}{(x',x')(y',y')}$$

on $(\,,\,)$ denota el producte hermític definit a $\mathbb{C}^{n+1}$ a (1.2).

1.2.5 Isometries

Recordem primer de tot la definició del grup de Lie de matrius $U(p,q)$.

Definició 1.2.4. Sigui $(x,y) := -\sum_{j=0}^{p-1} x_j\overline{y_j} + \sum_{j=p}^{n} x_j\overline{y_j}$ producte hermític de $\mathbb{C}^n$ i $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tals que $p + q = n + 1$. Definim

$$U(p,q) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid (Av, Aw) = (v, w) \text{ amb } v, w \in \mathbb{C}^n\}.$$

El grup $U(n)$ coincideix amb el grup $U(0,n)$, és a dir, considerant el producte estàndard hermític de $\mathbb{C}^n$.

Les matrius del grup $PU(n+1) = U(n+1)/(\text{multiplicar per escalar})$, si $\epsilon > 0$ (resp. les matrius del grup $PU(1,n) = U(1,n)/(\text{multiplicar per escalar})$, si $\epsilon < 0$) actuen de forma natural sobre $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$. A més, conserven la mètrica definida en el model ja que conserven el producte hermític definit a $\mathbb{C}^{n+1}$. Llavors, les matrius de $PU(n+1)$ (resp. $PU(1,n)$) són isometries de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$.

Proposició 1.2.5 ([Gol99] p. 68).

- *Tota isometria de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ prové d'una aplicació lineal a $\mathbb{C}^{n+1}$.*
- *El grup d'isometries de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ és $PU_\epsilon(n)$ on*

$$U_\epsilon(n) = \begin{cases} \mathbb{C}^n \rtimes U(n), & si\ \epsilon = 0, \\ U(n+1) = U(0, n+1), & si\ \epsilon > 0, \\ U(1, n), & si\ \epsilon < 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Per tal de poder unificar l'estudi dels tres espais, representem el grup $\mathbb{C}^n \rtimes U(n)$ a partir de matrius de $\mathbb{C}^{n+1}$ de la següent forma:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \mathbb{C}^n & U(n) \end{array} \right). \tag{1.8}$$

Algunes propietats de la transitivitat del grup d'isometries estan recollides a la següent proposició.

Proposició 1.2.6 ([Gol99] p. 70). *El grup d'isometries de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ actua transitivament*

- *sobre els punts de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$,*
- *sobre el fibrat tangent unitari. És a dir, donat un punt p i un vector v unitari de l'espai tangent en el punt existeix una isometria que porta p en un altre punt q qualsevol i v en un vector unitari qualsevol de l'espai tangent en el punt q.*
- *sobre les direccions holomorfes (veure definició 1.1.10).*

En el següent lema, donem una base de formes invariants per l'esquerra de $U(p, q)$. Provarem que aquestes formes també són invariants per la dreta.

Lema 1.2.7. *Sigui $A = (a_0, \ldots, a_m) \in U(p, q)$, amb p, q, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tals que $p + q = m + 1$. Una base de formes invariants per l'esquerra del grup $U(p, q)$ està donada per $\{\mathrm{Re}(\varphi_{jk}), \mathrm{Im}(\varphi_{jk}), \mathrm{Re}(\varphi_{jj})\}$, $0 \le j \le k \le m$, $j \ne k$, on $\varphi_{ij} = (da_i, a_j)$ i $(x, y) = -\sum_{j=0}^{p-1} x_j \overline{y_j} + \sum_{j=p}^{m} x_j \overline{y_j}$ a $\mathbb{C}^{m+1}$.*

Demostració. De la definició 1.2.4 de $U(p, q)$ es prova que una matriu $A \in U(p, q)$ si i només si $A^{-1} = \varepsilon \overline{A}^t \varepsilon$ on

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} -\mathrm{Id}_p & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_q \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Per trobar les formes invariants per l'esquerra de $U(p, q)$ calculem $A^{-1}dA$ on $A \in U(p, q)$. Escrivim la matriu A en columnes com $A = (a_0, \ldots, a_m)$ de manera que

$$A^{-1}dA = \varepsilon \overline{A}^T \varepsilon dA = \begin{pmatrix} (da_0, -a_0) & \ldots & (da_m, -a_0) \\ \vdots & & \vdots \\ (da_0, -a_{p-1}) & \ldots & (da_m, -a_{p-1}) \\ (da_0, a_p) & \ldots & (da_m, a_p) \\ (da_0, a_m) & \ldots & (da_m, a_m) \end{pmatrix} = (\varphi_{ij})_{ij}. \tag{1.10}$$

Cada entrada de la matriu és una 1-forma donada per $\varphi_{ij} = \pm(da_i, a_j)$.

Observem que cada a_j és una m-tupla de nombres complexos, de manera que les 1-formes φ_{ij} són a valors complexos. (De totes maneres, el grup de Lie és real, és a dir, la varietat diferenciable associada a $U(p, q)$ és real. Els valors complexos apareixen per simplificar la representació del grup en matrius.)

Per trobar les relacions entre les 1-formes invariants per l'esquerra anteriors tenim en compte les següents igualtats:

- $(a_j, a_j) = \pm 1$ i derivant

$$0 = (a_j, da_j) + (da_j, a_j) = \overline{(da_j, a_j)} + (da_j, a_j) = 2\mathrm{Re}(da_j, a_j)$$

d'on obtenim que $\varphi_{jj} = -\overline{\varphi_{jj}}$ i φ_{jj} només pren valors imaginaris purs.

- $(a_j, a_k) = 0$ si $k \neq j$ i derivant

$$0 = (da_j, a_k) + (a_j, da_k)$$

d'on obtenim

$$\begin{cases} \varphi_{jk} = \overline{\varphi_{kj}} & \text{si} \quad j \in \{0, \ldots, p-1\} \quad \text{o} \quad k \in \{0, \ldots, p-1\} \\ \varphi_{jk} = -\overline{\varphi_{kj}} & \text{si no.} \end{cases}$$

Com que $\dim U(p,q) = (p+q)^2$, les formes invariants $\{\mathrm{Re}(\varphi_{jk}), \mathrm{Im}(\varphi_{jk}), \mathrm{Re}(\varphi_{jj})\}$, $0 \leq j \leq k \leq m$, $j \neq k$, formen una base de 1-formes invariants per l'esquerra ja que generen i n'hi ha tantes com la dimensió del grup. $\square$

Per $\epsilon = 0$, representant els elements $A \in \mathbb{C}^n \rtimes U(n)$ com les matrius de (1.8), definim les formes

$$\varphi_{ij} = (da_i, a_j)$$

amb el producte $(\,,)$ estàndard de $\mathbb{C}^{n+1}$.

Definició 1.2.8. Diem que un *grup* és *unimodular* si existeix un element de volum invariant esquerra que és també invariant dreta.

Lema 1.2.9. *El grup $U(p,q)$ és unimodular.*

Demostració. En el lema 1.2.7 hem trobat una base de formes invariants per l'esquerra de $U(p,q)$. Per provar que φ_{ij} són també invariants per la dreta, és a dir, que se satisfà

$$R_B^* \varphi_{ij}(A; v) = \varphi_{ij}(A; v) \quad \forall A, B \in U(p,q), v \in T_A U(p,q),$$

utilitzem l'expressió $\varphi_{ij} = \pm(da_i, a_j)$ i denotem per $a_k(A)$ l'aplicació que retorna la k-èssima columna de la matriu A. Així, per $A, B \in U(p,q)$ i $v \in T_A U(p,q)$ tenim les igualtats següents:

$$\begin{aligned} R_B^* \varphi_{ij}(A; v) &= \varphi_{ij}(R_B(A); d(R_B)(v)) = \pm(da_i(d(R_B)(v)), a_j(R_B(A))) = \pm(da_i(vB), a_j(AB)) \\ &= \pm\Big(-\sum_{k,l=0}^{m} \sum_{r=0}^{p-1} v_i^k b_k^r \overline{a_j^l} \overline{b_l^r} + \sum_{k,l=0}^{m} \sum_{r=p}^{m} v_i^k b_k^r \overline{a_j^l} \overline{b_l^r} \Big) \\ &= \pm\Big(-\sum_{k,l=0}^{p-1} \delta_{kl} v_i^k \overline{a_j^l} + \sum_{k,l=p}^{m} \delta_{kl} v_i^k \overline{a_j^l} \Big) \\ &= \pm\Big(-\sum_{k=0}^{p-1} v_i^k \overline{a_j^k} + \sum_{k=p}^{m} v_i^k \overline{a_j^k} \Big) = \pm(da_i(v), a_j(A)) = \varphi_{ij}(A; v). \end{aligned}$$

Llavors, el grup $U(p,q)$ és unimodular ja que l'element de volum obtingut del producte de les formes φ_{ij} és invariant esquerra i dreta, per ser-ho cada una de les formes. $\square$

1.2.6 Estructura d'espai homogeni

Definició 1.2.10. Sigui (M, g) una varietat de Riemann. Diem que és *homogènia* si donats dos punts $x, y \in M$ qualssevol existeix alguna isometria σ de M tal que $\sigma(x) = y$. És a dir, una varietat de Riemann és homogènia si és espai homogeni del seu grup d'isometries.

Per la proposició 1.2.6 tenim, doncs, que els espais de curvatura holomorfa constant són varietats de Riemann homogènies. Ens interessarà representar-los com a quocients de grups de Lie.

Proposició 1.2.11 ([War71] teorema 3.62 pàgina 123)**.** *Sigui $\eta : G \times M \to M$ una acció transitiva d'un grup de Lie G sobre una varietat diferenciable M. Sigui $m_0 \in M$ i H el grup d'isotropia de m_0. Llavors l'aplicació*

$$\begin{array}{rccc} \beta: & G/H & \longrightarrow & M \\ & gH & \mapsto & \eta(g, m_0) \end{array}$$

és un difeomorfisme.

El grup de Lie $PU_\epsilon(n)$ actua transitivament sobre $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ i el grup d'isotropia d'un punt de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$, per a tot ϵ, és isomorf a $P(U(1) \times U(n))$, subgrup de Lie tancat de $PU_\epsilon(n)$.

Podem representar, doncs, $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ com a quocient de grups de Lie:

$$\mathbb{CK}^n(\epsilon) \cong PU_\epsilon(n)/P(U(1) \times U(n)) \cong U_\epsilon(n)/(U(1) \times U(n)),$$

on el primer difeomorfisme ve donat per $x \mapsto g \cdot P(U(1) \times U(n))$ on $g \in PU_\epsilon(n)$ tal que, si $x_0 \in \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ fixat (com a orígen) llavors $g(x_0) = x$.

Definició 1.2.12. Diem que una varietat de Riemann és un *espai 2-punts homogeni* si el grup d'isometries de la varietat actua transitivament sobre el fibrat tangent unitari, és a dir, sobre les parelles de punt i vector tangent unitari en el punt.

Així, els espais de curvatura holomorfa constant són espais 2-punts homogenis. Els espais de curvatura seccional constant també ho compleixen però, a més, les isometries actuen transitivament per ternes d'un punt i una parella de vectors ortonormals de l'espai tangent en el punt. Aquests espais s'anomenen *3-punts homogenis*. Els espais de curvatura seccional constant no nul·la no ho són ja que les isometries conserven la curvatura seccional i aquesta no és constant per a tota parella de vectors ortonormals.

1.3 Referència mòbil

Definició 1.3.1. Sigui $U \subset M$ un obert d'una varietat diferenciable. Una *referència mòbil ortonormal a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ definida a U* és una aplicació $g_0 : U \to \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ junt amb una col·lecció $g_i : U \to T\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ $(i \in \{1, ..., 2n\})$ tal que $\langle g_i, g_j \rangle_\epsilon = \delta_{ij}$ i $\pi(g_i(p)) = g(p)$ on $\langle \, , \rangle_\epsilon$ denota la mètrica hermítica de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ (definida a (1.6)) i $\pi : T\mathbb{CK}^n(\epsilon) \to \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ és la projecció canònica.

Definició 1.3.2. Sigui V espai vectorial real de dimensió $2n$ amb una estructura quasi-complexa J. Diem que una base ortonormal $\{v_1, v_2, \ldots, v_{2n}\}$ de V és *J-base* si $v_{2i} = Jv_{2i-1}$ per a tot $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Denotarem per $\{e_1, e_{\overline{1}} = Je_1, \ldots, e_n, e_{\overline{n}} = Je_n\}$ les J-bases de l'espai vectorial V i denotarem per $\{\omega_1, \omega_{\overline{1}}, \ldots, \omega_n, \omega_{\overline{n}}\}$ la base dual de la J-base.

Observació 1.3.3. Una J-base és un tipus especial de base ortonormal en un espai vectorial real dotat d'una estructura quasi-complexa J.

Definició 1.3.4. Una referència mòbil ortonormal $\{p; g_1(p), \ldots, g_{2n}(p)\}$ de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ tal que els vectors formen una J-base per a cada $x \in U$, l'anomenem *J-referència mòbil ortonormal*.

Les J-referències ortonormals de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ juguen un paper important ja que s'identifiquen amb els elements del grup d'isometries de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$.

Considerem $\mathcal{F}(\mathbb{CK}^n(\epsilon))$ el fibrat de les J-referències ortonormals de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ format per referències de la forma $(g_0; g_1, Jg_1, \ldots, g_n, Jg_n)$ on $g_0 \in \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ i $\{g_1, Jg_1, \ldots, g_n, Jg_n\}$ és una J-base de $T_{g_0}\mathbb{CK}^n(\epsilon)$.

Proposició 1.3.5. *El fibrat de les J-referències ortonormals $\mathcal{F}(\mathbb{CK}^n(\epsilon))$ s'identifica amb el grup d'isometries de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$.*

Demostració. Estudiem només el cas $\epsilon \neq 0$. Sigui $A \in U_\epsilon(n)$. Per la definició de $U_\epsilon(n)$ de (1.7) tenim que A és una matriu $(n+1) \times (n+1)$ amb entrades complexes tals que les columnes a_i satisfan

$$\begin{cases} (a_0, a_0) = \mathrm{sign}(\epsilon)1, & \\ (a_0, a_i) = 0, & i \in \{1, \ldots, n\}, \\ (a_i, a_j) = \delta_{ij} & i, j \in \{1, \ldots, n\}, \end{cases} \tag{1.11}$$

amb $(\, , \,)$ el producte hermític de $\mathbb{C}^{n+1}$ definit a (1.2).

Per la primera de les propietats anteriors, podem considerar que a_0 correspon a un representant a $\mathbb{H}$ del punt $g_0 = \pi(a_0)$ de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$.

De la segona de les propietats de (1.11) tenim que a_i satisfà la condició per ser vector de $T_{a_0}\mathbb{H}$ (veure secció 1.2.2). A més, tenim que també se satisfà $\mathrm{Re}(Ja_0, a_i) = \mathrm{Im}(a_0, a_i) = 0$ i $\mathrm{Re}(Ja_0, Ja_i) = \mathrm{Re}(a_0, a_i) = 0$. Considerem els vectors $g_i := d\pi(a_i)$ i $Jg_i := d\pi(Ja_i)$ on π és la projecció definida a (1.4).

A partir de la tercera condició de (1.11) tenim que els vectors $\{g_1, Jg_1, \ldots, g_n, Jg_n\}$ formen una J-base (ortonormal) de l'espai tangent en el punt g_0.

Recíprocament, donada una J-referència mòbil $\{g_0; g_1, Jg_1, \ldots, g_n, Jg_n\}$ definida en un obert, podem associar una matriu de $U_\epsilon(n)$ simplement considerant com a primer vector un representant a_0 del punt g_0 amb norma $\mathrm{sign}(\epsilon)1$. Per les altres columnes considerem l'aixecament horitzontal del vector g_j en el punt a_0. Per ser $\{g_1, Jg_1, \ldots, g_n, Jg_n\}$ una J-base i haver escollit l'aixecament horitzontal tenim que les columnes de la matriu que hem construït satisfan les condicions de (1.11) i, per tant, són matrius de $U_\epsilon(n)$. $\square$

Definició 1.3.6. Definim el *fibrat tangent unitari de* $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$, que denotem per $S(\mathbb{CK}^n(\epsilon))$ com

$$S(\mathbb{CK}^n(\epsilon)) = \bigcup_{p \in \mathbb{CK}^n(\epsilon)} T'_p\mathbb{CK}^n(\epsilon)$$

on $T'_p\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ denota l'esfera de vectors unitaris de l'espai tangent de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ en el punt p.

Al lema 1.2.7 hem definit les formes invariants $\{\varphi_{ij}\}$ de $U_\epsilon(n)$ com

$$\varphi_{ij}(A; \cdot) = (da_i(\cdot), a_j)$$

on $A = (a_0, \ldots, a_n) \in U_\epsilon(n)$. Com que les formes $\{\varphi_{ij}\}$ prenen valors complexos podem denotar

$$\varphi_{jk} = \alpha_{jk} + i\beta_{jk} \tag{1.12}$$

Per la identificació de $U_\epsilon(n)$ amb el fibrat de les J-referències $\mathcal{F}(\mathbb{CK}^n(\epsilon))$ les podem pensar com a formes a $\mathcal{F}(\mathbb{CK}^n(\epsilon))$.

Per altra banda, considerem les projeccions canòniques

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(\mathbb{CK}^n(\epsilon)) & \xrightarrow{\pi_1} & S(\mathbb{CK}^n(\epsilon)) & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{CK}^n(\epsilon) \\ (g; g_1, \ldots, Jg_n) & \mapsto & (g, g_1) & \mapsto & g \end{array}$$

i seccions locals

$$\mathbb{CK}^n(\epsilon) \supset U \xrightarrow{s_2} S(\mathbb{CK}^n(\epsilon)) \supset V \xrightarrow{s_1} \mathcal{F}(\mathbb{CK}^n(\epsilon)).$$

A partir de les formes φ_{ij} definides a $\mathcal{F}(\mathbb{CK}^n(\epsilon))$ i les seccions locals anteriors podem definir les formes locals invariants a $S(\mathbb{CK}^n(\epsilon))$ següents

$$s_1^*(\varphi_{ij}), \qquad s_1^*(\alpha_{ij}) \quad \text{i} \quad s_1^*(\beta_{ij})$$

i les formes locals invariants a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$

$$s_2^* s_1^*(\varphi_{ij}), \qquad s_2^* s_1^*(\alpha_{ij}) \quad \text{i} \quad s_2^* s_1^*(\beta_{ij}).$$

Lema 1.3.7. *Les formes $s_1^*\alpha_{01}$, $s_1^*\beta_{01}$ i $s_1^*\beta_{11}$ són globals a $S(\mathbb{CK}^n(\epsilon))$.*

Demostració. Si $V \in T_{(p,v)}(S(\mathbb{CK}^n(\epsilon)))$ llavors

$$\begin{aligned} s_1^*\alpha_{01}(V)_{(p,v)} &= \mathrm{Re}((d\pi_2(V), v)) = \langle d\pi_2(V), v\rangle_\epsilon \\ s_1^*\beta_{01}(V)_{(p,v)} &= \mathrm{Im}((d\pi_2(V), v)), \\ s_1^*\beta_{11}(V)_{(p,v)} &= \mathrm{Im}((\nabla V, v)), \end{aligned}$$

on ∇ denota la connexió de Levi-Civita definida a $\nabla : T(S\mathbb{CK}^n(\epsilon)) \to T\mathbb{CK}^n(\epsilon)$, a partir de la connexió de Levi-Civita de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$. En efecte, un vector $V \in T(S\mathbb{CK}^n(\epsilon))$ és un vector tangent a una corba de vectors unitaris; en cada un d'ells podem aplicar la connexió de Levi-Civita de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$. □

Denotarem per α, β, γ la forma $s_1^*\alpha_{01}$, $s_1^*\beta_{01}$, $s_1^*\beta_{11}$, respectivament.

Observació 1.3.8. La 1-forma α coincideix amb la forma de contacte estàndard del fibrat tangent unitari de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$.

Per altra banda, se satisfà que les formes $s_2^* s_1^*(\varphi_{ij})$ coincideixen amb les formes ϕ_{ij} de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ que definim a continuació.

Suposem que $\{g; g_1, Jg_1, \ldots, g_n, Jg_n\}$ és una J-referència ortonormal de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$. Com que a l'espai tangent de cada punt g, $\{g_1, Jg_1, \ldots, g_n, Jg_n\}$ defineixen una J-base, podem considerar els vectors $\{g_1, \ldots, g_n\}$ com a vectors complexos i aquests formen una base de l'espai tangent $T_g\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ pensat com a subespai vectorial complex. Llavors, té sentit considerar les següents formes diferencials

$$\phi_j(\cdot) = (dg(\cdot), g_j)_\epsilon \quad \text{i} \quad \phi_{jk}(\cdot) = (\nabla g_j(\cdot), g_k)_\epsilon$$

amb $j, k \in \{1, ..., n\}$, on ∇ denota la connexió de Levi-Civita a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ (és a dir, considerem g_j com a vector real, apliquem la connexió de Levi-Civita i el passem a vector complex).

Observem que tant les formes ϕ_j com les formes ϕ_{jk} prenen valors complexos, per això denotem

$$\begin{aligned} \phi_j &= \alpha_j + i\beta_j \\ \phi_{jk} &= \alpha_{jk} + i\beta_{jk}. \end{aligned}$$

En el capítol 3 ens interessarà treballar amb referències ortonormals que no són J-bases. De manera anàloga al cas anterior definim les següents formes.

Si $\{g; g_1, g_2, \ldots, g_{2n-1}, g_{2n}\}$ és una referència ortonormal de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ considerem

$$\omega_j(\cdot) = \langle dg(\cdot), g_j\rangle_\epsilon \quad \text{i} \quad \omega_{jk}(\cdot) = \langle \nabla g_j(\cdot), g_k\rangle_\epsilon \tag{1.13}$$

amb $j, k \in \{1, ..., 2n\}$, on $\langle\, ,\rangle_\epsilon$ denota el producte hermític de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ (definit a (1.5)) i ∇ denota la connexió de Levi-Civita a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$.

Observem que les formes $\{\alpha_j, \beta_j\}$ es poden veure com un cas particular de les formes $\{\omega_j\}$: les obtenim si considerem una J-referència mòbil.

Notació 1.3.9. Al llarg del treball utilitzarem les formes invariants definides a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$, $S(\mathbb{CK}^n(\epsilon))$ o $\mathcal{F}(\mathbb{CK}^n(\epsilon))$, però les denotarem totes per φ_{ij}, α_{ij} i β_{ij} sense el pull-back de la secció, sempre que sigui clar pel context on estan definides les formes.

Tot seguit definim el fibrat normal unitari i provem que les formes α i $d\alpha$, descrites a l'observació 1.3.7, s'hi anul·len.

Definició 1.3.10. Donat un domini $\Omega \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ definim el *fibrat normal unitari exterior de la frontera de* Ω com

$$N(\Omega) = \{(p, v) : p \in \partial\Omega, v \text{ tal que } \langle v, w\rangle_\epsilon \geq 0 \;\forall\, w \text{ tangent a una corba per } p \text{ a } \Omega \text{ i } ||v||_\epsilon = 1\}.$$

Observació 1.3.11. Els resultats principals d'aquest treball, donats als capítols 3 i 4, tenen com a hipòtesis que el domini $\Omega \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ que considerem és compacte amb vora $\mathcal{C}^2$. Anomenarem *domini regular* a un domini que satisfà aquestes hipòtesis. Suposar que els dominis són regulars ens permet treballar amb tècniques de la geometria diferencial (per exemple, parlar de la segona forma fonamental en tot punt de la frontera). De totes maneres, es podria evitar aquesta simplificació ja que els resultats, principalment de valoracions (veure capítol 2), que utilitzarem estan estesos per dominis més generals (cf. [Ale07a]).

Lema 1.3.12. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ domini regular. Les formes α i $d\alpha$ s'anul·len a $N(\Omega) \subset S(\mathbb{CK}^n(\epsilon))$.*

Demostració. Sigui $V \in T_{(p,v)}\Omega$. Llavors se satisfà $\alpha(V)_{(p,N)} = \langle d\pi_2(V), N\rangle = 0$ ja que $d\pi_2(V)$ és un vector tangent a $\partial\Omega$ en el punt p.

Per provar que la 2-forma $d\alpha$ s'anul·la al fibrat normal unitari, considerem la inclusió del fibrat normal unitari al fibrat tangent unitari $i : N(\Omega) \to S(\Omega)$. Utilitzant que la diferencial commuta amb la inclusió tenim el resultat. En efecte,

$$d\alpha|_{N(\Omega)} = (i^* \circ d)(\alpha) = (d \circ i^*)(\alpha) = d(i^*\alpha) = d(0) = 0.$$

□

1.4 Subvarietats

1.4.1 Totalment geodèsiques

Definició 1.4.1. Sigui M una varietat de Riemann. Diem que una subvarietat $N \subset M$ és *totalment geodèsica* si totes les geodèsiques de la subvarietat N són també geodèsiques de M.

Com que $\mathbb{C}^n$ és mètricament equivalent a $\mathbb{R}^{2n}$, les subvarietats totalment geodèsiques de $\mathbb{C}^n$ coincideixen amb les de $\mathbb{R}^{2n}$. Pels altres espais de curvatura holomorfa constant, les subvarietats totalment geodèsiques estan classificades.

Definició 1.4.2. Sigui V un espai vectorial real de dimensió $2n$ amb una estructura quasi-complexa J compatible amb un producte escalar $\langle\,,\rangle$. Diem que els vectors $\{e_1,\ldots,e_m\}$ generen un *subespai complex* si l'espai generat per aquests vectors és J-invariant, és a dir, $J(\mathrm{span}\{e_1,\ldots,e_m\}) = \mathrm{span}\{e_1,\ldots,e_m\}$.

Diem que una *subvarietat* d'una varietat complexa és *complexa* si l'espai tangent de la subvarietat en cada punt és un subespai complex de l'espai tangent de la varietat en el punt.

Definició 1.4.3. Sigui V un espai vectorial real de dimensió $2n$ amb una estructura quasi-complexa J compatible amb un producte escalar $\langle\,,\rangle$. Diem que els vectors $\{e_1,\ldots,e_m\}$ generen un *subespai totalment real* si

$$\langle e_i, Je_j\rangle = 0, \quad \forall i,j \in \{1,\ldots,m\}.$$

Diem que una *subvarietat* d'una varietat complexa és *totalment real* si l'espai tangent de la subvarietat en cada punt és un subespai totalment real de l'espai tangent de la varietat en el punt.

Teorema 1.4.4 ([Gol99] p. 75 i 80)**.** *Sigui $z \in \mathbb{CK}^n(\epsilon)$.*

1. *Si $L \subset T_z\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ és un subespai vectorial complex de dimensió complexa r, llavors existeix una única subvarietat completa complexa totalment geodèsica que passa per z i l'espai tangent en z és L.*

2. *Si $L \subset T_z\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ és un subespai vectorial totalment real de dimensió real k, llavors existeix una única subvarietat completa totalment real totalment geodèsica que passa per z i l'espai tangent en z és L.*

Definició 1.4.5. Anomenem *r-pla complex* a la subvarietat determinada a 1. del teorema anterior. La denotem per L_r.

Anomenem *k-pla totalment real* a la subvarietat determinada a 2. del teorema anterior. La denotem per $L_k^{\mathbb{R}}$.

En el model projectiu els r-plans complexos s'obtenen a partir de la projecció d'un subespai $F \subset \mathbb{C}^{n+1}$ intersecció $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$. El subespai F és el subespai vectorial complex de dimensió $r+1$ format per un representant z' del punt $z = \pi(z')$ i els vectors obtinguts de l'aixecament horitzontal d'una base de vectors de $L \subset T_z\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ (cf. [Gol99, secció 3.1.4]).

De manera anàloga, els k-plans totalment reals s'obtenen de la projecció de $F^{\mathbb{R}} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ intersecció $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$, on $F^{\mathbb{R}}$ és el subespai vectorial de dimensió real $k+1$ format per un representant z' del punt $z = \pi(z')$ i els vectors obtinguts de l'aixecament horitzontal d'una base de vectors de $L \subset T_z\mathbb{CK}^n(\epsilon)$, que en aquest cas, és un subespai totalment real de dimensió k.

Teorema 1.4.6 ([Gol99] p. 82)**.** *Les úniques subvarietats completes totalment geodèsiques de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ són els r-plans complexos, $r \in \{1,\ldots,n-1\}$ i els k-plans totalment reals, $k \in \{1,\ldots,n\}$.*

Corol·lari 1.4.7. *A $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$, $\epsilon \neq 0$, no existeixen hipersuperfícies reals totalment geodèsiques.*

És a dir, no hi ha l'equivalent als hiperplans dels espais de curvatura seccional constant. Les hipersuperfícies que se solen considerar com a substituts dels hiperplans són els anomenats *bisectors*, que tractem a la pàgina 82.

El teorema 1.4.6 serà de gran importància a la resta del treball ja que ens interessa conèixer quines subvarietats (totalment geodèsiques) podem considerar en els espais de curvatura holomorfa constant com a substitutes dels plans (totalment geodèsics) considerats en els espais de curvatura seccional constant.

1.4.2 Esferes geodèsiques

En una varietat de Riemann les *esferes geodèsiques* es defineixen com el conjunt de punts de la varietat que estan a la mateixa distància d'un de fixat que anomenem centre.

En els espais de curvatura seccional constant, les esferes són hipersuperfícies *totalment umbilicals*, és a dir, la segona forma fonamental és, en cada punt, múltiple de la identitat i el mateix múltiple per a tot punt.

Aquest fet no és cert a l'espai projectiu i hiperbòlic complex, on a més, se satisfà que no hi ha cap hipersuperfície totalment umbilical.

Proposició 1.4.8 ([Mon85]). *Les curvatures principals d'una esfera de radi r a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$, $\epsilon \neq 0$ són*

i) $2\cot_\epsilon(2r)$ *amb multiplicitat 1 i direcció principal $-JN$ (on N és el vector normal interior a l'esfera).*

ii) $\cot_\epsilon(r)$ *amb multiplicitat $2n-2$.*

Recordem que $\cos_\epsilon, \sin_\epsilon$ denoten les funcions trigonomètriques generalitzades definides a 1.2.2.

Ens interessarà conèixer el valor de les integrals de curvatura mitjana (cf. definició 2.1.4) per una esfera de radi R de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$.

A partir de la proposició anterior tenim que les funcions simètriques elementals són:

$$\begin{cases} \sigma_0 = 1 \\ \sigma_i = \binom{2n-1}{i}^{-1}\left(\binom{2n-2}{i}\cot_\epsilon^i(R) + \binom{2n-2}{i-1}2\cot_\epsilon^{i-1}(R)\cot_\epsilon(2R)\right) \\ \sigma_{2n-1} = 2\cot_\epsilon^{2n-2}(R)\cot_\epsilon(2R). \end{cases}$$

Per un càlcul simple, es prova que les integrals de curvatura mitjana vénen donades per

$$\begin{cases} M_0 = \mathrm{vol}(\partial B_R) = \frac{2\pi^n}{(n-1)!}\sin_\epsilon^{2n-1}(R)\cos_\epsilon(R) \\ M_i = \frac{2\pi^n}{(2n-1)(n-1)!}((2n+i-1)\cos_\epsilon^{i+1}(R)\sin_\epsilon^{2n-i-1}(R) - i\cos_\epsilon^{i-1}(R)\sin_\epsilon^{2n-i-1}(R)) \\ M_{2n-1} = \frac{2\pi^n}{(n-1)!}(\cos_\epsilon^{2n}(R) + \cos_\epsilon^{2n-2}(R)\sin_\epsilon^2(R)) \end{cases}$$

i

$$\mathrm{vol}(B_R) = \frac{\pi^n}{n!}(\sin_\epsilon(R))^{2n}.$$

1.5 Espai de r-plans complexos

Denotem l'espai de tots els r-plans complexos de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ per $\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}$ i l'espai de tots els r-plans totalment reals de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ per $\mathcal{L}_r^{\mathbb{R}}$ (cf. definició 1.4.5).

La propietat que utilitzarem de l'espai de r-plans complexos és que és un espai homogeni respecte el grup d'isometries de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$. Per provar aquest fet utilitzem el concepte de J-base (veure definició 1.3.2).

Lema 1.5.1. *Les isometries de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ actuen transitivament sobre les J-bases.*

Demostració. Estudiem només el cas $\epsilon \neq 0$. Fixem una J-base $\{e_1, Je_1, \ldots, e_n, Je_n\}$ en el punt $e_0 \in \mathbb{CK}^n(\epsilon)$. Per provar el resultat, n'hi ha prou en veure que donada una altra J-base $\{g_1, Jg_1, \ldots, g_n, Jg_n\}$ de l'espai tangent a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ en el punt g_0, existeix una isometria ρ que porta aquesta J-base a la fixada. Però només cal prendre com isometria $\rho \in U_\epsilon(n)$ la matriu que té per columnes $(\tilde{g}_0, \tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_n)$ on $\tilde{g}_0$ és un representant de g_0 amb norma ϵ i $\tilde{g}_i$ és l'aixecament horitzontal de g_i en el punt $\tilde{g}_0$. De la mateixa manera que a la demostració de la proposició 1.3.5 tenim que ρ és del grup d'isometries. A més, porta la J-base fixada a la donada. $\square$

Del lema anterior tenim:

Lema 1.5.2. *L'espai de r-plans complexos és un espai homogeni respecte el grup d'isometries de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$.*

Demostració. A l'espai tangent de qualsevol punt x d'un r-pla L es pot escollir una base de la forma $\{e_1, Je_1, \ldots, e_r, Je_r\}$ i, per tant, es pot completar a una J-base de tot l'espai. Aplicant el lema anterior hem acabat. $\square$

Per estudiar geometria integral amb r-plans complexos a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ és necessari que l'espai $\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}$ admeti una *densitat invariant* per les isometries de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$. En general, diem densitat al valor absolut d'una forma de grau màxim d'una varietat.

Pel següent lema, en tenim prou amb veure que $\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}$ és quocient de grups unimodulars.

Lema 1.5.3 ([San04]). *Si G, H són unimodulars, llavors G/H admet una densitat invariant.*

El grup d'isotropia d'un r-pla complex és isomorf a

$$U_\epsilon(r) \times U(n-r) = \left\{ X \in \mathcal{M}_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{C}) : X = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right), A \in U_\epsilon(r), B \in U(n-r) \right\} \tag{1.14}$$

ja que aquestes matrius (i només aquestes) deixen invariant un r-pla complex i el seu ortogonal.

Llavors,

$$\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}} \cong U_\epsilon(n)/(U_\epsilon(r) \times U(n-r)).$$

El grup $U_\epsilon(n)$, pel lema 1.2.9, és unimodular i $U_\epsilon(r) \times U(n-r)$ també és grup unimodular ja que el producte de grups unimodulars és unimodular. Per tant, podem afirmar que existeix una densitat invariant a l'espai quocient, és a dir, a l'espai de r-plans complexos.

El següent resultat ens dóna un mètode per trobar explícitament aquesta densitat a l'espai quocient.

Teorema 1.5.4 ([San04] p. 147). *Sigui G un grup de Lie de dimensió n i H un subgrup tancat de G de dimensió $n-m$. Llavors, G/H és espai homogeni de dimensió m. Sigui $\tilde{\omega}$ la m-forma obtinguda del producte de totes les 1-formes invariants de G tals que s'anul·len a H. Llavors existeix una forma de volum invariant ω a G/H si i només si $d\tilde{\omega} = 0$. En aquest cas, $\tilde{\omega}$ és el pull-back de ω per la projecció canònica de G a G/H (llevat factors constants).*

Proposició 1.5.5. *Sigui $\pi : U_\epsilon(n) \longrightarrow U_\epsilon(n)/(U_\epsilon(r) \times U(n-r)) \cong \mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}$. Si dL_r és densitat invariant a $\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}$ llavors*

$$\pi^* dL_r = \bigwedge_{\substack{i=0,\ldots,r \\ j=r+1,\ldots,n}} \varphi_{ij} \wedge \overline{\varphi_{ij}}$$

o, equivalentment,

$$\pi^* dL_r = \bigwedge_{\substack{i=0,\ldots,r \\ j=r+1,\ldots,n}} \alpha_{ij} \wedge \beta_{ij},$$

on $\{\varphi_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij}\}$ són les formes definides al lema 1.2.7 i a (1.12).

Demostració. Per $\mathbb{C}^n$ el resultat es troba a [San04].

Pels altres espais, primer de tot notem que la dimensió (real) de l'espai de r-plans complexos coincideix amb el grau de $\pi^* dL_r$ (i és $2(r+1)(n-r)$). Així doncs, n'hi ha prou en provar que cada una de les formes φ_{ij} amb $i \in \{0, \ldots, r\}$, $j \in \{r+1, \ldots, n\}$ s'anul·la sobre $U_\epsilon(r) \times U(n-r)$. Però, això és directe a partir de la forma de les matrius de $U_\epsilon(r) \times U(n-r)$ de (1.14). $\square$

Donem un exemple de referència mòbil a l'espai de r-plans seguint la definició 1.3.1. Aquest l'utilitzarem al següent apartat.

Prenem com la varietat M (veure definició 1.3.1) l'espai de r-plans complexos $\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}$. Considerem referències mòbils ortonormals de la forma

$$\begin{array}{rccc} g: & U \subset \mathcal{L}_r^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathbb{CK}^n(\epsilon) \\ & L_r & \mapsto & p \in L_r \end{array} \quad \text{i} \quad \begin{array}{rccc} g_i: & U \subset \mathcal{L}_r^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & T\mathbb{CK}^n(\epsilon) \\ & L_r & \mapsto & v_i \in T_{g(L_r)}L_r \end{array}, \tag{1.15}$$

$i \in \{1, \ldots, 2r\}$, de manera que $\langle v_i, v_j \rangle_\epsilon = \delta_{ij}$. Ens interessarà considerar que $Jg_{2k-1}(L_r) = g_{2k}(L_r)$, $k \in \{1, \ldots, r\}$, és a dir, els vectors $\{g_1(L_r), \ldots, g_{2r}(L_r)\}$ formen part d'una J-base en el punt $g(L_r)$. Per abús de notació, denotarem $g(L_r)$ per g i $g_i(L_r)$ per g_i.

Observació 1.5.6. A partir de la correspondència entre el grup $U_\epsilon(n)$ i el fibrat de les J-referències $\mathcal{F}(\mathbb{CK}^n(\epsilon))$ i entre $U_\epsilon(n)/(U_\epsilon(r) \times U(n-r))$ i $\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}$ tenim que $\{g(L_r); g_1(L_r), ..., g_{2r}(L_r)\}$ són seccions de $U_\epsilon(n) \to U_\epsilon(n)/(U_\epsilon(r) \times U(n-r))$.

1.5.1 Expressió de la densitat invariant en termes d'una parametrització

A vegades és interessant conèixer una expressió per la densitat de r-plans complexos en termes més geomètrics. Per exemple, en espais de curvatura seccional constant, Santaló prova el següent resultat:

Proposició 1.5.7 ([San04]). *La mesura invariant de l'espai de plans totalment geodèsics en un espai de curvatura seccional constant k és*

$$dL_r = \cos_k^r(\rho) dx_{n-r} \wedge dL_{(n-r)[O]}$$

on dx_{n-r} és l'element de volum dins l'$(n-r)$-pla ortogonal a L_r per l'origen O i $dL_{(n-r)[O]}$ és l'element de volum de la grassmaniana dels $(n-r)$-plans per l'origen.

Tot seguit, donem una expressió anàloga en els espais de curvatura holomorfa constant, per la mesura de r-plans complexos a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$.

Proposició 1.5.8. *La mesura invariant de l'espai de plans complexos en un espai de curvatura holomorfa constant 4ϵ és*

$$dL_r = \cos_\epsilon^{2r}(\rho) dx_{n-r} \wedge dL_{(n-r)[O]} \tag{1.16}$$

on dx_{n-r} és l'element de volum dins l'$(n-r)$-pla complex ortogonal a L_r per l'origen O i $dL_{(n-r)[O]}$ és l'element de volum de la grassmaniana dels $(n-r)$-plans complexos per l'origen.

Demostració. Per obtenir l'expressió de la densitat invariant de $\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}$ en termes de $dL_{(n-r)[O]}$ i dx_{n-r}, seguim la mateixa idea que a [San04] en el cas de l'espai euclidià i l'espai hiperbòlic real: fixem una J-referència adaptada a l'r-pla complex sobre el punt de distància mínima i la portem a l'origen pel transport paral·lel al llarg de la geodèsica que uneix els dos punts. Llavors relacionem les formes en els dos espais a partir del pull-back d'una secció.

Denotem per $G = U_\epsilon(n)$ i per $H = U_\epsilon(r) \times U(n-r)$, el grup d'isotropia d'un r-pla complex.

La projecció $\pi : G \longrightarrow G/H$ ens dóna, respecte una J-referència ortonormal adaptada a l'r-pla complex i les formes definides al lema 1.2.7

$$\pi^* dL_r = \bigwedge_{j=r+1}^{n} \alpha_{j0} \wedge \beta_{j0} \bigwedge_{\substack{i=1,\ldots,r \\ j=r+1,\ldots,n}} \alpha_{ji} \wedge \beta_{ji}.$$

Sigui $O \in \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ l'origen fixat i $L_r \in \mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}$. Denotem per $p(L_r)$ el punt de L_r a distància mínima de O.

Sigui i una secció local de π. Llavors, $\pi \circ i = \mathrm{id}$ i $i^*\pi^* dL_r = dL_r$ d'on podrem trobar l'expressió de dL_r. A partir de les identificacions ja comentades (cf. observació 1.5.6), prenem com a secció i la definida per $\{p(L_r); g_1, Jg_1, \ldots, g_n, Jg_n\}$, J-referència mòbil en un entorn V de L_r, adaptada a L_r i tal que g_{r+1} és el vector tangent a la geodèsica que uneix $p(L_r)$ i O. Denotem per $\{g^1, Jg^1, \ldots, g^n, Jg^n\}$ la base dual de la base de l'espai tangent $\{g_1, Jg_1, \ldots, g_n, Jg_n\}$ en un punt g_0. A partir de la proposició 1.3.5, considerem la matriu de G corresponent a aquesta J-referència. Denotem les columnes de G també per $(g_0, g_1, \ldots, g_n)$, de manera que $(g_i \circ i)$ denota l'i-èssima columna de la matriu. Aleshores, seguint amb la notació de (1.12), tenim

$$\begin{aligned} i^*(\bigwedge_{j=r+1}^{n} \alpha_{j0} \wedge \beta_{j0}) &= \prod_{j=r+1}^{n} \alpha_{j0}(di) \wedge \beta_{j0}(di) = \prod_{j=r+1}^{n} \langle dg_0(di), g_j\rangle \langle dg_0(di), Jg_j\rangle \\ &= \prod_{j=r+1}^{n} \langle d(g_0 \circ i), g_j\rangle \langle d(g_0 \circ i), Jg_j\rangle = (g_0 \circ i)^*(\bigwedge_{j=r+1}^{n} g^j \wedge Jg^j) \end{aligned}$$

però $(g_0 \circ i) = p(L_r)$ i la forma anterior es pot interpretar com l'element de volum de p dins del subespai generat pels vectors $\{g_{r+1}, Jg_{r+1}, \ldots, g_n, Jg_n\}$, que és un $(n-r)$-pla complex. Per tant,

$$i^*(\bigwedge_{j=r+1}^{n} \alpha_{j0} \wedge \beta_{j0}) = dx_{n-r}.$$

Sigui $G' \subset G$ el subconjunt de totes les J-referències de G tals que g_{r+1} és tangent a la geodèsica que passa per O i g_0 i sigui $G_0 \subset G$ el subgrup de totes les J-referències amb punt base l'origen. Sigui ρ la distància de L_r a l'origen. Denotem per s_ρ el transport paral·lel des de O a $p(L_r)$ al llarg de la geodèsica. Considerem les aplicacions

$$\begin{array}{rccc} \pi_1 : & G' & \longrightarrow & G_0 \\ & (g_0; g_1, \ldots, g_n) & \mapsto & (O; s_\rho^{-1}(g_1), \ldots, s_\rho^{-1}(g_n)) \end{array},$$

$$\begin{array}{rccl} \pi_2 : & G_0 & \longrightarrow & \mathcal{L}^{\mathbb{C}}_{r[O]} \\ & G_0 & \mapsto & r\text{-pla complex per } O \text{ generat per } g_1, \ldots, g_r \end{array},$$

$$\begin{array}{rccc} \pi_3 : & \mathcal{L}^{\mathbb{C}}_r & \longrightarrow & \mathcal{L}^{\mathbb{C}}_{r[0]} \\ & L_r & \mapsto & ((L_r)^{\perp}_O)^{\perp}_O \end{array},$$

on $(L_r)^{\perp}_O$ denota l'espai ortogonal a L_r que passa per O.

Llavors el diagrama següent és commutatiu

$$\begin{array}{ccc} G' & \xrightarrow{\pi_1} & G_0 \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_2} \\ \mathcal{L}^{\mathbb{C}}_r & \xrightarrow{\pi_3} & \mathcal{L}^{\mathbb{C}}_{r[0]}. \end{array} \tag{1.17}$$

Definim corbes x_{ij} en $G_0 \subset G$

$$x_{ij}(t) = (O; g_1, \ldots, g_i(t), Jg_i(t), \ldots, g_j(t), Jg_j(t) \ldots, g_n, Jg_n)$$

on $g_i(t) = \cos(t)g_i + \sin(t)g_j$ i $g_j(t) = -\sin(t)g_i + \cos(t)g_j$ i corbes

$$x_i^j(t) = (O; g_1, \ldots, g_i(t), Jg_i(t), \ldots, g_j(t), Jg_j(t), \ldots, g_n, Jg_n)$$

on $g_i(t) = \cos(t)g_i + \sin(t)Jg_j$ i $g_j(t) = -\sin(t)Jg_i - \cos(t)g_j$.

A partir de la secció local i, tenim

$$i^*\alpha_{ji} = i^*((\pi_1^* \circ s^*)(\alpha_{ji})) = (\pi_1 \circ i)^*(s_\rho^*\alpha_{ji}),$$

$$i^*\beta_{ji} = i^*((\pi_1^* \circ s^*)(\beta_{ji})) = (\pi_1 \circ i)^*(s_\rho^*\beta_{ji}).$$

Cal estudiar, doncs, $(s_\rho^*\alpha_{ij})(\dot{x}_{kl})$ i $(s_\rho^*\alpha_{ij})(\dot{x}_k^l)$ (i el mateix per β_{ij}). Llavors ens cal conèixer $(g_l \circ s_\rho)(x_{ij})$ ja que

$$(s_\rho^*\alpha_{ij})(\dot{x}_{kl}) = \alpha_{ij}(ds_\rho(\dot{x}_{kl})) = \langle g_j\big|_{s_\rho(x_{kl}(t))}, d(g_i \circ s_\rho)\big|_{s_\rho(x_{kl}(t))}(\dot{x}_{kl})\rangle. \tag{1.18}$$

Observem que

$$(g_i \circ s_\rho)(x_{kl}) = \text{columna } i \text{ de la matriu } s_\rho(x_{kl})$$

i que $s_\rho(x_{kl}) \in G'$ l'obtenim del transport paral·lel al llarg de la geodèsica que passa per O i té vector tangent en O el vector $g_{r+1}(t)$. Per tant, per les corbes x_{ij}, x_i^j amb $i, j \neq r+1$ sempre fem el transport paral·lel al llarg de la mateixa geodèsica, en aplicar s_ρ.

Però si movem $g_{r+1}(t)$ llavors el transport paral·lel el fem respecte geodèsiques diferents per a cada t. Ara, com que a les corbes $x_{r+1,j}$, x_{r+1}^j només mouen el vector $g_{r+1}(t)$ en el pla real generat per $\{g_{r+1}(0), g_j(0)\}$, $\{g_{r+1}(0), Jg_j(0)\}$ tenim que $g_0(s_\rho(x_{r+1,j})(t))$, $g_0(s_\rho(x_{r+1}^j)(t))$ descriu un cercle a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ contingut al pla generat per $\{g_{r+1}(0), g_j(0)\}$ o $\{g_{r+1}(0), Jg_j(0)\}$.

A partir de les observacions anteriors obtenim:

- $(g_0 \circ s_\rho)(x_{kl})$: punt a distància ρ de O que hi arribem per la geodèsica amb vector tangent en O, g_{r+1}.

  ◇ $x_{r+1,l}$, $l > r+1$.

  $$(g_0 \circ s_\rho)(x_{r+1,l}) = \cos_\epsilon(\rho)O + \sin_\epsilon(\rho)(\cos(t)g_{r+1} + \sin(t)g_l).$$

  ◇ x_{r+1}^l, $l \geq r+1$.

  $$(g_0 \circ s_\rho)(x_{r+1}^l) = \cos_\epsilon(\rho)O + \sin_\epsilon(\rho)(\cos(t)g_{r+1} + \sin(t)(Jg_l)).$$

  ◇ $x_{1,r+1}$.

  $$(g_0 \circ s_\rho)(x_{1,r+1}) = \cos_\epsilon(\rho)O + \sin_\epsilon(\rho)(-\sin(t)g_1 + \cos(t)g_{r+1})$$

  $g_{r+1}(t) = -g_1\sin(t) + g_{r+1}\cos(t)$.

  ◇ x_1^{r+1}.

  $$(g_0 \circ s_\rho)(x_1^{r+1}) = \cos_\epsilon(\rho)O + \sin_\epsilon(\rho)(-\sin(t)(Jg_1) - \cos(t)g_{r+1}).$$

  ◇ x_{kl}, $k < l$, $k, l \neq r+1$.

  $$(g_0 \circ s_\rho)(x_{kl}) = \cos_\epsilon(\rho)O + \sin_\epsilon(\rho)g_{r+1}.$$

  ◇ x_k^l, $k \leq l$, $k, l \neq r+1$.

  $$(g_0 \circ s_\rho)(x_k^l) = \cos_\epsilon(\rho)O + \sin_\epsilon(\rho)g_{r+1}.$$

- $(g_{r+1} \circ s_\rho)(x_{kl})$:

- $\diamond$ $x_{r+1,l}$, $l > r+1$.

$$(g_{r+1} \circ s_\rho)(x_{r+1,l}) = s_\rho^{-1}(\cos(t)g_{r+1} + \sin(t)g_l)$$

però el transport paral·lel coincideix amb el vector tangent a la geodèsica en temps ρ, és a dir,

$$\begin{aligned} s_\rho^{-1}(\cos(t)g_{r+1}+\sin(t)g_l) &= \text{vector tangent a} \,(\cos_\epsilon(\rho)O+\sin_\epsilon(\rho)(\cos(t)g_{r+1}+\sin(t)g_l)) \\ &= \sin_\epsilon(\rho)O + \cos_\epsilon(\rho)(\cos(t)g_{r+1} + \sin(t)g_l). \end{aligned}$$

- $\diamond$ x_{r+1}^l, $l \geq r+1$.

$$(g_{r+1} \circ s_\rho)(x_{r+1}^l) = \sin_\epsilon(\rho)O + \cos_\epsilon(\rho)(\cos(t)g_{r+1} + \sin(t)(Jg_l)).$$

- $\diamond$ $x_{1,r+1}$.

$$(g_{r+1} \circ s_\rho)(x_{1,r+1}) = \sin_\epsilon(\rho)O + \cos_\epsilon(\rho)(-\sin(t)g_1 + \cos(t)g_{r+1}).$$

- $\diamond$ x_1^{r+1}.

$$(g_{r+1} \circ s_\rho)(x_1^{r+1}) = \sin_\epsilon(\rho)O + \cos_\epsilon(\rho)(\sin(t)(Jg_1) + \cos(t)g_{r+1}).$$

- $\diamond$ x_{kl}, $k < l$, $k, l \neq j$.

$$(g_{r+1} \circ s_\rho)(x_{kl}) = \sin_\epsilon(\rho)O + \cos_\epsilon(\rho)g_{r+1}.$$

- $\diamond$ x_k^l, $k \leq l$, $k, l \neq j$.

$$(g_{r+1} \circ s_\rho)(x_k^l) = \sin_\epsilon(\rho)O + \cos_\epsilon(\rho)g_{r+1}.$$

- $(g_j \circ s_\rho)(x_{kl})$, $j > r+1$:

  - $\diamond$ x_{jl}, $l > j$.
$$(g_j \circ s_\rho)(x_{jl}) = s_\rho^{-1}(\cos(t)g_j + \sin(t)g_l).$$

  - $\diamond$ x_j^l, $l \geq j$.
$$(g_j \circ s_\rho)(x_j^l) = s_\rho^{-1}(\cos(t)g_j + \sin(t)(Jg_l)).$$

  - $\diamond$ x_{lj}, $l < j$.
$$(g_j \circ s_\rho)(x_{lj}) = s_\rho^{-1}(-\sin(t)g_l + \cos(t)g_j).$$

  - $\diamond$ x_l^j, $l \leq j$.
$$(g_j \circ s_\rho)(x_l^j) = s_\rho^{-1}(\sin(t)(Jg_l) + \cos(t)g_j).$$

  - $\diamond$ x_{kl}, $k < l$, $k, l \neq j$.
$$(g_j \circ s_\rho)(x_{kl}) = s_\rho^{-1}(g_j).$$

  - $\diamond$ x_k^l, $k \leq l$, $k, l \neq j$.
$$(g_j \circ s_\rho)(x_k^l) = s_\rho^{-1}(g_j).$$

Per calcular $s_\rho^*\alpha_{ij}$ (i $s_\rho^*\beta_{ij}$) en termes de α_{ij}, β_{ij}, utilitzem (1.18) i evaluem $s_\rho^*\alpha_{ij}$ (i $s_\rho^*\beta_{ij}$) a cada corba x_{kl}, de manera que obtenim:
$(s_\rho^*\alpha_{j1})_g = -(\alpha_{j1})_{g'}$, $j > r+1$,
$(s_\rho^*\alpha_{r+1,1})_g = -\cos_\epsilon(\rho)(\alpha_{r+1,1})_{g'}$,
$(s_\rho^*\beta_{j1})_g = (\beta_{j1})_{g'}$, $j > r+1$,
$(s_\rho^*\alpha_{r+1,1})_g = -\cos_\epsilon(\rho)(\beta_{r+1,1})_{g'}$.

Finalment obtenim

$$s_\rho^*(\bigwedge_{\substack{j=r+1,\dots,n\\ i=1,\dots,r}} \alpha_{ji}\wedge\beta_{j1})_g = \cos_\epsilon^{2r}(\rho)(\bigwedge_{\substack{j=r+1,\dots,n\\ i=1,\dots,r}} \alpha_{j1}\wedge\beta_{j1})_{g'}. \tag{1.19}$$

Per conèixer l'expressió per

$$i^*(\bigwedge_{\substack{j=r+1,\dots,n\\ i=1,\dots,r}} \alpha_{ji}\wedge\beta_{j1})$$

utilitzem el diagrama (1.17) i el càlcul de (1.19) de manera que obtenim:

$$\begin{aligned}
i^*(\bigwedge_{\substack{j=r+1,\dots,n\\ i=1,\dots,r}} \alpha_{ji}\wedge\beta_{ji})_g &= i^*\circ\pi_1^*\circ s_\rho^*(\bigwedge_{\substack{j=r+1,\dots,n\\ i=1,\dots,r}} \alpha_{ji}\wedge\beta_{ji})_g\\
&= i^*\circ\pi_1^*(\cos_\epsilon^{2r}(\rho)(\bigwedge_{\substack{j=r+1,\dots,n\\ i=1,\dots,r}} \alpha_{ji}\wedge\beta_{ji})_{g'}) = i^*\circ\pi_1^*(\cos_\epsilon^{2r}(\rho)\pi_2^* dL_{r[0]})\\
&= \cos_\epsilon^{2r}(\rho)(i^*\circ\pi_1^*\circ\pi_2^*)(dL_{r[0]}) = \cos_\epsilon^{2r}(\rho)\pi_3^*(dL_{r[0]})\\
&= \cos_\epsilon^{2r}(\rho)dL_{(n-r)[0]}
\end{aligned}$$

per l'expressió de la densitat invariant esquerra dels r-plans que passen per un punt (1.20) i per tenir dualitat entre els r-plans complexos que passen per un punt i els $(n-r)$-plans complexos que passen pel mateix punt.

Així doncs, hem provat

$$dL_r = \cos_\epsilon^{2r}(\rho)dx_{n-r}dL_{(n-r)[O]}.$$

□

1.5.2 Densitat de r-plans complexos que contenen un q-pla complex fixat

Denotem per $\mathcal{L}_{r[q]}^{\mathbb{C}}$ l'espai de r-plans complexos que contenen un q-pla complex fixat. Denotem per $H_{[q]} := U_\epsilon(q)$ el grup d'isotropia d'un q-pla complex fixat a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ i per $H_{r[q]}$ el grup d'isotropia d'un r-pla complex que conté el q-pla complex fixat. Observem que $H_{[q]}$ actua transitivament a $\mathcal{L}_{r[q]}^{\mathbb{C}}$.

Per altra banda, si L_q^0 és el q-pla complex fixat, llavors podem definir la projecció

$$\begin{array}{rccc}\pi: & H_{[q]} & \longrightarrow & H_{[q]}/H_{r[q]}\\ & g & \mapsto & L_{r[q]} = gL_q^0.\end{array}$$

Com que els elements de $H_{r[q]}$ no poden barrejar vectors del q-pla complex fixat amb els del seu ortogonal tenim

$$H_{r[q]} \cong \left\{ \left(\begin{array}{c||c|c} A & 0 & 0\\ \hline\hline 0 & B & 0\\ \hline 0 & 0 & C\end{array}\right),\ A\in U_\epsilon(q), B\in U(r-q), C\in U(n-r)\right\},$$

$$\pi^* dL_{r[q]} = \bigwedge_{\substack{q+1\leq i\leq r\\ r+1\leq j\leq n}} \alpha_{ij}\wedge\beta_{ij}. \tag{1.20}$$

(Les formes que s'han anul·lat respecte el grup d'isometries, en aquest cas $H_{[q]}$, són les que estan dins la caixa gran remarcada.)

1.5.3 Densitat de q-plans complexos que estan continguts en un r-pla complex fixat

Denotem per $\mathcal{L}_q^{(r)}$ l'espai de q-plans complexos que estan continguts en un r-pla complex fixat. Fixem un r-pla complex L_r i un q-pla complex $L_q^{(r)}$ contingut dins L_r. Considerem la projecció $\pi : U_\epsilon(r) \to U_\epsilon(r)/(U_\epsilon(q)\times U(r-q))$ on $U_\epsilon(r)$ denota el grup d'isometries de l'r-pla complex fixat i $U_\epsilon(q)\times U(r-q)$ el grup d'isotropia d'un q-pla complex contingut a l'r-pla complex. Llavors,

$$\pi^* dL_q^{(r)} = \bigwedge_{\substack{1\leq i\leq q\\ q+1\leq j\leq r}} \alpha_{ij}\wedge\beta_{ij} \bigwedge_{q+1\leq j\leq r} \alpha_{j0}\wedge\beta_{j0} = \bigwedge_{\substack{0\leq i\leq q\\ q+1\leq j\leq r}} \alpha_{ij}\wedge\beta_{ij}.$$

1.5.4 Mesura de r-plans complexos que tallen una esfera

Per trobar el valor d'aquesta mesura utilitzem l'expressió de la mesura de r-plans de (1.16) i també l'expressió del Jacobià per l'aplicació de canvi a coordenades polars, que s'expressa com (cf. [Gra73])

$$\frac{\cos_\epsilon(R)\sin_\epsilon^{2n-1}(R)}{|\epsilon|^{(n-1)/2}}.$$

Recordem que $\cos_\epsilon$ i $\sin_\epsilon$ denoten les funcions trigonomètriques generalitzades definides a 1.2.2.

Fixem com a origen el centre de l'esfera. Llavors, expressant l'element de volum de $\mathbb{CK}^{n-r}(\epsilon)$ (l'espai ortogonal a l'r-pla complex que talla l'esfera) en coordenades polars tenim

$$\begin{aligned}
m(L\in\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}} \ :\ B_R\cap L\neq\emptyset) &= \int_{B_R\cap L\neq\emptyset} dL_r = \int_{G^{\mathbb{C}}_{n,n-r}}\int_{B_R\cap L} \cos_\epsilon^{2r}(\rho)dx_{n-r}\wedge dG^{\mathbb{C}}_{n,n-r[O]}\\
&= \frac{\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n,n-r})}{|\epsilon|^{(n-1)/2}}\int_{S^{2(n-r)-1}}\int_0^R \cos_\epsilon^{2r+1}(\rho)\sin_\epsilon^{2(n-r)-1}(\rho)d\rho dS^{2(n-r)-1}\\
&= \frac{\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n,n-r})}{|\epsilon|^{(n-1)/2}}\mathrm{vol}(S^{2(n-r)-1})\int_0^R \cos_\epsilon^{2r+1}(\rho)\sin_\epsilon^{2(n-r)-1}(\rho)d\rho\\
&= \frac{\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n,n-r})}{|\epsilon|^{(n-1)/2}}\mathrm{vol}(S^{2(n-r)-1})\int_0^R \cos_\epsilon(\rho)(1+\sin_\epsilon^2(\rho))^r\sin_\epsilon^{2(n-r)-1}(\rho)\\
&= \frac{\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n,n-r})}{|\epsilon|^{(n-1)/2}}\mathrm{vol}(S^{2(n-r)-1})\sum_{i=0}^r\binom{r}{i}\int_0^R \cos_\epsilon(\rho)\sin_\epsilon^{2(n-r+i)-1}(\rho)\\
&= \frac{\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n,n-r})}{|\epsilon|^{(n-1)/2}}\mathrm{vol}(S^{2(n-r)-1})\sum_{i=0}^r\binom{r}{i}\frac{\sin_\epsilon^{2(n-r+i)}(R)}{2(n-r+i)}.
\end{aligned}$$

Al capítol 4 donarem una expressió general per a la mesura de r-plans complexos que tallen un domini regular, de manera que l'expressió anterior la podrem interpretar en termes d'integrals de curvatura mitjana i altres valoracions definides al capítol 2.

1.5.5 Reproductibilitat de les Quermassintegrale

El capítol 3 d'aquest treball està dedicat a provar que la integral de curvatura mitjana no satisfà la propietat de reproductibilitat (veure definició 3.4.1). En aquesta secció provem que les Quermassintegrale sí que satisfan una propietat de reproductibilitat.

Definició 1.5.9. Sigui Ω un domini de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$. Per $r \in \{1, \ldots, n-1\}$ definim

$$W_r(\Omega) = \frac{(n-r)\cdot O_{r-1}\cdots O_0}{n\cdot O_{n-2}\cdots O_{n-r-1}}\int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}}\chi(\Omega\cap L_r)dL_r$$

on O_i denota l'àrea de l'esfera de radi 1 a l'espai euclidià estàndard. A més, definim

$$W_0(\Omega) = \mathrm{vol}(\Omega) \qquad \text{i} \qquad W_n(\Omega) = \frac{O_{n-1}}{n}\chi(\Omega).$$

Les constants estan triades per analogia als espais de curvatura seccional constant.

Proposició 1.5.10. *Sigui Ω un domini de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$. Llavors se satisfà*

$$W_r(\Omega) = c\int_{\mathcal{L}_q^{\mathbb{C}}} W_r(\Omega\cap L_q)dL_q$$

per a $1 \leq r \leq q \leq n-1$ i c constant que només depèn de n, r i q.

Demostració. La demostració que seguirem és l'anàloga a la donada per Santaló (cf. [San04]) per l'espai euclidià.

Per definició es compleix

$$\int_{\mathcal{L}_q^{\mathbb{C}}} W_r(\Omega\cap L_q)dL_q = \frac{(q-r)O_{r-1}\ldots O_0}{qO_{q-1}\ldots O_{q-r-1}}\int_{\mathcal{L}_q^{\mathbb{C}}}\int_{\Omega\cap L_r^{(q)}\neq\emptyset} dL_r^{(q)}\wedge dL_q.$$

Expressem les densitats $dL_r^{(q)}$, dL_q, $dL_{q[r]}$, dL_r en termes de les formes φ_{ij} que hem definit al lema 1.2.7 (ometen el valor absolut per denotar les densitats).

$$dL_q = \bigwedge_{\substack{q<i\leq n\\ 0\leq j\leq q}} \varphi_{ij}\overline{\varphi_{ij}}$$

$$dL_r^{(q)} = \bigwedge_{\substack{1\leq i\leq r\\ r+1\leq j\leq q}} \varphi_{ij}\overline{\varphi_{ij}}$$

$$dL_{q[r]} = \bigwedge_{\substack{r+1\leq i\leq q\\ q+1\leq j\leq n}} \varphi_{ij}\overline{\varphi_{ij}}$$

$$dL_r = \bigwedge_{\substack{r<i\leq n\\ 0\leq j\leq r}} \varphi_{ij}\overline{\varphi_{ij}}$$

Per tant,

$$dL_r^{(q)}\wedge dL_q = \bigwedge_{r+1\leq j\leq n}\varphi_{j0}\overline{\varphi_{j0}} \bigwedge_{\substack{r+1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq r}}\varphi_{ij}\overline{\varphi_{ij}} \bigwedge_{\substack{q+1\leq i\leq n\\ r+1\leq j\leq q}}\varphi_{ij}\overline{\varphi_{ij}}$$

i

$$dL_{q[r]}\wedge dL_r = \bigwedge_{\substack{r+1\leq j\leq q\\ q+1\leq j\leq n}}\varphi_{ij}\overline{\varphi_{ij}} \bigwedge_{\substack{r+1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq r}}\varphi_{ij}\overline{\varphi_{ij}} \bigwedge_{r+1\leq i\leq n}\varphi_{ij}\overline{\varphi_{i0}}.$$

Per tant, se satisfà la següent igualtat de densitats

$$dL_r^{(q)} \wedge dL_q = dL_{q[r]} \wedge dL_r.$$

Aplicant-ho a la integral obtenim

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{L}_q^{\mathbb{C}}} \int_{\Omega \cap L_r^{(q)} \neq \emptyset} dL_r^{(q)} \wedge dL_q &= \int_{\Omega \cap L_r \neq \emptyset} \int_{L_{q[r]}} dL_{q[r]} \wedge dL_r \\ &= \int_{\mathcal{L}_{q[r]}^{\mathbb{C}}} dL_{q[r]} \int_{\Omega \cap L_r \neq \emptyset} dL_r = cW_r(\Omega).\end{aligned}$$

□

Capítol 2

Introducció a les valoracions

La noció de valoració a $\mathbb{R}^n$ va ser introduïda per Blaschke al 1955 a [Bla55]. Recentment, Alesker, entre d'altres, l'ha generalitzat en varietats diferenciables. Un resum sobre la història de les valoracions es troba a [MS83] on es donen també diverses referències.

En aquest capítol introduïm breument la teoria de valoracions, centrant-nos en els conceptes i resultats que utilitzarem en els següents capítols.

A l'última secció, donem la definició de certes valoracions en espais de curvatura holomorfa constant, generalitzant així, en alguns casos, la definició d'aquestes valoracions a $\mathbb{C}^n$. Donem també relacions entre les diferents valoracions introduïdes.

2.1 Definició i propietats bàsiques

Sigui V un espai vectorial de dimensió real n. Denotem per $\mathcal{K}(V)$ el conjunt dels dominis compactes convexos no buits de V.

Definició 2.1.1. El funcional $\phi : \mathcal{K}(V) \to \mathbb{R}$ s'anomena *valoració* si

$$\phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B) - \phi(A \cap B)$$

sempre que $A, B, A \cup B \in \mathcal{K}(V)$.

Observació 2.1.2. El teorema d'extensió de Groemer afirma que tota valoració estén de manera única al conjunt d'unions finites de convexos.

Els primers exemples de valoracions a $\mathbb{R}^n$ són el volum d'un convex, l'àrea de la vora i la característica d'Euler. Els volums intrínsecs, que es poden definir com els coeficients del polinomi que s'obté a la fórmula de Steiner, també són valoracions. Recordem aquesta definició.

Considerem a $\mathbb{R}^n$ un domini convex Ω i denotem per Ω_r el domini paral·lel a distància r. El domini paral·lel a distància r consta de tots els punts que estan a distància menor o igual que r d'un punt del domini inicial.

La fórmula de Steiner relaciona el volum del domini paral·lel amb el volum i altres funcionals del domini inicial.

Proposició 2.1.3 (Fórmula de Steiner)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domini compacte i Ω_r el domini paral·lel a distància r. Llavors, el volum de Ω_r s'expressa com un polinomi en r i els coeficients són múltiples de certes valoracions $V_i : \mathcal{K}(V) \to \mathbb{R}$, $i \in \{0, \ldots, n\}$, anomenats* volums intrínsecs. *Concretament*

$$\mathrm{vol}(\Omega_r) = \sum_{i=0}^{n} r^{n-i} \omega_{n-i} V_i(\Omega) \tag{2.1}$$

on ω_{n-i} denota el volum de la bola euclidiana $(n-i)$-dimensional de radi 1.

Demostració. (del fet que els volums intrínsecs V_i són valoracions.)

Suposem A, B, $A \cup B \in \mathcal{K}(V)$. Llavors se satisfà $(A \cap B)_r = A_r \cap B_r$ i $(A \cup B)_r = A_r \cup B_r$. Per tant,

$$\mathrm{vol}((A \cup B)_r) = \mathrm{vol}(A_r) + \mathrm{vol}(B_r) - \mathrm{vol}(A_r \cap B_r) = \mathrm{vol}(A_r) + \mathrm{vol}(B_r) - \mathrm{vol}((A \cap B)_r) \quad \forall r.$$

Aplicant (2.1) deduïm que els volums intrínsecs són valoracions. □

Alguns volums intrínsecs es corresponen amb termes geomètrics coneguts:

- $V_n(\Omega) = \mathrm{vol}(\Omega)$,
- $V_{n-1}(\Omega) = \mathrm{vol}(\partial\Omega)/2$,
- $V_0(\Omega) = \chi(\Omega)$.

Observem que la fórmula de Steiner té sentit per a qualsevol domini convex (independentment de la regularitat de la frontera del domini) però, sovint, ens interessarà considerar dominis convexos tals que la seva vora és una hipersuperfície orientada de classe $\mathcal{C}^2$. Si apliquem la fórmula anterior en aquest cas obtenim les anomenades *integrals de curvatura mitja.*

Definició 2.1.4. Sigui S una hipersuperfície orientada de classe $\mathcal{C}^2$ d'una varietat de Riemann M de dimensió n. Si $x \in S$, denotem la segona forma fonamental de S en el punt x per II_x. Definim la *i-èssima integral de curvatura mitjana de S* com

$$M_i(S) = \binom{n-1}{i}^{-1} \int_S \sigma_i(\mathrm{II}_x)dx$$

on $\sigma_i(\mathrm{II}_x)$ denota l'i-èssima funció simètrica elemental corresponent als valors propis de II_x.

Llavors, la fórmula de Steiner a $\mathbb{R}^n$ s'expressa com:

$$\mathrm{vol}(\Omega_r) = \mathrm{vol}(\Omega) + \sum_{i=0}^{n-1} r^{n-i} \frac{\binom{n}{i}}{n} M_{n-i-1}(\partial\Omega).$$

Sovint es defineix $M_{-1}(\partial\Omega) := \mathrm{vol}(\Omega)$.

Per tant, la relació entre els volums intrínsecs i les integrals de curvatura mitja, per dominis convexos amb vora de classe $\mathcal{C}^2$, és:

$$V_i(\Omega) = \frac{\binom{n}{i}}{n\omega_{n-i}} M_{n-i-1}(\partial\Omega).$$

Definició 2.1.5. Una valoració ϕ es diu *contínua* si és contínua respecte la mètrica de Hausdorff.

Recordem que la *distància de Hausdorff* entre dos conjunts compactes A, B està donada per:

$$d_{\mathrm{Haus}}(A, B) = \max\{\sup_{a\in A} \inf_{b\in B}\{d(a,b)\}, \sup_{b\in B} \inf_{a\in A}\{d(a,b)\}\}$$

on $d(a, b)$ és la distància definida a l'espai ambient de A i B.

Exemple 2.1.6. Els volums intrínsecs són valoracions contínues, de totes maneres, hi ha exemples interessants de valoracions no contínues. Per exemple, l'*àrea afí* és una valoració a l'espai euclidià però no és contínua (cf. [KR97]). L'àrea afí d'un domini convex $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es defineix com la integral de l'arrel $(n+1)$-èssima de la curvatura de Gauss generalitzada (cf.

[Sch93] notes de les seccions 1.5 i 2.5) de la frontera del domini convex respecte la mesura de Hausdorff $(n-1)$-dimensional de la frontera:

$$AS(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \sqrt[n+1]{K_x}\,dx.$$

Una de les propietats més interessants que satisfà és que és invariant respecte les translacions i transformacions lineals amb determinant 1.

Definició 2.1.7. Donada una $(2n-1)$-forma ω del fibrat tangent unitari de V, $S(V)$, i una mesura $\mathcal{C}^\infty$, η considerem, per cada domini regular Ω,

$$\int_\Omega \eta + \int_{N(\Omega)} \omega$$

on $N(\Omega)$ denota el fibrat normal de la vora del domini. El funcional resultant s'anomena *valoració* $\mathcal{C}^\infty$.

Definició 2.1.8. Sigui $\Omega \in \mathcal{K}(V)$. Diem que una valoració $\phi : \mathcal{K}(V) \to \mathbb{R}$ és:

- *invariant per translacions* si
$$\phi(\psi\Omega) = \phi(\Omega)$$
per a tota ψ translació de l'espai vectorial V;
- *invariant respecte un grup G que actua a V* si
$$\phi(g\Omega) = \phi(\Omega)$$
per a tot $g \in G$;
- *homogènia de grau k* si
$$\phi(\lambda\Omega) = \lambda^k \phi(\Omega) \text{ per tot } \lambda > 0,\ k \in \mathbb{R};$$
- *parell* (resp. *senar*) si
$$\phi(-1 \cdot \Omega) = (-1)^\epsilon \phi(\Omega)$$
amb ϵ parell (resp. senar);
- *monòtona* si
$$\phi(\Omega_1) \geq \phi(\Omega_2) \text{ per tot } \Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{K}(V) \text{ i } \Omega_1 \supset \Omega_2.$$

L'espai de les valoracions contínues invariants per translacions es denota per $\mathrm{Val}(V)$, el subespai de $\mathrm{Val}(V)$ de les valoracions homogènies de grau k per $\mathrm{Val}_k(V)$ i el subespai de $\mathrm{Val}(V)$ de les valoracions parells (resp. senars) per $\mathrm{Val}^+(V)$ (resp. $\mathrm{Val}^-(V)$).

Exemple 2.1.9. El volum intrínsec V_i és una valoració contínua invariant per translacions i homogènia de grau i.

Observació 2.1.10. L'espai $\mathrm{Val}(V)$ té estructura d'espai vectorial de dimensió infinita.

El següent resultat de P. McMullen [McM77] dóna una descomposició de l'espai de valoracions segons el grau i la paritat:

Teorema 2.1.11 ([McM77])**.** *Sigui $n = \dim V$. Llavors*

$$\mathrm{Val}(V) = \bigoplus_{i=0}^{n} \mathrm{Val}_i(V) \quad i \quad \mathrm{Val}(V) = \mathrm{Val}^+(V) \oplus \mathrm{Val}^-(V).$$

El grup lineal $GL(V)$ de les transformacions lineals invertibles de V actua de manera natural a $\mathrm{Val}(V)$:

$$(g\phi)(\Omega) = \phi(g^{-1}(\Omega)) \text{ per } g \in GL(V), \phi \in \mathrm{Val}(V), \Omega \in \mathcal{K}(V).$$

Aquesta acció és contínua i preserva el grau d'homogeneïtat de la valoració.

Teorema 2.1.12 (Teorema d'irreductibilitat)**.** *Sigui V espai vectorial de dimensió n. La representació natural de $GL(V)$ a $\mathrm{Val}_i^+(V)$ i $\mathrm{Val}_i^-(V)$ és irreductible per a tot $i \in \{0, \dots, n\}$. És a dir, no hi ha cap subespai propi tancat de $GL(V)$ que sigui invariant per l'acció de $GL(V)$.*

A partir del teorema anterior es prova el següent resultat que relaciona les valoracions contínues amb les valoracions $\mathcal{C}^\infty$.

Teorema 2.1.13 ([Ale01])**.** *En un espai vectorial V, les valoracions $\mathcal{C}^\infty$ invariants per translacions són denses dins de l'espai de valoracions contínues invariants per translacions.*

Si dotem V d'una mètrica euclidiana, tenim que qualsevol subgrup G del grup ortogonal actua sobre $\mathrm{Val}(V)$ i té sentit considerar l'espai $\mathrm{Val}^G(V) \subset \mathrm{Val}(V)$ de valoracions invariants sota l'acció del grup $G \ltimes V$. El següent resultat d'Alesker dóna la condició perquè aquest espai sigui de dimensió finita.

Proposició 2.1.14 (Proposition 2.6 [Ale07a])**.** *L'espai $\mathrm{Val}^G(V)$ és de dimensió finita si i només si G actua transitivament sobre l'esfera unitat de V.*

2.2 Teorema de Hadwiger

Una vegada donades les definicions de 2.1.8 podem enunciar el teorema de Hadwiger que afirma que totes les valoracions a $\mathbb{R}^n$ contínues, invariants per les isometries de $\mathbb{R}^n$ són combinació lineal dels volums intrínsecs.

Teorema 2.2.1 ([Had57])**.** *La dimensió de l'espai de valoracions a $\mathbb{R}^n$ contínues $O(n)$-invariants i invariants per translacions és*

$$\dim \mathrm{Val}^{O(n)}(\mathbb{R}^n) = n + 1$$

i una base d'aquest espai està donada per

$$V_0, V_1, \dots, V_{n-1}, V_n$$

on V_i denota l'i-èssim volum intrínsec.

Observació 2.2.2. A partir del teorema anterior de Hadwiger tenim que a $\mathbb{R}^n$ el subespai de les valoracions de grau $k \in \{0, \dots, n\}$ té dimensió 1.

L'observació anterior permet provar de manera senzilla alguns resultats clàssics de geometria integral a $\mathbb{R}^n$ com les fórmules de reproductibilitat, de Crofton o la fórmula cinemàtica.

Exemple 2.2.3.

- *Fórmula de Crofton.* Sigui Ω un domini compacte convex de $\mathbb{R}^n$. Un dels problemes que tracta la geometria integral és l'estudi de la mesura del conjunt de plans de dimensió r que tallen el convex $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si denotem per $\mathcal{L}_r$ l'espai de tots els plans de dimensió r de $\mathbb{R}^n$ i per dL_r la (única excepte un factor constant) densitat invariant d'aquest espai (veure secció 1.1) tenim:

$$\int_{\mathcal{L}_r} \chi(\Omega \cap L_r) dL_r = cV_{n-r}(\Omega).$$

L'expressió anterior es pot obtenir observant que la integral de l'esquerra és una valoració de grau $(n-r)$.

Al capítol 4 d'aquest treball estudiem l'expressió de la mesura de plans complexos que tallen un domini regular a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$, i al capítol 5 la mesura de plans totalment reals de dimensió n que tallen un domini regular.

- *Reproductibilitat dels volums intrínsecs.* Si Ω és un domini compacte convex a $\mathbb{R}^n$, es compleix la següent igualtat, anomenada fórmula de reproductibilitat pels volums intrínsecs:
$$\int_{\mathcal{L}_r} V_i^{(r)}(\partial\Omega \cap L_r)dL_r = cV_i(\partial\Omega),$$
on $\mathcal{L}_r$ denota l'espai de r-plans de $\mathbb{R}^n$ i c és una constant que només depen de i, n i r.

  Clarament la integral de l'esquerra és una valoració contínua de grau i. La igualtat segueix del teorema de Hadwiger, ja que l'i-èssim volum intrínsec és una valoració contínua d'aquest grau. Per trobar el valor de c se sol utilitzar l'anomenat *template method*, que consisteix en avaluar cada costat de la igualtat en un domini senzill (per exemple, esferes) i ajustar així el valor de c. A [San04] es troba una demostració directa (mitjançant les integrals de curvatura mitja) d'aquesta igualtat i es dóna el valor de c.

- *Fórmula cinemàtica.* Tot i que en aquest treball no tractarem les fórmules cinemàtiques, volem donar, per completesa, la clàssica fórmula cinemàtica de Blaschke-Santaló.

  Un dels altres problemes d'estudi de la geometria integral consisteix en mesurar els moviments de l'espai que porten un convex a tallar-ne un altre de fix. A $\mathbb{R}^n$, si denotem per $\overline{O(n)}$ el grup de moviments de l'espai, tenim l'anomenada fórmula cinemàtica fonamental:
$$\int_{\overline{O(n)}} \chi(\Omega_1 \cap g\Omega_2)dg = \sum_{i=0}^{n} c_{n,i}V_i(\Omega_1)V_{n-i}(\Omega_2). \tag{2.2}$$
Aquesta fórmula es pot demostrar utilitzant el teorema de Hadwiger dues vegades i considerant el cas de dues esferes de radis diferents.

  Observem que la integral de l'esquerra es pot pensar com a funcional en el primer convex Ω_1 o en el segon, Ω_2. Si el pensem respecte el segon convex, a partir del teorema de Hadwiger tenim
$$\int_{\overline{O(n)}} \chi(\Omega_1 \cap g\Omega_2)dg = \sum_{i=0}^{n} c_i(\Omega_1)V_i(\Omega_2)$$
on els coeficients $c_i(\Omega_1)$ depenen d'Ω_1. Ara bé, la integral que estem estudiant també és una valoració respecte el convex Ω_1, per tant, els coeficients $c_i(\Omega_1)$ han de ser valoracions, de manera que, altra vegada pel teorema de Hadwiger, obtenim que s'ha de satisfer
$$\int_{\overline{O(n)}} \chi(\Omega_1 \cap g\Omega_2)dg = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_{ij}V_j(\Omega_1)V_i(\Omega_2).$$
Per arribar a l'expressió (2.2), primer de tot observem que l'expressió és simètrica respecte Ω_1 i Ω_2, per tant, $c_{ij} = c_{ji}$. Per provar que la majoria de les constants c_{ij} s'anul·len utilitzem el *template method*, és a dir, apliquem la igualtat en convexos concrets, en aquest cas, a una esfera B_r de radi r i a una altra B_R de radi R.

  Utilitzant que les esferes són invariants respecte les rotacions tenim:
$$\begin{aligned}\int_{\overline{O(n)}} \chi(B_r \cap gB_R)dg &= \int_{O(n)}\int_{\mathbb{R}^n} \chi(B_r \cap (\phi B_R + v))dvd\phi \\ &= \mathrm{vol}(O(n))\int_{\mathbb{R}^n} \chi(B_r \cap (B_R + v))dv = \mathrm{vol}(O(n))(r+R)^n\omega_n.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Per altra banda, per ser el volum intrínsec V_i una valoració de grau i obtenim

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_{ij} V_j(B_r) V_i(B_R) = \sum_{i,j=0}^{n} c_{ij} r^j R^i V_j(B_1) V_i(B_1). \tag{2.4}$$

De manera que, tant a (2.3) com a (2.4), obtenim un polinomi amb variables r i R. Comparant els coeficients veiem que en el sumatori de (2.4) cal $i + j = n$ quan $c_{ij} \neq 0$.

Per acabar de calcular explícitament les constants necessitem el valor dels volums intrínsecs en el cas d'una esfera de radi arbitrari. Com que el domini paral·lel a distància r d'una esfera de radi R és una esfera de radi $r + R$, podem calcular fàcilment els volums intrínsecs a partir de la fórmula de Steiner, obtenint

$$V_i(B_r) = r^i \binom{n}{i} \frac{\omega_n}{\omega_{n-i}}.$$

2.3 Teorema d'Alesker

Recentment, Alesker ha donat l'equivalent del teorema de Hadwiger per $V = \mathbb{C}^n$, l'espai hermític estàndard amb grup d'isometries $IU(n) = \mathbb{C}^n \rtimes U(n)$. Com que el grup d'isometries de $\mathbb{C}^n$ és més petit que el de $\mathbb{R}^{2n}$ pot passar que certes valoracions que no són invariants respecte el grup d'isometries de $\mathbb{R}^{2n}$ sí que ho siguin respecte el de $\mathbb{C}^n$. En efecte, això succeeix.

Teorema 2.3.1 ([Ale03], teorema 2.1.1)**.** *Sigui* $\mathrm{Val}^{U(n)}(\mathbb{C}^n)$ *l'espai de valoracions contínues* $U(n)$*-invariants i invariants per translacions de* $\mathbb{C}^n$*. Llavors,*

$$\dim \mathrm{Val}^{U(n)}(\mathbb{C}^n) = \binom{n+2}{2}$$

i la dimensió del subespai de $\mathrm{Val}^{U(n)}(\mathbb{C}^n)$ *de les valoracions de grau* k *és* $\dfrac{\min\{k, 2n-k\}}{2} + 1$.

Alesker també dóna a [Ale03] dues bases de valoracions contínues a $\mathbb{C}^n$. La primera base consisteix en integrals del volum de projecció. Sigui Ω un domini convex de $\mathbb{C}^n$ i k, l dos enters tals que $0 \leq k \leq 2l \leq 2n$, llavors defineix

$$C_{k,l}(\Omega) := \int_{G_{n,l}^{\mathbb{C}}} V_k(\mathrm{Pr}_{L_l}(\Omega)) dL_l$$

on $G_{n,l}^{\mathbb{C}}$ denota l'espai de l-plans complexos de $\mathbb{C}^n$ per l'orígen (veure secció 1.5), $\mathrm{Pr}_{L_l}(\Omega)$ denota la projecció ortogonal de Ω a L_l i V_k el k-èssim volum intrínsec. Les valoracions $\{C_{k,l}\}$ amb $0 \leq k \leq 2l \leq 2n$ defineixen una base de valoracions contínues $U(n)$-invariants i invariants per translacions a $\mathbb{C}^n$. El subíndex k coincideix amb el grau de la valoració.

Els elements $\{U_{k,p}\}$, $0 \leq 2p \leq k \leq 2n$, de la segona base estan definits com

$$U_{k,p}(\Omega) := \int_{\mathcal{L}_{n-p}^{\mathbb{C}}} V_{k-2p}(\Omega \cap L_{n-p}) dL_{n-p} \tag{2.5}$$

on $\mathcal{L}_{n-p}^{\mathbb{C}}$ denota l'espai de $(n-p)$-plans complexos afins de $\mathbb{C}^n$ (veure secció 1.5) i V_{k-2p} el $(k-2p)$-èssim volum intrínsec. El subíndex k indica el grau d'homogeneïtat de la valoració.

Exemple 2.3.2. Escrivim explícitament la base de valoracions $\{U_{k,p}\}$ a $\mathbb{C}^3$. A $\mathbb{C}^3$ hi ha $\binom{5}{2} = 10$ valoracions linealment independents. Per cada grau k tenim tantes valoracions linealment independents com enters p satisfacin

$$0 \leq p \leq \frac{\min\{k, 2n-k\}}{2}.$$

Suposem que Ω és un domini convex de $\mathbb{C}^3$.

$k=0$: Només hi ha un valor de p, $p=0$ i

$$U_{0,0}(\Omega)=V_0(\Omega)=\chi(\Omega).$$

$k=1$: Només hi ha un valor de p, $p=0$ i

$$U_{1,0}(\Omega)=V_1(\Omega).$$

$k=2$: Hi ha dos valors de p, $p=0,1$.

Si $p=0$ llavors

$$U_{2,0}(\Omega)=V_2(\Omega).$$

Si $p=1$ llavors

$$U_{2,1}(\Omega)=\int_{\mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}}V_0(\Omega\cap L_2)dL_2=\int_{\mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}}\chi(\Omega\cap L_2)dL_2.$$

$k=3$: Hi ha dos valors de p, $p=0,1$.

Si $p=0$ llavors

$$U_{3,0}(\Omega)=V_3(\Omega).$$

Si $p=1$ llavors

$$U_{3,1}(\Omega)=\int_{\mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}}V_1(\Omega\cap L_2)dL_2.$$

$k=4$: Hi ha dos valors de p, $p=0,1$.

Si $p=0$ llavors

$$U_{4,0}(\Omega)=V_4(\Omega).$$

Si $p=1$ llavors

$$U_{4,1}(\Omega)=\int_{\mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}}V_2(\Omega\cap L_2)dL_2.$$

$k=5$: Només hi ha un valor de p, $p=0$ i

$$U_{5,0}(\Omega)=V_5(\Omega)=\frac{1}{2}\mathrm{vol}(\partial\Omega).$$

$k=6$: Només hi ha un valor de p, $p=0$ i

$$U_{6,0}(\Omega)=V_6(\Omega)=\mathrm{vol}(\Omega).$$

Observem que hem obtingut tots els volums intrínsecs $V_j(K)$, $j\in\{0,...,6\}$, igual que en el cas de $\mathbb{R}^6$, però a $\mathbb{C}^3$ tenim tres valoracions linealment independents més.

De la mateixa manera que a $\mathbb{R}^n$, el fet de tenir una base de $\mathrm{Val}^{U(n)}(\mathbb{C}^n)$ permet enunciar una fórmula cinemàtica. El problema és que no sembla possible trobar les constants a partir del *template method*. Alesker, en el mateix article [Ale03] enuncia els següents resultats.

Teorema 2.3.3 ([Ale03] teorema 3.1.1). *Siguin Ω_1, Ω_2 dominis compactes de $\mathbb{C}^n$ amb vora $\mathcal{C}^\infty$ a trossos tals que per a tot $U\in IU(n)$ la intersecció $\Omega_1\cap U(\Omega_2)$ té un nombre finit de components. Llavors,*

$$\int_{U\in IU(n)}\chi(\Omega_1\cap U(\Omega_2))dU=\sum_{k_1+k_2=2n}\sum_{p_1=0}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}\sum_{p_2=0}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}\kappa(k_1,k_2,p_1,p_2)U_{k_1,p_1}(\Omega_1)U_{k_2,p_2}(\Omega_2),$$

on $\kappa(k_1,k_2,p_1,p_2)$ són certes constants que només depenen de n,k_1,k_2,p_1,p_2.

Teorema 2.3.4 ([Ale03] teorema 3.1.2)**.** *Sigui Ω un domini compacte de $\mathbb{C}^n$ amb vora $\mathcal{C}^\infty$ a trossos i $0 < q < n$, $0 < 2p < k < 2q$. Llavors,*

$$\int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}} U_{k,p}(\Omega \cap L_r) dL_r = \sum_{p=0}^{[k/2]+n-q} \gamma_p \cdot U_{k+2(n-q),p}(\Omega),$$

on les constants γ_p només depenen de n, q, i p.

Teorema 2.3.5 ([Ale03] teorema 3.1.3)**.** *Sigui Ω un domini compacte de $\mathbb{C}^n$ amb vora $\mathcal{C}^\infty$ a trossos. Llavors,*

$$\int_{\mathcal{L}_n^{\mathbb{R}}} \chi(\Omega \cap L_n) dL_n^{\mathbb{R}} = \sum_{p=0}^{[n/2]} \beta_p \cdot U_{n,p}(\Omega),$$

on $\mathcal{L}_n^{\mathbb{R}}$ denota l'espai de plans Lagrangians (és a dir, els plans totalment reals de dimensió màxima n) de $\mathbb{C}^n$ i β_p són certes constants que només depenen de n i p.

Les constants del teorema 2.3.3 estan donades per Bernig-Fu a [BF08]. Aquestes constants van ser calculades utilitzant mètodes indirectes i altres bases de valoracions de $\mathbb{C}^n$. En aquest treball donem les constants, en alguns casos, del teorema 2.3.4 i les del teorema 2.3.5, respecte una altra base de valoracions.

A [BF08] es donen diverses bases de $\mathrm{Val}^{U(n)}(\mathbb{C}^n)$. En aquest treball (als capítols 4 i 5) utilitzarem una de les bases definides a [BF08] i la seva extensió en els altres espais de curvatura holomorfa constant $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$. La definició d'aquestes valoracions i la seva extensió a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ es dóna a la secció 2.4.2.

Finalment, remarcar que a partir de la proposició 2.1.14 apareix una altra via de generalització de la teoria de valoracions en espais vectorials. Per aquest resultat tenim que per a qualsevol grup que actua transitivament sobre l'esfera podem trobar un teorema tipus Hadwiger, és a dir, l'espai de valoracions contínues invariants per translacions i pel grup té dimensió finita, per tant, té sentit calcular la seva dimensió i una base. També es pot donar una expressió per la fórmula cinemàtica en aquesta situació.

Ara acabem de comentar el cas en què el grup que actua transitivament és $U(n)$ i abans hem comentat el cas de $SO(n)$, però hi ha resultats per altres grups.

Els grups que actuen transitivament sobre l'esfera estan classificats i són (cf. [Bor49], [Bor50], [MS43]) sis sèries infinites

$$SO(n), U(n), SU(n), Sp(n), Sp(n) \cdot U(1), Sp(n) \cdot Sp(1)$$

i tres grups excepcionals

$$G_2, \mathrm{Spin}(7), \mathrm{Spin}(9).$$

Alesker i Bernig han resolt el problema de donar un teorema tipus Hadwiger, una fórmula cinemàtica (i l'estructura algebraica) per alguns d'aquests grups (cf. [Ale04] per $G = SU(2)$, [Ber08a] per $G = SU(n)$ i [Ber08b] per $G = G_2$ i $G = \mathrm{Spin}(7)$).

2.4 Valoracions en espais de curvatura holomorfa constant

En aquesta secció definim diverses valoracions a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ i donem relacions entre elles.

2.4.1 Valoracions $\mathcal{C}^\infty$ en varietats

El concepte de valoració $\mathcal{C}^\infty$ en varietats diferenciables s'ha començat a estudiar recentment (cf. [Ale06a], [Ale06b], [AF08], [Ale07b], [AB08]). Després de donar una definició de valoració $\mathcal{C}^\infty$ en varietats, s'hi ha definit un producte i s'ha demostrat que se segueixen complint moltes de les propietats importants per desenvolupar la teoria (com la de dualitat), que en aquest treball no comentarem.

La definició 2.1.7 es pot estendre en varietats diferenciables.

Definició 2.4.1. Sigui M una varietat diferenciable i Ω un domini amb vora regular (és a dir, Ω compacte i $\partial\Omega$ hipersuperfície regular de classe $\mathcal{C}^\infty$). Donada una $(2n-1)$-forma ω de $S(M)$, i una mesura $\mathcal{C}^\infty$, η considerem, per cada Ω,

$$\int_\Omega \eta + \int_{N(\Omega)} \omega,$$

on $N(\Omega) \subset S(M)$ és el conjunt de normals unitaris exteriors de $\partial\Omega$. El funcional resultant s'anomena *valoració* $\mathcal{C}^\infty$.

Observació 2.4.2. Una definició més general, anàloga a la definició 2.1.1 apareix a [Ale06b] i s'anomenen *funcionals finitament additius.*

Als espais de curvatura seccional constant, les valoracions $\mathcal{C}^\infty$ invariants són ben conegudes. Aquests espais, tenen el mateix grup d'isotropia que $\mathbb{R}^n$ i des del punt de vista d'espais homogenis es poden tractar de manera semblant. No obstant això, un teorema tipus Hadwiger no hi és conegut, és a dir, no es coneix una base de l'espai de funcionals finitament additius continus invariants pel grup d'isometries de l'espai. El problema per trobar la dimensió d'aquest espai és la falta d'un resultat anàleg al teorema 2.1.13.

De totes maneres, són molts els resultats de geometria integral coneguts per aquests espais. Per exemple, Santaló [San04, p.309] ja va provar que també és vàlida una propietat de reproductibilitat així com l'expressió per la fórmula cinemàtica i la mesura de plans totalment geodèsics que tallen un convex.

En vista d'aquests resultats de Santaló i el coneixement d'una base de valoracions a $\mathbb{C}^n$, en aquest treball estudiem fórmules clàssiques de geometria integral en els espais de curvatura holomorfa constant, és a dir, a l'espai hermític estàndard, a l'espai projectiu complex i a l'espai hiperbòlic complex.

2.4.2 Volums intrínsecs hermítics

Bernig i Fu [BF08] defineixen els volums intrínsecs hermítics a $\mathbb{C}^n$. En aquest apartat recordem aquesta definició i l'estenem a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ seguint [Par02].

Bernig i Fu a [BF08, p. 14] defineixen a $T\mathbb{C}^n$, les 1-formes invariants α, β i γ i les 2-formes invariants θ_0, θ_1, θ_2 i θ_s següents. Siguin $(z_1, \ldots, z_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ les coordenades canòniques de $T\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ amb $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ i $\zeta_i = \xi_i + \sqrt{-1}\eta_i$. Llavors

$$\theta_0 := \textstyle\sum_{i=1}^n d\xi_i \wedge d\eta_i, \qquad \theta_1 := \sum_{i=1}^n (dx_i \wedge d\eta_i - dy_i \wedge d\xi_i),$$

$$\theta_2 := \textstyle\sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i, \qquad \theta_s := \sum_{i=1}^n (dx_i \wedge d\xi_i + dy_i \wedge d\eta_i),$$

$$\alpha := \textstyle\sum_{i=1}^n \xi_i dx_i + \eta_i dy_i, \qquad \beta := \sum_{i=1}^n \xi_i dy_i - \eta_i dx_i,$$

$$\gamma := \textstyle\sum_{i=1}^n \xi_i d\eta_i - \eta_i d\xi_i.$$

α és la forma de contacte (veure observació 1.3.8) i θ_s és la forma simplèctica de $T\mathbb{C}^n$. Recordem que una *2-forma* ω definida en una varietat de dimensió $2m$ es diu *simplèctica* si és tancada, no-degenerada i $\omega^m \neq 0$.

Les formes anteriors, però, només estan definides per $\epsilon = 0$ ja que només a $\mathbb{C}^n$ hi ha coordenades canòniques. De totes maneres, podem expressar les formes en termes d'una referència mòbil de $S(\mathbb{C}^n)$ (i a partir d'aquí estendre-les per a tot $\epsilon \in \mathbb{R}$). L'expressió en termes d'una referència mòbil també permet veure que estan ben definides, és a dir, no depenen de les coordenades elegides. Sigui $(x, v) \in S(\mathbb{C}^n)$ i sigui $\{x; e_1 := v, Je_1, \ldots, e_n, Je_n\}$ una J-referència mòbil definida en un entorn de x. Llavors,

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \sum_{i=2}^{n} \alpha_{1i} \wedge \beta_{1i}, \\ \theta_1 &= \sum_{i=2}^{n} (\alpha_i \wedge \beta_{1i} - \beta_i \wedge \alpha_{1i}), \\ \theta_2 &= \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \wedge \beta_i, \end{aligned} \tag{2.6}$$

on α_i, β_i, α_{ij}, β_{ij} són les formes definides a (1.12) però interpretades com a formes a $S(\mathbb{C}^n)$.

Observació 2.4.3. A partir de l'expressió de θ_0, θ_1 i θ_2 en termes d'una referència mòbil podem definir aquestes 2-formes a $S(\mathbb{CK}^n(\epsilon))$ per a qualsevol ϵ.

Observació 2.4.4. A [Par02] es consideren 2-formes invariants a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ definides de manera anàloga a l'anterior (veure la secció 2.4.3).

Proposició 2.4.5 (Proposició 2.2.1 [Par02]). *L'àlgebra $\Omega^*(S(\mathbb{CK}^n(\epsilon)))$ de $\mathbb{R}$-formes diferencials invariants definides al fibrat tangent unitari $S(\mathbb{CK}^n(\epsilon))$ està generada per*

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \theta_0,\ \theta_1,\ \theta_2,\ \theta_s.$$

A partir de les formes anteriors Bernig i Fu defineixen les famílies de $(2n-1)$-formes $\beta_{k,q}$ i $\gamma_{k,q}$ a $S(\mathbb{C}^n)$, que s'estenen de manera natural a $S(\mathbb{CK}^n(\epsilon))$. De la proposició anterior, tal com ja s'observa a [Par02], tenim que totes les $(2n-1)$-formes invariants de $S(\mathbb{CK}^n(\epsilon))$ tals que no s'anul·len sobre el fibrat normal d'un domini Ω (és a dir, les que no són múltiples de α o θ_s, veure lema 1.3.12) són les donades per $\beta_{k,q}$ i $\gamma_{k,q}$ que definim tot seguit.

Definició 2.4.6. Siguin $k, q \in \mathbb{N}$ tals que $\max\{0, k-n\} \leq q \leq \frac{k}{2} < n$. Llavors definim les següents $(2n-1)$-formes a $S(\mathbb{CK}^n(\epsilon))$

$$\beta_{k,q} := c_{n,k,q}\beta \wedge \theta_0^{n-k+q} \wedge \theta_1^{k-2q-1} \wedge \theta_2^q, \quad k \neq 2q$$

$$\gamma_{k,q} := \frac{c_{n,k,q}}{2}\gamma \wedge \theta_0^{n-k+q-1} \wedge \theta_1^{k-2q} \wedge \theta_2^q, \quad n \neq k-q$$

on

$$c_{n,k,q} := \frac{1}{q!(n-k+q)!(k-2q)!\omega_{2n-k}}$$

i ω_{2n-k} denota el volum de la bola euclidiana de dimensió $2n-k$ i radi 1.

Definició 2.4.7. Donat $\Omega \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ domini regular, les formes $\beta_{k,q}$ i $\gamma_{k,q}$ defineixen les següents valoracions $\mathcal{C}^\infty$ invariants a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ (per $\max\{0, k-n\} \leq q \leq \frac{k}{2} < n$)

$$B_{k,q}(\Omega) := \int_{N(\Omega)} \beta_{k,q} \quad (k \neq 2q) \quad \text{i} \quad \Gamma_{k,q}(\Omega) := \int_{N(\Omega)} \gamma_{k,q} \quad (n \neq k-q)$$

on $N(\Omega)$ denota el fibrat normal unitari de Ω (veure definició 1.3.10).

A $\mathbb{C}^n$ les valoracions anteriors satisfan $B_{k,q}(\Omega) = \Gamma_{k,q}(\Omega)$ ja que $d\beta_{k,q} = d\gamma_{k,q}$. Per $\epsilon \neq 0$ cap de les formes $\beta_{k,q}$ té la mateixa diferencial que $\gamma_{k,q}$.

La diferencial de les formes θ_0, θ_1 i θ_2 està donada a [BF08] per $\epsilon = 0$. A partir de les equacions d'estructura de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ (cf. [KN69]), de la mateixa manera que a [Par02], trobem la diferencial per a tot ϵ.

Lema 2.4.8. *A $S(\mathbb{CK}^n(\epsilon))$ se satisfà*

$$\begin{aligned} d\alpha &= -\theta_s, & d\theta_0 &= -\epsilon(\alpha \wedge \theta_1 + \beta\theta_s), \\ d\beta &= \theta_1, & d\theta_1 &= d\theta_2 = d\theta_s = 0, \\ d\gamma &= 2\theta_0 - 2\epsilon(\alpha \wedge \beta + \theta_2). \end{aligned}$$

A la següent proposició donem la relació entre les valoracions $\{B_{k,q}(\Omega)\}$ i $\{\Gamma_{k,q}(\Omega)\}$ a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$.

Proposició 2.4.9. *A $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$, per a tota parella d'enters (k,q) tals que* $\max\{0, k-n\} < q < k/2 < n$ *se satisfà*

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,q}(\Omega) &= B_{k,q}(\Omega) - \epsilon \frac{c_{n,k,q}}{c_{n,k+2,q+1}} B_{k+2,q+1}(\Omega) \\ &= B_{k,q}(\Omega) - \epsilon \frac{(q+1)(2n-k)}{2\pi(n-k+q)} B_{k+2,q+1}(\Omega). \end{aligned}$$

Demostració. Denotem per I l'ideal generat per α, $d\alpha$ i les formes exactes a $N(\Omega)$. Si dues formes λ i ρ de grau $2n-1$ són iguals mòdul I llavors pel lema 1.3.12

$$\int_{N(\Omega)} \lambda = \int_{N(\Omega)} \rho.$$

Per tant, només cal provar

$$\gamma_{k,q} \equiv \beta_{k,q} - \epsilon \frac{c_{n,k,q}}{c_{n,k+2,q+1}} \beta_{k+2,q+1} \qquad \text{mod } I. \tag{2.7}$$

Considerem la forma $\eta = (\theta_s - \beta \wedge \gamma) \wedge \theta_0^{n-k+q-1} \theta_1^{k-2q-1} \theta_2^q$. Com que $d\eta$ és exacta tenim $d\eta \equiv 0 \mod I$. Per altra banda, a partir de les diferencials donades al lema 2.4.8 tenim

$$d\eta \equiv -\gamma\theta_0^{n-k+q-1}\theta_1^{k-2q}\theta_2^q + 2\beta\theta_0^{n-k+q}\theta_1^{k-2q-1}\theta_2^q - 2\epsilon\beta\theta_0^{n-k+q-1}\theta_1^{k-2q-1}\theta_2^{q+1} \mod I.$$

Utilitzant la definició de $\gamma_{k,q}$ i $\beta_{k,q}$ obtenim la relació (2.7). □

Observació 2.4.10. Per $n = 2, 3$, les relacions de la proposició anterior ja es troben a la tesi de Park [Par02].

Tenint en compte les relacions de la proposició 2.4.9 definim els volums intrínsecs hermítics a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$.

Definició 2.4.11. Per $\max\{0, k-n\} \leq q \leq \frac{k}{2} < n$, definim els *volums intrínsecs hermítics* $\mu_{k,q}$ *a* $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ com

$$\mu_{k,q}(\Omega) := \begin{cases} B_{k,q}(\Omega) & \text{si } k \neq 2q \\ \Gamma_{2q,q}(\Omega) & \text{si } k = 2q. \end{cases} \tag{2.8}$$

Per $k = 2n$ definim $\mu_{2n,n}(\Omega) := \mathrm{vol}(\Omega)$.

Observació 2.4.12. A $\mathbb{C}^n$ els volums intrínsecs hermítics formen una base de les valoracions contínues invariants pel grup d'isometries de $\mathbb{C}^n$ (cf. [BF08]).

En la definició anterior de $\mu_{k,q}$ hem fet una elecció en principi arbitrària, tot i que en vista de la relació de la proposició 2.4.9 pot ser més o menys natural. De totes maneres, seria interessant conèixer si hi ha alguna elecció millor, que satisfaci propietats geomètriques o algebraiques més naturals.

2.4.3 Relació amb les valoracions definides per Park

Donem, per completesa, les valoracions que defineix Park a [Par02].

Definició 2.4.13. Denotem $\theta_{00} = -\alpha \wedge \beta + \theta_2$, $\theta_{01} = -\beta \wedge \gamma + \theta_s$, $\theta_{10} = -\alpha \wedge \gamma + \theta_1$, $\theta_{11} = \theta_0$. Si $\kappa = \sigma \wedge \{a, b, c\}$ on $\sigma \in \{\alpha, \beta\}$ i $\{a, b, c\} = \frac{1}{a!b!c!}\theta_{11}^a \wedge \theta_{00}^b \wedge \theta_{10}^c$, llavors les integrals

$$\Phi^\kappa(\Omega) = \int_{N(\Omega)} \kappa$$

són valoracions $\mathcal{C}^\infty$ invariants pel grup d'isometries de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$.

La relació entre aquestes valoracions i els volums intrínsecs hermítics s'obté directament a partir de la definició de cada valoració i està donada per:

Proposició 2.4.14. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ un domini regular. Llavors,*

$$B_{k,q}(\Omega) = \frac{1}{(k-2q)\omega_{2n-k}} \Phi^{\beta\{n-k+q,q,k-2q-1\}}(\Omega),$$
$$\Gamma_{k,q}(\Omega) = \frac{1}{2(n-k+q)\omega_{2n-k}} \Phi^{\gamma\{n-k+q-1,q,k-2q\}}(\Omega).$$

2.4.4 Altres integrals de curvatura

Sigui M una varietat de Kähler de dimensió complexa n i suposem que $S \subset M$ és una hipersuperfície real. Llavors podem definir de manera canònica una distribució de dimensió complexa $n-1$ dins del fibrat tangent de S de la següent manera. Sigui N_x el vector normal unitari de S en el punt x. Sigui J l'estructura complexa de M. El vector JN_x és un vector tangent a S en el punt x. Considerem els vectors ortogonals a JN_x dins del tangent a S en el punt x. Aquests formen un subespai complex de dimensió $n-1$. Denotem per $\mathcal{D}$ la distribució formada per aquests subespais. Llavors definim també les integrals de curvatura mitjana restringides a la distribució $\mathcal{D}$ de la següent manera:

Definició 2.4.15. Sigui S una hipersuperfície d'una varietat de Kähler M de dimensió complexa n. Si $x \in S$, denotem la segona forma fonamental de S en el punt p per II_x i la segona forma fonamental restringida a la distribució $\mathcal{D}$ per $\mathrm{II}_x|_{\mathcal{D}}$. Definim la *$r$-èssima integral de curvatura mitjana de S restringida a $\mathcal{D}$*, $1 \leq r \leq 2n-2$, com

$$M_r^{\mathcal{D}}(S) = \binom{2n-2}{r}^{-1} \int_S \sigma_r(\mathrm{II}_p|_{\mathcal{D}})dp$$

on $\sigma_r(\mathrm{II}_p|_{\mathcal{D}})$ denota la r-èssima funció simètrica elemental corresponent a $\mathrm{II}_x|_{\mathcal{D}}$.

Al llarg del treball serà important la idea de restringir les integrals de curvatura mitjana a la distribució $\mathcal{D}$. Tindrà un paper especial la primera integral de curvatura mija restringida a $\mathcal{D}$, és a dir, la integral de la traça de la segona forma fonamental restringida a la distribució, així com la integral dels elements "complementaris", és a dir, la integral de la curvatura normal de la direcció JN:

$$(2n-1)M_1(\partial\Omega) - (2n-2)M_1^{\mathcal{D}}(\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} k_n(JN)dx = 2\omega_2\Gamma_{2n-2,n-1}(\Omega). \tag{2.9}$$

2.4.5 Relació dels volums intrínsecs hermítics amb la segona forma fonamental

En aquesta secció donem una descripició dels volums intrínsecs hermítics en termes de la segona forma fonamental.

A la demostració del teorema 4.3.1 necessitarem conèixer certes propietats, interessants per elles mateixes, de l'expressió de les $(2n-1)$-formes invariants una vegada expressades en termes de la segona forma fonamental de $\partial\Omega$ i no en termes de les formes de connexió d'una referència mòbil, tal com estan definides. Per expressar les formes anteriors respecte les entrades de la segona forma fonamental (respecte una base fixada) cal considerar el pull-back per l'aplicació canònica

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \partial\Omega & \longrightarrow & N(\Omega) \\ & x & \mapsto & (x, N_x) \end{array}. \tag{2.10}$$

Estudiem algunes propietats de $\varphi^*(\beta_{k,q})$ i $\varphi^*(\gamma_{k,q})$.

Sigui $x \in \partial\Omega \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ i $\{x; e_1 = \varphi(x), e_{\overline{1}} = Je_1, \ldots, e_n, e_{\overline{n}} = Je_n\}$ una J-referència mòbil definida en un entorn de x. Considerem les 1-formes $\{\alpha_i, \beta_i, \alpha_{1i}, \beta_{1i}\}$ i les 2-formes $\{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_s\}$ donades a (2.6).

Notació 2.4.16. Per tal de simplificar la notació de les expressions següents denotarem β_i com $\alpha_{\bar{i}}$ i β_{1i} com $\alpha_{1\bar{i}}$ i utilitzarem el conjunt d'índexs $I = \{\overline{1}, 2, \overline{2}, \ldots, n, \overline{n}\}$.

Ara, la relació entre les formes de connexió α_{1i}, $i \in I$, i la segona forma fonamental $(h_{ij} = \mathrm{II}(e_i, e_j))$ està donada per

$$\alpha_{1i} = \sum_{j \in I} h_{ij}\alpha_i, \tag{2.11}$$

d'on obtenim el següent lema.

Lema 2.4.17. *En la notació anterior,*

$$\begin{aligned}
\varphi^*(\beta) &= \alpha_{\overline{1}}, \\
\varphi^*(\gamma) &= \sum_{j \in I} h_{\overline{1}j}\alpha_j, \\
\varphi^*(\theta_0) &= \sum_{i=2}^{n} \sum_{j,l \in I} h_{ij}h_{\bar{i}l}\alpha_j \wedge \alpha_l, \\
\varphi^*(\theta_1) &= \sum_{i=2}^{n} \left(\sum_{j \in I} h_{\bar{i}j}\alpha_i \wedge \alpha_j - \sum_{l \in I} h_{il}\alpha_{\bar{i}} \wedge \alpha_l \right), \\
\varphi^*(\theta_2) &= \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \wedge \alpha_{\bar{i}}.
\end{aligned}$$

Per altra banda, cada una de les formes $\varphi^*(\beta_{k,q})$ és una forma de grau màxim, per tant, un múltiple de l'element de volum $dx = \alpha_{\overline{1}} \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_{\overline{2}} \wedge \cdots \wedge \alpha_{\overline{n}}$ de $\partial\Omega$. Així doncs, $\varphi^*(\beta_{k,q})$ queda determinada per aquest múltiple, que es pot expressar com un polinomi amb variables les entrades de la segona forma fonamental h_{ij} (respecte una certa J-referència que hem fixat).

A [Par02] es calcula explícitament el pull-back de les formes $\beta_{k,q}$ i $\gamma_{k,q}$ per dimensions $n = 2, 3$. En el lema següent donem algunes propietats generals del pull-back d'aquestes formes per a qualsevol n.

Lema 2.4.18. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ un domini regular i $\varphi : \partial\Omega \to N(\Omega)$ l'aplicació canònica definida a (2.10). Fixem un punt $x \in \partial\Omega$ i una J-referència $\{e_1 = \varphi(x), e_{\overline{1}} = Je_1, \ldots, e_n, e_{\overline{n}} = Je_n\}$ a x. Si*

$$\varphi^*(\beta_{k,q}) = Q_{k,q}dx, \quad \varphi^*(\gamma_{k,q}) = P_{k,q}dx$$

on dx és l'element de volum de $\partial\Omega$, llavors

1. *$Q_{k,q}$ és un polinomi de grau $2n-k-1$ amb variables les entrades a la segona forma fonamental $h_{ij} = \mathrm{II}(e_i, e_j)$, $i,j \in \{2, \overline{2}, \dots, \overline{n}\}$;*

2. *$P_{k,q}$ és un polinomi de grau $2n-k-1$ amb variables les entrades a la segona forma fonamental $h_{ij} = \mathrm{II}(e_i, e_j)$, $i,j \in \{\overline{1}, 2, \overline{2}, \dots, \overline{n}\}$;*

3. *cada un dels monomis de $P_{k,q}$ que conté només entrades de la forma h_{ii} conté el factor $h_{\overline{1}\overline{1}}$ i exactament $n+q-k-1$ factors de la forma $h_{jj}h_{\overline{j}\overline{j}}$, $i \in \{\overline{1}, 2, \overline{2}, \dots, \overline{n}\}, j \in \{2, \dots, n\}$;*

4. *els polinomis $P_{k,q}$ i $Q_{k,q}$ es poden escriure com a suma de menors de rang $r = 2n-k-1$ de la segona forma fonamental;*

5. *entre els menors de $P_{k,q}$ (resp. $Q_{k,q}$) de 4. surten tots els centrats a la diagonal de grau r que contenen $h_{\overline{1}\overline{1}}$ (resp. que no contenen $h_{\overline{1}\overline{1}}$). També surten tots els menors no centrats a la diagonal tals que els índexs de les files i columnes que formen un menor satisfan:*

   (a) *contenen $n-k+q$ índexs, en el cas de $Q_{k,q}$, i $n-k+q-1$, en el cas de $P_{k,q}$, tals que si l'índex j forma part de les files (resp. columnes) l'índex $\overline{j}$ també forma part de les files (resp. columnes) del menor. Direm que l'índex j està aparellat a les files (o a les columnes);*

   (b) *contenen $k-2q-1$ índexs no aparellats per $Q_{k,q}$ i $k-2q$ per $P_{k,q}$;*

   (c) *si l'índex j forma part dels índexs no aparellats de les files, llavors l'índex $\overline{j}$ no forma part dels índexs de les columnes.*

Demostració. A partir del lema 2.4.17 tenim

$$\begin{aligned}\varphi^*(\beta_{k,q}) = c_{n,k,q}\alpha_{\overline{1}} \wedge \left(\sum_{i=2}^{n}\sum_{j,l\in I} h_{ij}h_{\overline{i}l}\alpha_j \wedge \alpha_l\right)^{n+q-k} \wedge \qquad\qquad (2.12)\\ \wedge \left(\sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{j\in I} h_{\overline{i}j}\alpha_i \wedge \alpha_j - \sum_{l\in I} h_{il}\alpha_{\overline{i}} \wedge \alpha_l\right)\right)^{k-2q-1} \wedge \left(\sum_{i=2}^{n}\alpha_i \wedge \alpha_{\overline{i}}\right)^q\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\varphi^*(\gamma_{k,q}) = \frac{c_{n,k,q}}{2}\left(\sum_{j\in I} h_{\overline{1}j}\alpha_j\right) \wedge \left(\sum_{i=2}^{n}\sum_{j,l\in I} h_{ij}h_{\overline{i}l}\alpha_j \wedge \alpha_l\right)^{n+q-k-1} \wedge \\ \wedge \left(\sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{j\in I} h_{\overline{i}j}\alpha_i \wedge \alpha_j - \sum_{l\in I} h_{il}\alpha_{\overline{i}} \wedge \alpha_l\right)\right)^{k-2q} \wedge \left(\sum_{i=2}^{n}\alpha_i \wedge \alpha_{\overline{i}}\right)^q.\end{aligned}$$

Per tant, com que $\varphi^*(\beta_{k,q})$ i $\varphi^*(\gamma_{k,q})$ són formes definides a $\partial\Omega$ de grau màxim, tenim que $\varphi^*(\beta_{k,q}) = Q_{k,q}dx$ i $\varphi^*(\gamma_{k,q}) = P_{k,q}dx$ satisfan que $Q_{k,p}$ i $P_{k,q}$ són polinomis de grau $2n-k-1$. A més a més, el polinomi $P_{k,q}$ no pot contenir mai $h_{\overline{1}\overline{1}}$ ja que aquesta variable es troba acompanyada de la forma $\alpha_{\overline{1}}$ (veure fórmula (2.11)), però aquesta forma és factor comú a l'expressió per $\varphi^*(\beta_{k,q})$.

Per provar 3. observem que els termes de l'expressió de $\varphi^*(\gamma_{k,q})$ que contenen només entrades del tipus h_{ii} són

$$\frac{c_{n,k,q}}{2}h_{\overline{1}\overline{1}}\alpha_{\overline{1}}\wedge\left(\sum_{i=2}^{n} h_{ii}h_{\overline{i}\overline{i}}\alpha_i \wedge \alpha_{\overline{i}}\right)^{n+q-k-1} \wedge\left(\sum_{i=2}^{n} h_{\overline{i}\overline{i}}\alpha_i \wedge \alpha_{\overline{i}} - h_{ii}\alpha_{\overline{i}} \wedge \alpha_i\right)^{k-2q} \wedge\left(\sum_{i=2}^{n}\alpha_i \wedge \alpha_{\overline{i}}\right)^q,$$

d'on obtenim que sempre apareix la variable $h_{\overline{1}\overline{1}}$ i hi ha exactament $n+q-k-1$ factors de la forma $h_{jj}h_{\overline{j}\overline{j}}$, els que provenen de $(\sum_{i=2}^{n} h_{ii}h_{\overline{i}\overline{i}}\alpha_i \wedge \alpha_{\overline{i}})^{n+q-k-1}$.

Un menor de rang r d'una matriu es construeix elegint r files i r columnes de la matriu i fent el determinant de la submatriu quadrada considerada. Per provar les afirmacions 4. i 5. estudiem amb més detall l'expressió (2.12). (Un estudi anàleg es pot fer pel cas de $\varphi^*(\gamma_{k,q})$.) Primer de tot, observem que els factors $\alpha_{\overline{1}}$ i $\varphi^*(\theta_2)$ no aporten cap terme de la segona forma fonamental i, per tant, no influiran en el menor (tot i que sí que influiran en quins menors es podran fer). Així doncs, hem de provar que l'expressió

$$\varphi^*(\theta_0^{n+q-k}) \wedge \varphi^*(\theta_1^{k-2q-1}), \tag{2.13}$$

és una forma de grau $2n-2q-2$ on cada terme $\alpha_{i_1} \wedge \alpha_{i_2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_{2n-2q-2}}$ està acompanyat per una suma de menors.

Desenvolupant (2.13) tenim que aquest és equivalent a

$$\varphi^* \left((\sum_{i=2}^{n} \alpha_{\overline{1}i} \wedge \alpha_{\overline{1}\overline{i}})^{n+q-k} \wedge (\sum_{j=2}^{n} (\alpha_j \wedge \alpha_{\overline{1}\overline{j}} - \alpha_j \wedge \alpha_{\overline{1}j}))^{k-2q-1} \right).$$

Per desenvolupar l'expressió anterior, primer de tot, elegim $a := n+q-k$ valors $\{i_1, \ldots, i_a\}$ per l'índex i del primer sumatori i $b := k-2q-1$ valors $\{j_1, \ldots, j_b\}$ (amb $i_k, j_l \in \{2, \ldots, n\}$) per l'índex j del segon sumatori. Notem que es poden repetir índexs. Així doncs, obtenim $\binom{n-1}{n+q-k}\binom{n-1}{k-2q-1}$ sumands de la forma

$$\varphi^*(\alpha_{\overline{1}i_1} \wedge \alpha_{\overline{1}\overline{i_1}} \wedge \cdots \wedge \alpha_{\overline{1}i_a} \wedge \alpha_{\overline{1}\overline{i_a}} \wedge (\alpha_{j_1} \wedge \alpha_{\overline{1}\overline{j_1}} - \alpha_{\overline{j_1}} \wedge \alpha_{\overline{1}j_1}) \wedge \cdots \wedge (\alpha_{j_b} \wedge \alpha_{\overline{1}\overline{j_b}} - \alpha_{\overline{j_b}} \wedge \alpha_{\overline{1}j_b})),$$

que es poden descomposar en sumands de la forma, per exemple,

$$\begin{aligned}&\varphi^*(\alpha_{\overline{1}i_1} \wedge \alpha_{\overline{1}\overline{i_1}} \wedge \cdots \wedge \alpha_{\overline{1}i_a} \wedge \alpha_{\overline{1}\overline{i_a}} \wedge \alpha_{j_1} \wedge \alpha_{\overline{1}\overline{j_1}} \wedge \cdots \wedge \alpha_{j_b} \wedge \alpha_{\overline{1}\overline{j_b}})\\ &\qquad = \alpha_{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{j_b} \varphi^*(\alpha_{\overline{1}i_1} \wedge \alpha_{\overline{1}\overline{i_1}} \wedge \cdots \wedge \alpha_{\overline{1}i_a} \wedge \alpha_{\overline{1}\overline{i_a}} \wedge \alpha_{\overline{1}\overline{j_1}} \wedge \cdots \wedge \alpha_{\overline{1}\overline{j_b}}).\end{aligned}$$

Ara bé, a partir de (2.11) tenim que la forma que estem fent pull-back s'expressa com la suma dels menors que tenen per files les donades pels índexs $\mathcal{I} := \{i_1, \overline{i_1}, \ldots, i_a, \overline{i_a}, \overline{j_1}, \ldots, \overline{j_b}\}$ i per columnes cada una de les possibles permutacions dels elements sense repetició d'entre, en principi, el conjunt d'índexs $\mathcal{J} := I \setminus \{\alpha_{\overline{1}}, \alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_b}\}$. Observem que l'índex $\alpha_{\overline{1}}$ no el podem considerar ja que la forma que estem considerant al final és la de (2.12), que està multiplicada per $\alpha_{\overline{1}}$. (En el cas de $\varphi^*(\gamma_{k,q})$ no tenim aquesta restricció i, per això, també podem sortir menors amb el terme $h_{\overline{1}\overline{1}}$.)

D'aquí ja tenim que escollint de $\mathcal{J}$ els mateixos índexs que els de $\mathcal{I}$ s'obtenen tots els menors centrats a la diagonal. La condició 5.(c) s'obté directament del fet que els índexs que determinen les columnes han de ser de $\mathcal{J}$, i si $\overline{j_k}$ és índex d'una fila, a $\mathcal{J}$ s'està treient l'índex j_b.

Les condicions 5.(a) i 5.(b) s'obtenen en observar que, en realitat, la forma que estem estudiant no és la donada per (2.13) sinó per (2.12), és a dir, encara hem de fer producte per $\alpha_{\overline{1}} \wedge (\sum_{i=2}^{n} \alpha_i \wedge \alpha_{\overline{i}})^q$. La particularitat d'aquest producte és que si conté la forma α_k també conté la forma $\alpha_{\overline{k}}$ (excepte per $k=1$). Per tant, per completar la forma de (2.13) a una $2n-1$ forma ho hem de fer amb productes $\alpha_k \wedge \alpha_{\overline{k}}$, de manera que, per no obtenir un terme nul, entre els índexs de les columnes hi ha d'haver el mateix nombre d'índexs aparellats que entre els índexs de les files i, per conseqüència, el mateix nombre d'índexs no aparellats. □

Observacions 2.4.19. 1. Cada un dels menors va acompanyat d'una constant que depèn del nombre de permutacions que permeten obtenir-lo. Per tant, no tots els menors tenen la mateixa constant però sí (fixada $\beta_{k,q}$ o $\gamma_{k,q}$), per exemple, tots els menors centrats a la diagonal.

2. El grau del polinomi que determina $\beta_{k,q}$ o $\gamma_{k,q}$ és el mateix per una mateixa k, no depèn de q, però el que distingeix un polinomi dels altres és, per exemple, el nombre d'índex aparellats dels menors.

Exemple 2.4.20. Donem la relació explícita entre alguns volums intrínsecs hermítics i la segona forma fonamental.

1. $\varphi^*(\gamma_{00}) = \frac{c_{n,0,0}}{2}\varphi^*(\gamma \wedge \theta_0^{n-1}) = (n-1)!\frac{c_{n,0,0}}{2}\det(\mathrm{II})dx = \frac{1}{2n\omega_{2n}}\det(\mathrm{II})dx.$

2. $\varphi^*(\beta_{10}) = c_{n,1,0}\varphi^*(\beta \wedge \theta_0^{n-1}) = (n-1)!c_{n,1,0}\det(\mathrm{II}|_{\mathcal{D}})dx = \frac{1}{\omega_{2n-1}}\det(\mathrm{II}|_{\mathcal{D}})dx.$

3. $\varphi^*(\gamma_{2n-2,n-1}) = \frac{c_{n,2n-2,n-1}}{2}\varphi^*(\gamma \wedge \theta_2^{n-1}) = \frac{c_{n,2n-1,n-1}(n-1)!}{2}k_n(JN)dx = k_n(JN)\frac{dx}{2\omega_2}.$

4. $\varphi^*(\beta_{2n-2,n-2}) = c_{n,2n-2,n-2}\varphi^*(\beta \wedge \theta_1 \wedge \theta_2^{n-2}) = \frac{(n-2)!}{(n-2)!2\omega_2}\mathrm{tr}(\mathrm{II}|_{\mathcal{D}})dx = \mathrm{tr}(\mathrm{II}|_{\mathcal{D}})\frac{dx}{2\omega_2}.$

5. $\varphi^*(\beta_{2n-1,n-1}) = c_{n,2n-1,n-1}\varphi^*(\beta \wedge \theta_2^{n-1}) = c_{n,2n-1,n-1}(n-1)!\alpha_1 \wedge \alpha_{\overline{1}} \wedge \cdots \wedge \alpha_{\overline{n}} = \frac{dx}{2}.$

Capítol 3

Promig de la integral de curvatura mitjana

En els espais de curvatura seccional constant ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ i $\mathbb{H}^n$), és conegut que se satisfà la propietat de *reproductibilitat* de les integrals de curvatura mitjana, és a dir, donat un domini regular Ω es compleix (cf. exemple 2.2.3)

$$\int_{\mathcal{L}_s} M_r^{(s)}(\partial\Omega \cap L_s) dL_s = cM_r(\partial\Omega).$$

També hem vist a la secció 2.3 que aquesta propietat no té perquè satisfer-se a $\mathbb{C}^n$, considerant l'espai de plans complexos. Per tant, és natural estudiar el valor a $\mathbb{C}^n$ de la integral

$$\int_{\mathcal{L}_s^{\mathbb{C}}} M_r^{(s)}(\partial\Omega \cap L_s) dL_s.$$

També de la mateixa manera, podem estudiar el valor de la integral anterior pensada en els altres espais de curvatura holomorfa constant, $\mathbb{CP}^n$ o $\mathbb{CH}^n$. Recordem que denotem per $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ l'espai de curvatura holomorfa constant 4ϵ.

En aquest capítol donarem l'expressió de la integral de $M_1^{(s)}(\partial\Omega \cap L_s)$ en termes de la integral de curvatura mitjana del domini regular $M_1(\partial\Omega)$ i la integral de la curvatura normal en la direcció JN, $\int_{\partial\Omega} k_n(JN)$ (veure teorema 3.3.2). També donem un resultat parcial per a la integral de qualsevol altra integral de curvatura mitjana $M_r^{(s)}(\partial\Omega \cap L_s)$, $0 \leq r \leq 2s-1$ (veure proposició 3.2.2).

3.1 Lemes previs

Primer de tot, donem uns quants lemes que utilitzarem a la demostració del teorema 3.3.2 i en altres resultats.

Lema 3.1.1. *Sigui V un espai vectorial real de dimensió 4 amb una mètrica $\langle\, , \rangle$ compatible amb una estructura quasi-complexa J i sigui $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base ortonormal de V. Llavors, $\langle e_a, Je_b\rangle^2 = \langle e_c, Je_d\rangle^2$ amb $\{a, b, c, d\} = \{1, 2, 3, 4\}$.*

Demostració. Expressem Je_b i Je_d en termes de la base ortonormal de manera que obtenim

$$\begin{aligned} Je_b &= \langle Je_b, e_a\rangle e_a + \langle Je_b, e_c\rangle e_c + \langle Je_b, e_d\rangle e_d = Ae_a + Be_c + Ce_d, \\ Je_d &= \langle Je_d, e_a\rangle e_a + \langle Je_d, e_b\rangle e_b + \langle Je_d, e_c\rangle e_c = De_a + Ee_b + Fe_c. \end{aligned}$$

Utilitzant que $\langle Je_b, Je_b\rangle = \langle Je_d, Je_d\rangle = 1$, $\langle Je_b, Je_d\rangle = 0$ i $\langle Je_b, e_d\rangle = -\langle Je_d, e_b\rangle$, obtenim les equacions

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 + C^2 &= 1, \\ D^2 + E^2 + F^2 &= 1, \\ AD + BF &= 0, \\ C &= -E, \end{aligned}$$

d'on

$$A^2 + B^2 = D^2 + F^2 \quad \text{i} \quad A^2D^2 = B^2F^2.$$

Substituint $D^2 = A^2 + B^2 - F^2$ a la segona equació obtenim $A^2 = F^2$, tal com volíem provar. $\square$

Lema 3.1.2. *Sigui $u \in S^{2n-3}$. Llavors*

$$\int_{S^{2n-3}} \langle u, v\rangle dv = 0 \quad i \quad \int_{S^{2n-3}} \langle u, v\rangle^2 dv = \omega_{2n-2}.$$

Demostració. La primera igualtat se satisfà ja que l'integrand és una funció senar. Per la segona igualtat, descomposem $v = \cos\theta u + \sin\theta w$ on $w \in \langle v\rangle^{\perp}$. Llavors, utilizant coordenades polars respecte u obtenim

$$\int_{S^{2n-3}} \langle u, v\rangle^2 dv \;=\; O_{2n-4}\int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin^{2n-4}\theta d\theta = O_{2n-4}\frac{O_{2n-4+2+1}}{O_2 O_{2n-4}} = \omega_{2n-2}$$

on O_n i ω_n denoten el volum de la frontera de la bola i de la bola de dimensió n i radi 1. $\square$

El següent lema dóna una versió generalitzada del teorema de Meusnier.

Lema 3.1.3. *Sigui $S \subset M$ una hipersuperfície de classe $\mathcal{C}^2$ d'una varietat de Riemann M, $p \in S$ i $L \subset T_pM$ un subespai vectorial. Denotem per II_S la segona forma fonamental de S i per II^L_C la segona forma fonamental de $C = S \cap \exp_p L$ com a hipersuperfície de $\exp_p L$. Denotem $u = T_pS \cap L$. Llavors,*

$$\sigma_i(II_S|_u) = \cos^i\theta\sigma_i(II^L_C)$$

on θ és l'angle format en p pels vectors normals unitaris escollits a S i a C dins de $\exp_p L$ i $\sigma_i(Q)$ denota l'i-èssima funció simètrica elemental de la forma bilineal Q.

Demostració. Si $A \subset B \subset M$ són subvarietats, denotem la segona forma fonamental de A com a subvarietat de B per $h^B_A : T_pA \times T_pA \to (T_pA)^{\perp}$. Si $B = M$, escrivim h_A en lloc de h^M_A.

Per a tot $X, Y \in T_pC$ se satisfà

$$h_C(X, Y) = h^L_C(X, Y) + h_L(X, Y) = h^L_C(X, Y)$$

ja que la segona forma fonamental de L s'anul·la en el punt p. A més,

$$h_C(X, Y) = h^S_C(X, Y) + h_S(X, Y).$$

Sigui N vector normal a S. Observem que h^S_C és múltiple d'un vector normal a C dins S, per tant $\langle h^S_C(X, Y), N\rangle = 0$ (per $X, Y \in T_pC$).

Per tant, per $X, Y \in T_pC$, se satisfà

$$\begin{aligned} \mathrm{II}_S(X, Y) &:= \langle h_S(X, Y), N\rangle = \langle h_C(X, Y) - h^S_C(X, Y), N\rangle \\ &= \langle h_C(X, Y), N\rangle = \langle h^L_C(X, Y), N\rangle = \langle \mathrm{II}^L_C(X, Y)n, N\rangle \end{aligned}$$

on n denota el vector normal a C dins L. Així doncs,

$$\mathrm{II}_C^L(X,Y) = \frac{1}{\langle N, n\rangle}\mathrm{II}_S(X,Y). \tag{3.1}$$

Finalment, com que $\sigma_i(\mathrm{II}_C^L)$ és la suma dels menors d'ordre i de II_C^L, substituint per (3.1) cada entrada de la segona forma fonamental obtenim la relació de l'enunciat. $\square$

En el següent lema generalitzem a $\mathbb{C}^n$ un resultat de Langevin i Shifrin [LS82] a $\mathbb{R}^n$.

Lema 3.1.4. *Sigui E un espai vectorial complex de dimensió complexa n i sigui II una forma bilineal real definida a E. Denotem per $G_{n,s}^{\mathbb{C}}$ la Grassmaniana dels s-plans complexos de E. Llavors,*

$$\int_{G_{n,s}^{\mathbb{C}}} \mathrm{tr}(II|_V)dV = \frac{s\mathrm{vol}(G_{n,s}^{\mathbb{C}})}{n}\mathrm{tr}(II|_E).$$

Demostració. Primer de tot, recordem que

$$U(n-s)\times U(s) \longrightarrow U(n) \longrightarrow G_{n,s}^{\mathbb{C}} \tag{3.2}$$

és una fibració per a cada $s \in \{1,\ldots,n-1\}$.

Provem el cas $\dim_{\mathbb{C}} V \leq \frac{n}{2}$ per inducció a la dimensió de l'espai complex V. El cas $\dim_{\mathbb{C}} V > \frac{n}{2}$ es pot provar utilitzant argument similars.

Suposem que $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$, és a dir, $s = 1$. Llavors,

$$\int_{G_{n,1}^{\mathbb{C}}} \mathrm{tr}(\mathrm{II}|_V)dV = \frac{1}{\mathrm{vol}(U(n-1))\mathrm{vol}(U(1))}\int_{U(n)} \mathrm{tr}(\mathrm{II}|_{V_1^1})dU$$

ja que $\mathrm{tr}(\mathrm{II}|_{V_1^1})$ és constant al llarg de la fibra. Denotem per V_1^1 l'espai vectorial complex generat per la primera columna de la matriu $U \in U(n)$. En general, per $U \in U(n)$, denotarem per V_a^b el subespai vectorial complex generat per les columnes des de b fins a $b+a-1$. El subíndex a denota la dimensió de V_a^b, o equivalentment, el número de columnes que considerem; el superíndex b denota des de quina columna comencem a consider-les. Llavors,

$$\begin{aligned}\int_{U(n)} \mathrm{tr}(\mathrm{II}|_{V_1^1})dU &= \frac{1}{n}\int_{U(n)} (\mathrm{tr}(\mathrm{II}|_{V_1^1}) + \mathrm{tr}(\mathrm{II}|_{V_1^2}) + \cdots + \mathrm{tr}(\mathrm{II}|_{V_1^n}))dU \\ &= \frac{1}{n}\int_{U(n)} \mathrm{tr}(\mathrm{II}|_E)dU = \frac{\mathrm{vol}(U(n))}{n}\mathrm{tr}(\mathrm{II}|_E).\end{aligned}$$

Per tant,

$$\int_{G_{n,1}^{\mathbb{C}}} \mathrm{tr}(\mathrm{II}|_V)dV = \frac{\mathrm{vol}(U(n))}{n\mathrm{vol}(U(n-1))\mathrm{vol}(U(1))}\mathrm{tr}(\mathrm{II}|_E) = \frac{\mathrm{vol}(G_{n,1}^{\mathbb{C}})}{n}\mathrm{tr}(\mathrm{II}|_E).$$

Suposem, ara que el resultat és cert fins a $\dim_{\mathbb{C}} V = r-1$. Provarem el resultat per $\dim_{\mathbb{C}} V = r \leq \frac{n}{2}$. Si R denota el residu de la divisió $\frac{n}{r}$, llavors $R < r$ i podrem aplicar la hipòtesis d'inducció a la igualtat $(*)$ per R. Utilitzant arguments similars als anteriors tenim

$$\begin{aligned}
\int_{G^{\mathbb{C}}_{n,r}} \mathrm{tr}(\mathrm{II}|_V) &= \frac{1}{\mathrm{vol}(U(n-r))\mathrm{vol}(U(r))} \int_{U(n)} \mathrm{tr}(\mathrm{II}|_{V_r^1}) \\
&= \frac{1}{\mathrm{vol}(U(n-r))\mathrm{vol}(U(r))\lfloor \frac{n}{r} \rfloor} \int_{U(n)} (\mathrm{tr}(\mathrm{II}|_{V_r^1}) + \mathrm{tr}(\mathrm{II}|_{V_r^2}) + \cdots + \mathrm{tr}(\mathrm{II}|_{V_r^{n-R-r+1}})) \\
&= \frac{1}{\mathrm{vol}(U(n-r))\mathrm{vol}(U(r))\lfloor \frac{n}{r} \rfloor} \left(\int_{U(n)} \mathrm{tr}(\mathrm{II}|_E) - \int_{U(n)} \mathrm{tr}(\mathrm{II}|_{V_R^{n-R+1}}) \right) \\
&= \frac{\mathrm{vol}(U(n))\mathrm{tr}(\mathrm{II}|_E) - \mathrm{vol}(U(n-R))\mathrm{vol}(U(R)) \int_{G^{\mathbb{C}}_{n,R}} \mathrm{tr}(\mathrm{II}|_{V_R})}{\mathrm{vol}(U(n-r))\mathrm{vol}(U(r))\lfloor \frac{n}{r} \rfloor} \\
&\overset{(*)}{=} \frac{\left(\mathrm{vol}(U(n)) - \mathrm{vol}(U(n-R))\mathrm{vol}(U(R))\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n,R})\frac{R}{n}\right) \mathrm{tr}(\mathrm{II}|_E)}{\mathrm{vol}(U(n-r))\mathrm{vol}(U(r))\lfloor \frac{n}{r} \rfloor} \\
&= \mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n,r}) \frac{r}{n-R} \left(1 - \frac{R}{n}\right) \mathrm{tr}(\mathrm{II}|_E) \\
&= \mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n,r}) \frac{r}{n} \mathrm{tr}(\mathrm{II}|_E)
\end{aligned}$$

i el resultat se satisfà per $2s \leq n$. $\square$

3.2 Integral de la r-èssima integral de curvatura mitjana sobre l'espai de s-plans

Al llarg d'aquest capítol seguim certes convencions que recollim en els següents paràgrafs.

Denotem per S una hipersuperfície de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ de classe $\mathcal{C}^2$, compacta i orientada (possiblement amb vora). Donat un s-pla complex L_s que intersecta S diem que està en *posició genèrica* si $S \cap L_s$ és una subvarietat de dimensió $2s-1$ de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$. Per hipersuperfícies de classe $\mathcal{C}^2$ els plans genèrics (que intersecten una hipersuperfície) tenen mesura plena. Per això suposarem que l's-pla complex que considerem està en posició genèrica. Observem que $S \cap L_s$ (per L_s un s-pla complex genèric) és una hipersuperfície dins de $L_s \cong \mathbb{CK}^s(\epsilon)$.

Suposem que N denota un camp vectorial normal unitari definit a S. En aquest capítol considerem a $S \cap L_s$ dins de L_s el vector normal $\tilde{N}$ que forma un angle agut amb N. Al llarg de les demostracions d'aquest capítol denotarem, per simplicitat, $e_s := \pm J\tilde{N}$.

Notem que si $p \in S \cap L_s$ i $\tilde{N}_p$ és el vector normal unitari elegit de $S \cap L_s$ dins L_s llavors $J\tilde{N} \in T_p(S \cap L_s)$. Això es deu al fet que $L_s \cong \mathbb{CK}^s(\epsilon)$ i, per tant, les hipersuperfícies dins L_s i dins $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ tenen la mateixa estructura.

Denotarem per $E \subset T_p\mathbb{CK}^n(\epsilon)$, $p \in S \cap L_s$, el subespai ortogonal a l'espai generat per $\{N, JN, \tilde{N}, J\tilde{N}\}$. Observem que $\exp_p E \cong \mathbb{CK}^{n-2}(\epsilon)$ i que queda unívocament determinat per cada L_s i cada $p \in S \cap L_s$.

El fet que recollim a la següent observació l'utilitzarem de manera implícita al llarg d'aquest capítol, en especial per definir les referències mòbils g i g' de la demostració de la proposició 3.2.2.

Observació 3.2.1. Siguin V^n un espai hermític de dimensió complexa n amb estructura complexa J, $H \subset V^n$ un hiperplà real i $W_s \subset V^n$ un subespai complex de dimensió s.

Considerem el subespai $H \cap W_s$ i denotem per N' un vector ortonormal a $H \cap W_s$ dins de W_s i $\mathcal{D}' = \langle N', JN' \rangle^\perp \cap W_s$.

Considerem també el subespais $H \cap W_s^\perp$ i denotem per N'' un vector ortonormal a $H \cap W_s^\perp$ dins de $W_s^\perp$ i $\mathcal{D}'' = \langle N'', JN'' \rangle^\perp \cap W_s''$.

Denotem per N un vector ortonormal a H dins V i $\mathcal{D} = \langle N, JN\rangle^{\perp}$. Llavors,

$$\begin{aligned} V^n &= \mathcal{D}\perp\langle JN\rangle_{\mathbb{R}}\perp\langle N\rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \mathcal{D}'\perp\langle JN'\rangle_{\mathbb{R}}\perp\langle N'\rangle_{\mathbb{R}}\perp\mathcal{D}''\perp\langle JN''\rangle_{\mathbb{R}}\perp\langle N''\rangle_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

En efecte, partir de l'apartat 2.4.4, donat un hiperplà real W dins d'un espai hermític V sempre tenim una descomposició canònica de V com

$$V = \mathcal{D}\perp\langle JN\rangle_{\mathbb{R}}\perp\langle N\rangle_{\mathbb{R}},$$

on N és un vector ortogonal a W dins V. Apliquem aquest fet considerant primer $V = W_s$ i després $V = W_s^{\perp}$.

La següent proposició serà essencial per demostrar el teorema 3.3.2 i altres resultats.

Proposició 3.2.2. *Sigui $S \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ una hipersuperfície de classe $\mathcal{C}^2$, compacta (possiblement amb vora) i orientada per un vector normal unitari N i siguin $r, s \in \mathbb{N}$ tals que $1 \leq s \leq n$ i $0 \leq r \leq 2s-1$, llavors*

$$\int_{\mathcal{L}_s^{\mathbb{C}}} M_r^{(s)}(S\cap L_s)dL_s = \binom{2s-1}{r}^{-1}\int_S\left(\int_{\mathbb{RP}^{2n-2}}\left(\int_{G^{\mathbb{C}}_{n-2,s-1}}\frac{|\langle JN, e_s\rangle|^{2s-r}}{(1-\langle JN, e_s\rangle^2)^{s-1}}\sigma_r(p; e_s\oplus V)dV\right)de_s\right)dp,$$

on $e_s \in T_pS$ unitari, V denota un $(s-1)$-pla complex que passa per p i està contingut a $\{N, JN, e_s, Je_s\}^{\perp}$, $\sigma_r(p; e_s \oplus V)$ denota la r-èssima funció simètrica elemental de la segona forma fonamental de S restringida al subespai real $e_s \oplus V$ i la integració sobre $\mathbb{RP}^{2n-2}$ denota el projectiu de l'espai tangent unitari de la hipersuperfície.

Observació 3.2.3. A l'enunciat de la proposició anterior apareix el producte $|\langle JN, e_s\rangle|$ que, per les consideracions a l'inici d'aquesta secció correspon al cosinus de l'angle agut entre el vector normal a la hipersuperfícies S dins $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ i a $S \cap L_s$ dins L_s, és a dir,

$$|\langle JN, e_s\rangle| = |\langle N, \tilde{N}\rangle|.$$

Demostració de la proposició 3.2.2. Sigui L_s un s-pla complex tal que $S \cap L_s \neq \emptyset$ i $p \in L_s \cap S$. Denotem per $\tilde{\sigma}_r$ la r-èssima funció simètrica elemental de la matriu de la segona forma fonamental de la hipersuperfície $S \cap L_s$ dins de L_s. Llavors, per definició,

$$\int_{\mathcal{L}_s^{\mathbb{C}}} M_r^{(s)}(S \cap L_s)dL_s = \binom{2s-1}{r}^{-1}\int_{S\cap L_s\neq\emptyset}\int_{S\cap L_s}\tilde{\sigma}_r(x)dx\, dL_s.$$

Utilitzant referències ortonormals adaptades a $S \cap L_s$, L_s i S provarem el resultat.

Sigui $g = \{e_1, e_{\overline{1}} = Je_1, e_2, e_{\overline{2}} = Je_2, ..., e_s, w_s, e_{s+1}, e_{\overline{s+1}} = Je_{s+1}..., e_n, N\}$ una referència mòbil ortonormal adaptada a $S \cap L_s$ i S (cf. observació 3.2.1). És a dir, $\{e_1, e_{\overline{1}}, ..., e_s\}$ és una base ortonormal de $T_p(S \cap L_s)$, $\{e_{s+1}, e_{\overline{s+1}}..., e_n\}$ és una base ortonormal de $T_pS \cap (T_pL_s)^{\perp}$, N és vector normal unitari a T_pS i $\{w_s\}$ completa a una base ortonormal de $T_p\mathbb{CK}^n(\epsilon)$. Denotem per

$$\{\omega_1, \omega_{\overline{1}}, \ldots, \omega_{s-1}, \omega_{\overline{s-1}}, \omega_s, \omega_{\tilde{s}}, \omega_{s+1}, \omega_{\overline{s+1}}, \ldots, \omega_n, \omega_{\tilde{n}}\}$$

la base dual dels vectors de g i per $\{\omega_{ij}\}$, $i, j \in \{1, \overline{1}, \ldots, s, \tilde{s}, s+1, \overline{s+1}, \ldots, n, \tilde{n}\}$, les formes de connexió (cf. (1.15)).

Sigui $g' = \{e'_1 = e_1, e'_{\overline{1}} = Je_1, e'_2 = e_2, e'_{\overline{2}} = Je_2, ..., e'_s = e_s, e'_{\overline{s}} = Je_s, e'_{s+1} = e_{s+1}, e'_{\overline{s+1}} = Je_{s+1}, ..., e'_n = e_n, e'_{\overline{n}} = Je_n\}$ una referència mòbil ortonormal adaptada a $S\cap L_s$ i L_s. És a dir,

$\{e'_1, e'_{\overline{1}}, ..., e'_s\}$ és una base ortonormal de $T_p(L_s \cap S)$ i $\{e'_1, e'_{\overline{1}}, \dots, e'_s, e'_{\overline{s}}\}$ una base ortonormal de T_pL_s. Denotem per

$$\{\omega'_1, \omega'_{\overline{1}}, \dots, \omega'_n, \omega'_{\overline{n}}\}$$

la base dual dels vectors de g' i per $\{\omega'_{ij}\}$ les formes de connexió on $i, j \in \{1, \overline{1}, \dots, n, \overline{n}\}$.

Com que les bases de g i g' estan formades per vectors ortonormals, trobem la relació entre els elements de la referència g' i els elements de g expressant els vectors de g' en coordenades respecte els vectors de g:

$$\begin{aligned} e'_{\overline{s}} &= Je_s = \langle Je_s, w_s\rangle w_s + \langle Je_s, N\rangle N \\ e'_{\overline{n}} &= Je_n = \langle Je_n, w_s\rangle w_s + \langle Je_n, N\rangle N \end{aligned}$$

i $e'_j = e_j$ si $j \in \{1, \overline{1}, \dots, s-1, \overline{s-1}, s, s+1, \overline{s+1}, \dots, n-1, \overline{n-1}, n\}$.

Llavors,

$$\begin{cases} \omega'_j &= \omega_j, \text{ si } j \neq \overline{s}, \overline{n}, \\ \omega'_{\overline{n}} &= \langle Je_n, w_s\rangle \omega_{\tilde{s}} + \langle Je_n, N\rangle \omega_{\tilde{n}} \end{cases} \tag{3.3}$$

i

$$\begin{cases} \omega'_{i\overline{s}} &= \langle Je_s, w_s\rangle \omega_{i\tilde{s}} + \langle Je_s, N\rangle \omega_{i\tilde{n}}, \text{ si } i \neq \overline{s}, \overline{n}, \\ \omega'_{i\overline{n}} &= \langle Je_n, w_s\rangle \omega_{i\tilde{s}} + \langle Je_n, N\rangle \omega_{i\tilde{n}}, \text{ si } i \neq \overline{s}, \overline{n}, \\ \omega'_{ij} &= \omega_{ij}, \quad \text{ si } i, j \neq \overline{s}, \overline{n}. \end{cases} \tag{3.4}$$

A partir d'aquí, per tal de simplificar la notació, ometem el valor absolut en les densitats. L'expressió de dx (la densitat de $S \cap L_s$), dL_s i $dL_{s[p]}$ en termes d'ω' és

$$\begin{aligned} dx &= \omega'_1 \wedge \omega'_{\overline{1}} \wedge \cdots \wedge \omega'_s, \\ dL_s &= \omega'_{s+1} \wedge \omega'_{\overline{s+1}} \wedge \cdots \wedge \omega'_n \wedge \omega'_{\overline{n}} \wedge \bigwedge_{\substack{i=1,2,\dots,s \\ j=s+1,\overline{s+1},\dots,n,\overline{n}}} \omega'_{ij}, \\ dL_{s[p]} &= \bigwedge_{\substack{i=1,2,\dots,s \\ j=s+1,\overline{s+1},\dots,n,\overline{n}}} \omega'_{ij} \end{aligned}$$

i l'expressió de dp (la densitat de S) en termes de ω és $dp = \omega_1 \wedge \omega_{\overline{1}} \wedge \cdots \wedge \omega_n$.

Per altra banda, pel lema 3.1.1 se satisfà

$$|\langle Je_n, w_s\rangle| = |\langle Je_s, N\rangle|. \tag{3.5}$$

En efecte, els vectors $\{e_s, w_s, e_n, N\}$ formen una base ortonormal d'un espai vectorial complex de dimensió complexa 2. Aquest espai és el complement ortogonal del subespai complex generat per $\{e_1, Je_1, ..., e_{s-1}, Je_{s-1}, e_{s+1}, Je_{s+1}, ..., e_{n-1}, Je_{n-1}\}$.

A partir de les relacions (3.3) i (3.5) obtenim

$$dx \wedge dL_s = |\langle Je_n, w_s\rangle| dL_{s[p]} \wedge dp = |\langle JN, e_s\rangle| dL_{s[p]} \wedge dp \tag{3.6}$$

ja que $\omega_{\tilde{n}}$ s'anul·la a TS.

Llavors, pel lema 3.1.3,

$$\begin{aligned} \int_{S\cap L_s \neq \emptyset} M_r^{(s)}(S \cap L_s) dL_s &= \binom{2s-1}{r}^{-1} \int_S \int_{L_{s[p]}} |\langle JN, e_s\rangle| \tilde{\sigma}_r(p) dL_{s[p]} dp \\ &= \binom{2s-1}{r}^{-1} \int_S \int_{L_{s[p]}} \frac{|\langle JN, e_s\rangle|}{|\langle N, Je_s\rangle|^r} \sigma_r(p) dL_{s[p]} dp. \end{aligned}$$

Observem que a l'últim integrand considerem el valor absolut del denominador per assegurar que estem considerant el menor angle entre els dos subespais que es tallen. Això no ho podem assegurar directament ja que e_s és un vector qualsevol i, per tant, no sempre el vector Je_s (que és un vector normal de $S \cap L_s$ dins L_s) serà el que indueix l'orientació adequada.

Ara expressem $dL_{s[p]}$ en termes de $dV \wedge de_s$, on dV denota l'element de volum de $G^{\mathbb{C}}_{n-2,s-1}$ i de_s denota l'element de volum de S^{2n-2}. Per p fixat, definim la varietat

$$\mathbb{M} = \{(e_s, V) | e_s \in T_pS \text{ unitari}, V \in \mathcal{L}_s \text{ tal que conté } p \text{ i és ortogonal a } \{N, JN, e_s, Je_s\}\},$$

que localment és $S^{2n-2} \times G^{\mathbb{C}}_{n-2,s-1}$. Considerem el fibrat

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{M} & \longrightarrow & \mathcal{L}^{\mathbb{C}}_{s[p]} \\ & (e_s, V) & \mapsto & \exp_p\{e_s, Je_s, V\} \end{array}$$

de fibra $G^{\mathbb{C}}_{n,s}$. Aquest ens dóna un recobriment doble de $\mathcal{L}^{\mathbb{C}}_{s[p]}$ ja que els vectors e_s i $-e_s$ donen el mateix s-pla complex.

El pull-back de $dL_{s[p]}$ per l'aplicació anterior ens donarà la relació entre les formes. L'expressió de de_s en termes de ω i l'expressió de dV en termes de ω' és

$$\begin{aligned} de_s &= \bigwedge_{j=1,\bar{1},\dots,s-1,\overline{s-1},\tilde{s},s+1,\overline{s+1},\dots,n} \omega_{sj}, \\ dV &= \bigwedge_{\substack{i=1,2,\dots,s-1 \\ j=s+1,\overline{s+1},\dots,n-1,\overline{n-1}}} \omega'_{ij}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Per (3.4) i (3.7) tenim

$$\begin{aligned} dL_{s[p]} &= \bigwedge_{\substack{i=1,2,\dots,s \\ j=s+1,\overline{s+1},\dots,n,\bar{n}}} \omega'_{ij} \\ &= dV \wedge \bigwedge_{i=1,2,..,s-1} \omega'_{in} \wedge \bigwedge_{i=1,2,\dots,s} \omega'_{i\bar{n}} \wedge \bigwedge_{j=s+1,\overline{s+1},\dots,\overline{n-1},n} \omega_{sj}. \end{aligned}$$

Ara, relacionem $\bigwedge \omega'_{in} \bigwedge \omega'_{i\bar{n}}$ amb $\bigwedge \omega_{sj}$. A partir de (3.4) segueix

$$\bigwedge_{i=1,2,\dots,s} \omega'_{i\bar{n}} = |\langle Je_n, w_s\rangle|^s \bigwedge_{i=1,2,\dots,s} \omega_{i\tilde{s}}$$

i també utilitzant que $\omega'_{in} = \omega'_{\bar{i}\bar{n}}$ ja que $\omega'_{in} = \langle de'_i, e'_n\rangle = \langle dJe'_i, Je'_n\rangle = \omega'_{\bar{i},\bar{n}}$ obtenim

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i=1,2,\dots,s-1} \omega'_{in} = \bigwedge_{i=1,2,\dots,s-1} \omega'_{\bar{i}\bar{n}} &= \bigwedge_{i=1,2,\dots,s-1} \langle Je_n, w_s\rangle \omega_{\bar{i}\tilde{s}} \\ &= |\langle Je_n, w_s\rangle|^{s-1} \bigwedge_{i=1,2,\dots,s-1} \omega_{\bar{i}\tilde{s}}. \end{aligned}$$

Per estudiar

$$\bigwedge_{i=1,\bar{1},\dots,s-1,\overline{s-1}} \omega_{i\tilde{s}},$$

utilitzem la igualtat $e_{\bar{s}} = Je_s = \langle Je_s, w_s\rangle w_s + \langle Je_s, N\rangle N$ i obtenim

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i=1,\bar{1},\dots,s-1,\overline{s-1}} \omega_{is} = \bigwedge_{i=\bar{1},1,\dots,\overline{s-1},s-1} \omega_{\bar{i}\bar{s}} &= \bigwedge_{i=1,\bar{1},\dots,s-1,\overline{s-1}} \omega_{i\bar{s}} \\ &= \langle Je_s, w_s\rangle^{2(s-1)} \bigwedge_{i=1,\bar{1},\dots,s-1,\overline{s-1}} \omega_{i\tilde{s}}. \end{aligned}$$

Així,

$$\bigwedge_{i=1,\bar{1},\dots,s-1,\overline{s-1}} \omega_{i\tilde{s}} = \langle Je_s, w_s\rangle^{-2(s-1)} \bigwedge_{i=1,\bar{1},\dots,s-1,\overline{s-1}} \omega_{is}$$

i

$$dL_{s[p]} = \frac{|\langle Je_n, w_s\rangle|^{2s-1}}{\langle Je_s, w_s\rangle^{2(s-1)}} dV \wedge de_s. \tag{3.8}$$

Utilitzant $|\langle Je_n, w_s\rangle| = |\langle JN, e_s\rangle|$ i $\langle Je_s, w_s\rangle^2 = 1 - \langle JN, e_s\rangle^2$ obtenim el resultat. □

3.3 Integral de curvatura mitjana

Abans de donar l'expressió per la integral sobre l'espai de r-plans complexos de la integral de curvatura mitjana, expressem la integral de la integral de la curvatura normal en la direcció JN (veure (2.9)). Per l'exemple 2.4.20.3 tenim que aquesta integral és una valoració $\mathcal{C}^\infty$ a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$. A més, no és múltiple de la integral de curvatura mitjana.

Teorema 3.3.1. *Sigui $S \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ una hipersuperfície de classe $\mathcal{C}^2$, compacta (possiblement amb vora) i orientada per un vector normal unitari N. Llavors per $s \in \{1, \dots, n-1\}$*

$$\int_{\mathcal{L}_s^{\mathbb{C}}} \left(\int_{S\cap L_s} \tilde{k}_n(J\tilde{N}) dx \right) dL_s$$
$$= \mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-2,s-1}) \frac{\omega_{2n-2}}{2s} \binom{n}{s}^{-1} \left(\frac{2sn - s - n}{n-s} \int_S k_n(JN) + (2n-1) M_1(S) \right),$$

on $\tilde{k}_n(J\tilde{N})$ denota la curvatura normal de $S \cap L_s$ dins de L_s en la direcció $J\tilde{N}$, $k_n(JN)$ la curvatura normal en la direcció JN i ω_{2n-2} el volum de la bola euclidiana de dimensió n i de radi 1.

Demostració. Denotem per e_s el vector $J\tilde{N}$.

A partir del lema 3.1.3 tenim la relació $\tilde{k}_n(J\tilde{N}) = \dfrac{k_n(e_s)}{|\langle JN, e_s\rangle|}$. Utilitzant també les igualtats (3.6) i (3.8) tenim

$$I = \int_{\mathcal{L}_s^{\mathbb{C}}} \int_{S\cap L_s} \tilde{k_n}(J\tilde{N}) dx dL_s = \int_S \int_{\mathbb{RP}^{2n-2}} \int_{G^{\mathbb{C}}_{n-2,s-1}} \frac{|\langle JN, e_s\rangle|^{2s}}{(1 - \langle JN, e_s\rangle^2)^{s-1}} \frac{k_n(e_s)}{|\langle JN, e_s\rangle|} dV de_s dp.$$

Com que l'integrand no depèn de $V \in G^{\mathbb{C}}_{n-2,s-1}$ tenim la igualtat

$$I = \mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-2,s-1}) \int_S \int_{\mathbb{RP}^{2n-2}} \frac{|\langle JN, e_s\rangle|^{2s-1}}{(1 - \langle JN, e_s\rangle^2)^{s-1}} k_n(e_s) de_s dp. \tag{3.9}$$

Utilitzant coordenades polars i expressant la curvatura normal respecte les curvatures principals podem calcular la integral sobre $\mathbb{RP}^{2n-2}$. Això és, si $\{f_1, ..., f_{2n-1}\}$ és una base ortonormal de direccions principals de T_pS i $e_s = \sum_{j=1}^{2n-1} \langle e_s, f_j\rangle f_j$, llavors

$$k_n(e_s) = \sum_{j=1}^{2n-1} \langle e_s, f_j\rangle^2 k_n(f_j) = \sum_{j=1}^{2n-1} \langle e_s, f_j\rangle^2 k_j.$$

Per altra banda, fixat j, utilitzem coordenades polars θ_1 i θ_2 respecte JN definides per

$$|\langle JN, e_s\rangle| = \cos\theta_1 \quad \text{amb} \quad \theta_1 \in (0, \pi/2). \tag{3.10}$$

i, utilitzant trigonometria esfèrica,

$$\begin{aligned}\langle e_s, f_j\rangle &= \cos\theta_1\cos(JN, f_j) + \sin\theta_1\sin(JN, f_j)\cos(e_s, JN, f_j)\\ &= \cos\theta_1\cos\alpha_j + \sin\theta_1\sin\alpha_j\cos\theta_2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

on $\cos(e_s, JN, f_j)$ denota el cosinus de l'angle esfèric amb vèrtex JN. Notem que α_j són constants, una vegada fixat el punt.

Llavors, a partir de les igualtats

$$\frac{\Gamma(s)\Gamma(n-s)}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{s(n-s)}\binom{n}{s}^{-1} \quad \text{i} \quad \frac{\Gamma(s)\Gamma(n-s+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{s}\binom{n}{s}^{-1},$$

obtenim

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{RP}^{2n-2}} \frac{|\langle JN, e_s\rangle|^{2s-1}}{(1-\langle JN, e_s\rangle^2)^{s-1}} k_n(e_s) de_s\\
&= \sum_{j=1}^{2n-1} k_j \Big(\int_{S^{2n-3}} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2s-1}\theta_1}{\sin^{2s-2}\theta_1} \cos^2\theta_1 \cos^2\alpha_j \sin^{2n-3}\theta_1 d\theta_1 dS_{2n-3} +\\
&+ \int_{S^{2n-4}} \int_0^{\pi} \cos^2\theta_2 \sin^{2n-4}\theta_2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2s-1}\theta_1}{\sin^{2s-2}\theta_1} \sin^2\theta_1 \sin^2\alpha_j \sin^{2n-3}\theta_1 d\theta_1 d\theta_2 dS_{2n-4} + 0\Big)\\
&= \sum_{j=1}^{2n-1} k_j O_{2n-3} \left(\cos^2\alpha_j \frac{(2sn-s-n)\Gamma(s)\Gamma(n-s)}{4(n-1)\Gamma(n+1)} + \frac{\Gamma(s)\Gamma(n-s+1)}{4(n-1)\Gamma(n+1)} \right)\\
&= \frac{\omega_{2n-2}}{2s}\binom{n}{s}^{-1} \sum_{j=1}^{2n-1} k_j \left(\frac{2sn-n-s}{n-s}\cos^2\alpha_j + 1 \right).\end{aligned}$$

Integrant sobre S i utilitzant

$$k_n(JN) = \sum_{j=1}^{2n-1} k_j \langle JN, f_j\rangle^2 = \sum_{j=1}^{2n-1} k_j \cos^2\alpha_j$$

obtenim l'expressió de l'enunciat. □

Teorema 3.3.2. *Sigui $S \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ una hipersuperfície de classe $\mathcal{C}^2$, compacta (possiblement amb vora) i orientada per un vector normal unitari N, llavors per $s \in \{1, ..., n-1\}$*

$$\int_{\mathcal{L}_s^{\mathbb{C}}} M_1^{(s)}(S \cap L_s) dL_s = \frac{\omega_{2n-2}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-2,s-1})}{2s(2s-1)} \binom{n}{s}^{-1} \left((2n-1)\frac{2ns-n-s}{n-s} M_1(S) + \int_S k_n(JN) \right)$$

on $k_n(JN)$ denota la curvatura normal en la direcció $JN \in TS$.

Demostració. Per la proposició 3.2.2 i pel lema 3.1.4 tenim

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{L}_s^{\mathbb{C}}} M_1^{(s)}(S \cap L_s) dL_s = \frac{1}{2s-1} \int_S \int_{\mathbb{RP}^{2n-2}} \int_{G^{\mathbb{C}}_{n-2,s-1}} \frac{|\langle JN, e_s\rangle|^{2s-1}}{(1-\langle JN, e_s\rangle^2)^{s-1}} \sigma_1(p; e_s, V) dV de_s dp\\
&= \frac{1}{2s-1} \int_S \int_{\mathbb{RP}^{2n-2}} \frac{|\langle JN, e_s\rangle|^{2s-1}}{(1-\langle JN, e_s\rangle^2)^{s-1}} \int_{G^{\mathbb{C}}_{n-2,s-1}} (\mathrm{tr}(\mathrm{II}|_V) + \mathrm{II}(e_s, e_s)) dV de_s dp\\
&= \frac{\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-2,s-1})}{2s-1} \int_S \int_{\mathbb{RP}^{2n-2}} \frac{|\langle JN, e_s\rangle|^{2s-1}}{(1-\langle JN, e_s\rangle^2)^{s-1}} \left(\frac{s-1}{n-2}\mathrm{tr}(\mathrm{II}|_E) + k_n(e_s) \right) de_s dp,\end{aligned}$$

on $E = \langle N, JN, e_s, Je_s\rangle^\perp$.

Observem que si $s = 1$ llavors $\dim V = 0$, per tant no hi hauria d'haver la integral $\int_{G^{\mathbb{C}}_{n-2,s-1}} \mathrm{tr}(\mathrm{II}|V)dV$. Però si $s = 1$ llavors $\frac{s-1}{n-2}\mathrm{tr}(\mathrm{II}|_E) = 0$ i l'expressió té sentit.

Per tant, hem de calcular les dues integrals següents

$$J_E = \frac{\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-2,s-1})}{2s-1}\frac{s-1}{n-2}\int_S\int_{\mathbb{RP}^{2n-2}} \frac{|\langle JN, e_s\rangle|^{2s-1}}{(1-\langle JN, e_s\rangle^2)^{s-1}}\mathrm{tr}(\mathrm{II}|_E)de_s dp$$

$$J_s = \frac{\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-2,s-1})}{2s-1}\int_S\int_{\mathbb{RP}^{2n-2}} \frac{|\langle JN, e_s\rangle|^{2s-1}}{(1-\langle JN, e_s\rangle^2)^{s-1}}k_n(e_s)de_s dp.$$

La segona integral coincideix, llevat del factor constant, amb la integral (3.9) de la proposició 3.3.1, d'on

$$J_s = \frac{O_{2n-3}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-2,s-1})}{4s(2s-1)(n-1)}\binom{n}{s}^{-1}\left(\frac{2sn-s-n}{n-s}\int_S k_n(JN) + (2n-1)M_1(S)\right).$$

Per estudiar la integral J_E, utilitzem coordenades polars de la mateixa manera, i amb la mateixa notació que a la demostració del teorema 3.3.1. Sigui $\{e_1, Je_1, \ldots, e_{s-1}, Je_{s-1}\}$ una J-base de $E \cap T_pL_s$ i $\{e_{s+1}, Je_{s+1}, \ldots, e_{n-1}, Je_{n-1}\}$ una J-base de $E \cap (T_pL_s)^{\perp}$. Respecte aquesta base ortonormal obtenim

$$\mathrm{tr}(\mathrm{II}|_E) = \sum_{i=1, i\neq s}^{n-1} (k_n(e_i) + k_n(Je_i)).$$

Si denotem per $\{f_1, \ldots, f_{2n-1}\}$ una base de direccions principals de S en el punt p tenim

$$k_n(e_i) = \sum_{j=1}^{2n-1} k_n(f_j)\langle e_i, f_j\rangle^2 = \sum_{j=1}^{2n-1} k_j\langle e_i, f_j\rangle^2$$

d'on, utilitzant coordenades polars respecte JN, obtenim

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\mathrm{II}|_E) &= \sum_{j=1}^{2n-1} k_j\left(\sum_{i=1, i\neq s}^{n-1}(\langle e_i, f_j\rangle^2 + \langle Je_i, f_j\rangle^2)\right)\\ &= \sum_{j=1}^{2n-1} k_j\left(\sum_{i=1, i\neq s}^{n-1}(\cos^2(e_i, JN, f_j) + \cos^2(Je_i, JN, f_j)\right).\end{aligned}$$

Denotem (u, v, w) l'angle esfèric amb vèrtexs v i costats sobre u i w i $\cos\phi_{ij} = \cos(e_i, JN, f_j)$ i $\cos\phi_{\overline{ij}} = \cos(Je_i, JN, f_j)$. Per estudiar J_E cal tractar la integral següent:

$$\begin{aligned}&\int_{S^{2n-3}}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{2s-1}\theta_1}{\sin^{2s-2}\theta_1}\sin^2\alpha_j\sin^{2n-3}\theta_1\cdot\\ &\quad\cdot(\cos^2\phi_{1j} + \cdots + \cos^2\phi_{\overline{s-1},j} + \cos^2\phi_{s+1,j} + \cdots + \cos^2\phi_{\overline{n-1},j})d\theta_1 dS_{2n-3}\\ &= \sin^2\alpha_j\frac{\Gamma(s)\Gamma(n-s)}{2\Gamma(n)}\cdot\\ &\quad\cdot\int_{S^{2n-3}}(\cos^2\phi_{1j} + \cdots + \cos^2\phi_{\overline{s-1},j} + \cos^2\phi_{s+1,j} + \cdots + \cos^2\phi_{\overline{n-1},j})dS_{2n-3},\end{aligned}$$

on θ_1 i α_j estan definits com a (3.10) i (3.11).

Denotem per $\tilde{S}^{2n-1}$ el subconjunt de $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ format per tots els punts que no són de $\mathrm{span}\{N, JN\}$. Considerem l'aplicació

$$\begin{array}{rccc} \Pi: & \tilde{S}^{2n-1} & \longrightarrow & \{N, JN\}^{\perp} \\ & v & \mapsto & \frac{\mathrm{proj}_{\{N,JN\}^{\perp}}(v)}{||\mathrm{proj}_{\{N,JN\}^{\perp}}(v)||} \end{array}.$$

Notem que $\Pi(e_a) = e_a$, si $a \in \{1, \overline{1}, \ldots, s-1, \overline{s-1}, s+1, \overline{s+1}, \ldots, n-1, \overline{n-1}\}$.

Llavors, $E^{\perp}$ dins de $\{N, JN\}^{\perp}$ és

$$E^{\perp} \cap \{N, JN\}^{\perp} = (\{N, JN, e_s, Je_s\}^{\perp})^{\perp} \cap \{N, JN\}^{\perp} = \{\Pi(e_s), J\Pi(e_s)\}. \tag{3.12}$$

Com que $\cos(\phi_{aj}) = \cos(e_a, JN, f_j)$ denota el cosinus de l'angle esfèric amb vèrtex JN i costats que contenen, un cada un, els punts e_a i f_j, per definició, coincideixen amb $\langle \Pi(e_a), \Pi(f_j)\rangle = \langle e_a, \Pi(f_j)\rangle$. Llavors, per ser $\Pi(f_j)$ un vector unitari contingut en el subespai vectorial que té com a base $\{e_1, Je_1, \ldots, e_{s-1}, Je_{s-1}, \Pi(e_s), J\Pi(e_s)\}$ es compleix

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \Pi(f_j), \Pi(f_j)\rangle^2 \\ &= \langle e_1, \Pi(f_j)\rangle^2 + \cdots + \langle Je_{s-1}, \Pi(f_j)\rangle^2 + \langle \Pi(e_s), \Pi(f_j)\rangle^2 + \langle J\Pi(e_s), \Pi(f_j)\rangle^2 \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} &\int_{S^{2n-3}} (\cos^2\phi_{1j} + ... + \cos^2\phi_{\overline{s-1},j} + \cos^2\phi_{s+1,j} + ... + \cos^2\phi_{\overline{n-1},j}) dS \\ &= \int_{S^{2n-3}} (1 - \langle \Pi(e_s), \Pi(f_j)\rangle^2 - \langle J\Pi(e_s), \Pi(f_j)\rangle^2) dS. \end{aligned}$$

Per calcular la integral de la dreta passem a coordenades polars θ_2, θ_3 respecte $\Pi(f_j)$ de manera que

$$\langle \Pi(e_s), \Pi(f_j)\rangle = \cos\theta_2, \quad \theta_2 \in (0, \pi),$$
$$\langle J\Pi(e_s), \Pi(f_j)\rangle = \sin(\Pi(e_s), \Pi(f_j)) \cos(\Pi(e_s), \Pi(f_j), J\Pi(f_j)) = \sin\theta_2 \cos\theta_3, \quad \theta_3 \in (0, \pi)$$

i obtenim

$$\begin{aligned} &\int_{S^{2n-5}} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos^2\theta_2 - \sin^2\theta_2 \cos^2\theta_3) \sin^{2n-4}\theta_2 \sin^{2n-5}\theta_3 d\theta_3 d\theta_2 dS_1 \\ &= O_{2n-3} - \int_{S^{2n-4}} \int_0^{\pi} \cos^2\theta_2 \sin^{2n-4}\theta_2 - \int_{S^{2n-5}} \int_0^{\pi} \cos^2\theta_3 \sin^{2n-5}\theta_3 \int_0^{\pi} \sin^{2n-2}\theta_2 \\ &= O_{2n-3} - \frac{O_{2n-3}}{2n-2} - O_{2n-5} 2 \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n-2)}{4\Gamma(n-\frac{1}{2})} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\Gamma(n)} \\ &= O_{2n-5} \left(\frac{\pi}{n-2} - \frac{\pi}{2(n-1)(n-2)} - \frac{\pi}{2(n-1)(n-2)} \right) \\ &= \frac{O_{2n-5}\pi}{2(n-1)(n-2)} (2n-4) \\ &= \frac{O_{2n-5}\pi}{2(n-1)} \end{aligned}$$

on hem utilitzat el lema 3.1.2 i la relació

$$O_{2n-3} = O_{2n-5} \frac{\pi}{n-2}.$$

Per tant,

$$J_E = \frac{O_{2n-3} \mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-2,s-1}) n(s-1)}{2s(2s-1)(n-s)(n-1)} \binom{n}{s}^{-1} \left((2n-1) M_1(S) - \int_S k_n(JN) \right)$$

i sumant les dues integrals obtenim el resultat de l'enunciat:

$$\begin{aligned} J_E + J_s &= \frac{O_{2n-3}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-2,s-1})}{4s(2s-1)(n-1)}\binom{n}{s}^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \left(((2n-1)+(2n-1)\frac{n(s-1)}{n-s})M_1(S) + (\frac{2sn-n-s}{n-s} - \frac{n(s-1)}{n-s})\int_S k_n(JN)\right) \\ &= \frac{O_{2n-3}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-2,s-1})}{4s(2s-1)(n-1)}\binom{n}{s}^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{2n-1}{n-s}(n-s+ns-n)M_1(S) + \frac{2sn-n-s-ns+n}{n-s}\int_S k_n(JN)\right) \\ &= \frac{O_{2n-3}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-2,s-1})}{4s(2s-1)(n-1)}\binom{n}{s}^{-1}\left(\frac{s(2n-1)(n-1)}{n-s}M_1(S) + \int_S k_n(JN)\right). \end{aligned}$$

□

Una pregunta natural és quin funcional cal integrar sobre l'espai de s-plans complexos per obtenir la integral de curvatura mitjana de la hipersuperfície inicial.

Teorema 3.3.3. *Sigui $S \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ una hipersuperfície de classe $\mathcal{C}^2$, compacta (possiblement amb vora) i orientada. Si definim*

$$\nu(S) = (2ns-n-s)M_1(S) - \frac{n-s}{2s-1}\int_S k_n(JN)dx,$$

llavors

$$\int_{\mathcal{L}^{\mathbb{C}}_s} \nu(S \cap L_s)dL_s = \frac{\omega_{2n-2}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-2,s-1})2(n-1)(2n-1)(s-1)}{(2s-1)}M_1(S).$$

Demostració. Utilitzant els teoremes 3.3.1 i 3.3.2 obtenim directament el resultat. □

3.4 Valoracions reproductives

Definició 3.4.1. Suposem donada, per a cada $s \in \mathbb{N}$, una valoració $\varphi^{(s)}$ de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$. Diem que la col·lecció $\{\varphi^{(s)}\}$ satisfà la *propietat de reproductibilitat* si per a qualsevol domini Ω regular

$$\int_{\mathcal{L}^{\mathbb{C}}_s} \varphi^{(s)}(\Omega \cap L_s)dL_s = c_{n,s}\varphi(\Omega),$$

per alguna constant $c_{n,s}$ que depèn de les dimensions n i s.

Observació 3.4.2. Recordem que la integral de curvatura mitjana de convexos regulars estén a tot $\mathcal{K}(\mathbb{C}^n)$. També $\int_{\partial\Omega} k_n(JN)$ estén a $\mathcal{K}(\mathbb{C}^n)$ ja que coincideix amb $\Gamma_{2n-2,n-1}(\Omega)$ (cf. exemple 2.4.20).

Veient que ni la integral de curvatura mitjana, $M_1^{(s)}(\partial\Omega \cap L_s)$, ni la integral de la curvatura normal $\int_{\partial\Omega\cap L_s} k_n(J\tilde{N})dx$, satisfan la propietat de reproductibilitat, és natural preguntar-se si hi ha alguna combinació lineal d'elles que sí que la satisfaci. Considerem una combinació lineal d'aquestes ja que, a $\mathbb{C}^n$, aquestes formen una base de $\mathrm{Val}_{2n-2}(\mathbb{C}^n)$.

Teorema 3.4.3. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ un domini regular, $s \in \{1, ..., n-1\}$. Considerem les valoracions $\mathcal{C}^\infty$ definides per*

$$\varphi_1(\Omega) = M_1(\partial\Omega) - \int_{\partial\Omega} k_n(JN)$$

i

$$\varphi_2(\Omega) = (2s-1)(2n-1)M_1(\partial\Omega) + \int_{\partial\Omega} k_n(JN).$$

Llavors,

$$\int_{\mathcal{L}_s^{\mathbb{C}}} \varphi_1(\Omega \cap L_s) dL_s = \frac{\omega_{2n-2}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-2,s-1})(s-1)(2n-1)}{(2s-1)(n-s)} \binom{n}{s}^{-1} \varphi_1(\Omega)$$

i

$$\int_{\mathcal{L}_s^{\mathbb{C}}} \varphi_2(\Omega \cap L_s) dL_s = \frac{\omega_{2n-2}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-2,s-1})}{(2s-1)} \binom{n-2}{s-1}^{-1} \varphi_2(\Omega).$$

A $\mathbb{C}^n$*, les dues valoracions* $\varphi_1(\Omega)$ *i* $\varphi_2(\Omega)$ *generen el subespai de valoracions reproductives de grau* $2n-2$*.*

Demostració. Sigui

$$\nu(\Omega) = aM_1(\partial\Omega) + b\int_{\partial\Omega} k_n(JN).$$

Busquem les relacions entre a i b per tal que ν sigui una valoració reproductiva, és a dir, satisfaci

$$\int_{\mathcal{L}_s^{\mathbb{C}}} \nu(\Omega \cap L_s) dL_s = \lambda\nu(\Omega).$$

A partir dels teoremes 3.3.1 i 3.3.2 tenim

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{L}_s^{\mathbb{C}}} \nu(\Omega \cap L_s) dL_s =& \int_{\mathcal{L}_s^{\mathbb{C}}} \left(aM_1(\partial\Omega \cap L_s) + b\int_{\partial\Omega\cap L_s} k_n(J\tilde{N}) \right) \\ =& \frac{\omega_{2n-2}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-2,s-1})}{2s(2s-1)} \binom{n}{s}^{-1} \Big(\Big(a + \frac{b(2s-1)(2sn-n-s)}{n-s}\Big) \int_{\partial\Omega} k_n(JN) + \\ &+ \big(\frac{a(2ns-n-s)}{n-s} + b(2s-1)\big)(2n-1)M_1(\partial\Omega)\Big).\end{aligned}$$

Així, ν és reproductiva si i només si per algun $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(2n-1)\left(\frac{a(2ns-n-s)}{n-s} + b(2s-1)\right) &= \lambda a, \\ a + \frac{b(2s-1)(2sn-n-s)}{n-s} &= \lambda b.\end{aligned}$$

Resolent el sistema obtenim dues solucions, $a = -b$, $\lambda = \dfrac{2s(s-1)(2n-1)}{n-s}$ i $a = b(2s-1)(2n-1)$, $\lambda = \dfrac{2n(n-1)}{n-s}$. □

Observació 3.4.4. El teorema anterior dóna totes les valoracions contínues de grau $2n-2$ invariants pel grup d'isometries que satisfan la propietat de reproductibilitat. Per què aquestes valoracions són reproductives? Són especials en algun sentit? Seria interessant tenir una resposta a aquestes preguntes i conèixer el seu significat geomètric.

3.5 Relació amb certes valoracions definides per Alesker

A la secció 2.3 hem recordat la definició dels elements $U_{k,p}$ de la base de valoracions contínues invariants per translacions i per $U(n)$ a $\mathbb{C}^n$. A partir d'aquesta base es pot enunciar el teorema 2.3.4, que estableix Alesker a [Ale03]:

Teorema 3.5.1. *([Ale03], teorema 3.1.2) Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ domini regular i $0 < q < n$, $0 < 2p < k < 2q$. Llavors,*

$$\int_{\mathcal{L}_q^{\mathbb{C}}} U_{k,p}(\Omega \cap L_q) dL_q = \sum_{p=0}^{[k/2]+n-q} \gamma_p \cdot U_{k+2(n-q),p}(\Omega),$$

on les constants γ_p només depenen de n, q i p.

En el següent teorema donem les constant γ_p amb n, q qualsevol i $k = 2q - 2$.

Teorema 3.5.2. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ domini regular i $0 < q < n$. Llavors,*

$$\int_{\mathcal{L}_q^{\mathbb{C}}} U_{2q-2,p}(\Omega \cap L_q) dL_q = \frac{\omega_{2q-2}\omega_{2n-2}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-2,q-1})\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{q-2,q-p-1})}{(q-p)(2q-2p-1)\binom{n-2}{q-1}\binom{q-2}{q-p-1}} \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{(2n-3)(n-1)(n-q+p)}{\omega_{2n-2}} U_{2n-2,1}(\Omega) - (2n-1)n(n-q+p-1)U_{2n-2,0}(\Omega) \right).$$

Abans de demostrar-lo expressem $\int_{\partial\Omega} k_n(JN)$ (que és una valoració contínua invariant per translacions) com a combinació lineal dels elements de la base de valoracions $\{U_{k,p}\}$.

Proposició 3.5.3. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ domini regular. Llavors*

$$\int_{\partial\Omega} k_n(JN) dp = \frac{n(2n-3)(2n-2)^2\omega_2}{\omega_{2n-2}} U_{2n-2,1}(\Omega) - 2n(2n-1)(2n^2-4n+1)\omega_2 U_{2n-2,0}(\Omega).$$

Demostració. A partir de la relació entre les valoracions $\{U_{k,p}\}$ i les integrals de curvatura mitjana (veure (2.5)) tenim

$$U_{2n-2,0}(\Omega) = \frac{1}{2n\omega_2} M_1(\partial\Omega) \tag{3.13}$$

i

$$U_{2n-2,1}(\Omega) = \frac{1}{(2n-2)\omega_2} \int_{\mathcal{L}_{n-1}^{\mathbb{C}}} M_1(\partial\Omega \cap L_{n-1}) dL_{n-1}.$$

Utilitzant la proposició 3.3.2 amb $s = n - 1$ obtenim el resultat. $\square$

Demostració del teorema 3.5.2. A partir de la definició de $U_{k,p}$ tenim

$$U_{k,p}(\Omega) = \frac{1}{2(n-p)\omega_{2n-k}} \int_{G^{\mathbb{C}}_{n,n-p}} M_{k-2p}(\Omega \cap L_{n-p}) dL_{n-p}$$

i a partir del teorema 3.3.2:

$$\begin{aligned} U_{2q-2,p}(\Omega \cap L_q) &= \frac{1}{2(q-p)\omega_2} \int_{\mathcal{L}_{q-p}^{\mathbb{C}}} M_1((\partial\Omega \cap L_q) \cap L_{q-p}) dL_{q-p} \\ &= \frac{O_{2q-3}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{q-2,q-p-1})}{8(q-p)^2(q-1)(2q-2p-1)\omega_2} \binom{q}{q-p}^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \left((2q-1)\frac{2q(q-p)-2q+p}{p} M_1(\partial\Omega \cap L_q) + \int_{\partial\Omega \cap L_q} k_n(J\tilde{N}) \right) \end{aligned}$$

on $\tilde{N}$ denota el vector normal interior a $\partial\Omega \cap L_q$ com a hipersuperfície a L_q. Ara integrem sobre $\mathcal{L}_q^{\mathbb{C}}$ els dos costats de la igualtat anterior. Utilitzant altra vegada els teoremes 3.3.1 i 3.3.2, expressem les integrals sobre $\mathcal{L}_q^{\mathbb{C}}$ com una integral sobre $\partial\Omega$. Finalment, a partir de la relació de la proposició 3.5.3 i (3.13) obtenim el resultat.

$\square$

3.6 Exemple: esfera a $\mathbb{CK}^3(\epsilon)$

En aquesta secció comprovem el teorema 3.3.2 en el cas d'una esfera de radi R a $\mathbb{CK}^3(\epsilon)$.

A la pàgina 19 hem donat l'expressió per les curvatures principals d'una esfera de radi R a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$. Utilitzant aquesta expressió obtenim

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_R} k_n(JN) &= 2\cot_\epsilon(2R)V(\partial B_R) = 2\frac{\cos_\epsilon^2(R)+\sin_\epsilon^2(R)}{2\sin_\epsilon(R)\cos_\epsilon(R)}\frac{\pi^3}{3!}6\sin_\epsilon^5(R)\cos_\epsilon(R)\\ &= \pi^3(\cos_\epsilon^2(R)+\sin_\epsilon^2(R))\sin_\epsilon^4(R) = \pi^3(2\sin_\epsilon^6(R)+\sin_\epsilon^4(R))\\ &= \pi^3(2\cos_\epsilon^6(R)-5\cos_\epsilon^4(R)+4\cos_\epsilon^2(R)-1)\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}M_1(\partial B_R) &= \frac{\pi^3 6}{3!4}(5\sin_\epsilon^4(R)\cos_\epsilon^2(R)+\sin_\epsilon^6(R)) = \frac{\pi^3}{4}(6\sin_\epsilon^6(R)+5\sin_\epsilon^4(R))\\ &= \pi^3(\frac{6}{5}\cos_\epsilon^6(R)-\frac{13}{5}\cos_\epsilon^4(R)+\frac{8}{5}\cos_\epsilon^2(R)-\frac{1}{5}).\end{aligned}$$

Per tant, la part dreta del teorema 3.3.2 és

$$\begin{aligned}&\frac{O_3\pi^3}{144}((42+2)\cos_\epsilon^6(R)-(13\cdot 7+5)\cos_\epsilon^4(R)+(56+4)\cos_\epsilon^2(R)-(7+1))\\ &= 2\pi^5\left(\frac{11}{36}\cos_\epsilon^6(R)-\frac{2}{3}\cos_\epsilon^4(R)+\frac{5}{12}\cos_\epsilon^2(R)-\frac{1}{18}\right).\end{aligned}$$

La part esquerra del teorema 3.3.2 és

$$\int_{\mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}} M_1^{(2)}(\partial B_R\cap L_2)dL_2.$$

Calculem primer $M_1^{(2)}(\partial B_R\cap L_2)$, fixat un 2-pla complex L_2 tenint en compte que la intersecció és una esfera dins L_2 de radi r amb $\cos_\epsilon(R)=\cos_\epsilon(r)\cos_\epsilon(\rho)$ on ρ la distància del centre de l'esfera B_R al pla L_2 (cf. [Gol99, lema 3.2.13]). Llavors,

$$\begin{aligned}M_1^{(2)}(\partial B_R\cap L_2) &= \frac{1}{3}\int_{\partial B_R}(2\cot_\epsilon(r)+2\cot_\epsilon(2r))\\ &= \frac{2}{3}(\cot_\epsilon(r)+\cot_\epsilon(2r))\frac{4\pi^2}{2!}\sin_\epsilon^3(r)\cos_\epsilon(r)\\ &= \frac{1}{12}(4\cos_\epsilon^4(r)-5\cos_\epsilon^2(r)+1)\\ &= \frac{1}{12}\frac{1}{\cos_\epsilon^4(R)}(4\cos_\epsilon^4(R)-5\cos_\epsilon^2(R)\cos_\epsilon^2(\rho)+\cos_\epsilon^4(\rho)).\end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{L}_2^{\mathbb{C}}} M_1^{(2)}(\partial B_R\cap L_2)dL_2\\ &= \frac{1}{12}\int_{G_{3,1}^{\mathbb{C}}}\int_{S^1}\int_0^R \frac{\cos_\epsilon^4(\rho)}{\cos_\epsilon^4(\rho)}(4\cos_\epsilon^4(R)-5\cos_\epsilon^2(R)\cos_\epsilon^2(\rho)+\cos_\epsilon^4(\rho))2\cos_\epsilon(\rho)\sin_\epsilon(\rho)\\ &= \frac{2\pi V(G_{3,1}^{\mathbb{C}})2}{12}\int_0^R(4\cos_\epsilon^4(R)-5\cos_\epsilon^2(R)\cos_\epsilon^2(\rho)+\cos_\epsilon^4(\rho))2\cos_\epsilon(\rho)\sin_\epsilon(\rho)\\ &= \frac{\pi V(G_{3,1}^{\mathbb{C}})}{3}\left(\frac{11}{12}\cos_\epsilon^6(R)-2\cos_\epsilon^4(R)+\frac{5}{4}\cos_\epsilon^2(R)-\frac{1}{6}\right)\end{aligned}$$

i obtenim el mateix resultat en els dos costats de la igualtat del teorema 3.3.2.

Capítol 4

Teorema de Gauss-Bonnet i fórmules de Crofton per plans complexos

En aquest capítol donem una expressió per la mesura de r-plans complexos que tallen un domini compacte a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$. Més concretament expressarem

$$\int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}} \chi(\Omega \cap L_r) dL_r \tag{4.1}$$

per tot domini regular $\Omega \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ com a combinació lineal de les valoracions de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ anomenades *volums intrínsecs hermítics* (veure definició 2.4.11). El mètode utilitzat consisteix en calcular la variació de (4.1) quan el domini es mou al llarg d'un flux diferenciable. Gràcies a la teoria de valoracions a $\mathbb{C}^n$ sabem que l'expressió que busquem és combinació lineal dels volums intrínsecs hermítics, calculant també la variació d'aquestes i resolent un sistema d'equacions lineals obtenim el resultat (cf. teorema 4.3.5).

Utilitzant el mateix mètode donem una expressió (cf. teorema 4.4.1) de la característica d'Euler d'un domini compacte en termes de la integral de la curvatura de Gauss de la frontera del domini, el volum del domini i altres volums intrínsecs hermítics - en analogia al teorema de Gauss-Bonnet en espais de curvatura seccional constant (cf. [San04, p. 309]).

Relacionant els dos resultats anteriors obtenim una expressió simplificada per la característica d'Euler en termes de la mesura d'hiperplans complexos que tallen el domini (cf. teorema 4.4.5).

4.1 Variació dels volums intrínsecs hermítics

Estudiar la variació d'una valoració quan el domini es mou pel flux d'un camp és útil per conèixer propietats sobre la valoració que s'està estudiant. A l'article [BF08] s'estudia la variació de valoracions a $\mathbb{C}^n$ per caracteritzar-hi les monòtones. Aquí estudiem la variació de certes valoracions a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ i l'utilitzem per donar l'expressió de (4.1) en terme de les valoracions $\{\mu_{k,q}\}$ i també una expressió de la fórmula de Gauss-Bonnet.

Per trobar la variació d'aquestes valoracions seguim el mètode donat pel corol·lari 2.6 de [BF08]. Recordem primer de tot la definició de derivada de Rumin, que va ser introduïda a [Rum94].

Definició 4.1.1. Sigui $\mu \in \Omega^{2n-1}(S(\mathbb{CK}^n(\epsilon)))$, α la forma de contacte de $S(\mathbb{CK}^n(\epsilon))$ i $\alpha \wedge \xi \in \Omega^{2n-1}(S(\mathbb{CK}^n(\epsilon)))$ l'única mòdul un múltiple d'α (cf. [Rum94]) forma tal que $d(\mu + \alpha \wedge \xi)$ és múltiple d'α. Llavors, es defineix *l'operador de Rumin* D com

$$D\mu := d(\mu + \alpha \wedge \xi).$$

Recordem també la definició de camp de Reeb sobre una varietat de contacte.

Definició 4.1.2. Sigui M varietat de contacte i α la forma de contacte. Es defineix el *camp de Reeb* T com l'únic camp vectorial sobre M que satisfà

$$\begin{cases} i_T\alpha = 1, \\ \mathcal{L}_T\alpha = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Quan la varietat de contacte és el fibrat tangent unitari d'una varietat de Riemann llavors el camp de Reeb coincideix amb el flux geodèsic (cf. [Bla76, p.17]). En el nostre cas, és aquesta la situació que tenim (cf. lema 1.3.7 i observació 1.3.8).

Observem que la condició $\mathcal{L}_T\alpha = 0$ és equivalent a $i_T d\alpha = 0$. En efecte,

$$\mathcal{L}_T\alpha = i_T d\alpha + d(i_T\alpha) = i_T d\alpha = d\alpha(T).$$

En el següent lema recollim el valor de la contracció amb T de les formes α, β, γ i θ_i definides a la secció 2.4.2 ja que els utilitzarem sovint al llarg d'aquest capítol.

Lema 4.1.3. *A $S(\mathbb{CK}^n(\epsilon))$ se satisfà*

$$\begin{array}{ll} i_T\alpha = 1, & i_T\theta_1 = \gamma, \\ i_T\theta_2 = \beta, & i_T\beta = i_T\gamma = i_T\theta_0 = i_T\theta_s = 0. \end{array}$$

Demostració. La primera igualtat és una de les caracteritzacions de camp del Reeb. A més a més, $i_T\theta_s = -i_T d\alpha = d i_T\alpha - \mathcal{L}_T\alpha = 0$.

Per ser T el flux geodèsic se satisfà $\alpha_i(T) = \beta_i(T) = 0$ i $\alpha_{1i} = \beta_{1i} = 0$, $i \in \{2, ..., n\}$. Obtenim el resultat directament de la definició de (2.6) estesa a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$. $\square$

A [BF08] es dóna el següent resultat que permet calcular la *variació d'una valoració* donada a partir de la integral d'una forma invariant sobre el fibrat normal unitari. El resultat es prova a $\mathbb{C}^n$ però el mètode que s'utilitza també és vàlid per $\epsilon \neq 0$ i, més en general, per una varietat de Riemann. Recordem aquí la demostració.

Lema 4.1.4 (Lema 2.5 [BF08])**.** *Suposem que $\Omega \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ és un domini regular, N el camp normal unitari exterior a $\partial\Omega$ i μ una valoració contínua donada per una $(2n-1)$-forma β llavors*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mu(F_t(\Omega)) = \delta_X\mu(\Omega) = \int_{N(\Omega)} \langle X, N\rangle\, i_T(D\beta)$$

on X és un camp diferenciable de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ amb flux F_t, $F_t(\Omega)$ és el domini obtingut a partir del flux de X aplicat a Ω, T és el camp de Reeb de $S(\mathbb{CK}^n(\epsilon))$ i $D\beta$ denota la derivada de Rumin de la forma β.

Demostració. Sigui $\tilde{X}$ un aixecament de X a $S(\mathbb{CK}^n(\epsilon))$ tal que preserva α, és a dir, $\mathcal{L}_{\tilde{X}}(\alpha) = 0$. Llavors, denotant per $\tilde{F}$ el flux de $\tilde{X}$,

$$
\begin{aligned}
\delta_X\mu(\Omega) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\int_{N(F_t(\Omega))}\beta\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\int_{N(\Omega)}\tilde{F}_t^{\,*}\beta\right)\\
&= \int_{N(\Omega)}\mathcal{L}_{\tilde{X}}\beta\\
&\overset{(1)}{=} \int_{N(\Omega)} i_{\tilde{X}}d\beta + d(i_{\tilde{X}}\beta) \overset{(2)}{=} \int_{N(\Omega)} i_{\tilde{X}}d\beta\\
&\overset{(3)}{=} \int_{N(\Omega)} i_{\tilde{X}}D\beta - i_{\tilde{X}}d(\alpha\wedge\eta)\\
&\overset{(4)}{=} \int_{N(\Omega)} i_{\tilde{X}}D\beta\\
&\overset{(5)}{=} \int_{N(\Omega)} i_{\tilde{X}}(\alpha\wedge\rho)\\
&\overset{(6)}{=} \int_{N(\Omega)} (i_{\tilde{X}}\alpha)\rho\\
&\overset{(7)}{=} \int_{N(\Omega)} \alpha(\tilde{X})i_T(\alpha\wedge\rho)\\
&= \int_{N(\Omega)} \langle X,N\rangle i_T D\beta
\end{aligned}
$$

Primer de tot, observem que la segona igualtat és conseqüència de $N(F_t(\Omega) = \tilde{F}_t(N(\Omega))$. Per (1) i (2) utilitzem l'expressió de la derivada de Lie, $\mathcal{L}_{\tilde{X}}\beta = i_{\tilde{X}}d\beta + d(i_{\tilde{X}}\beta)$, i que el segon sumand és una forma exacta, de manera que la seva integral s'anul·la.

Per (3) utilitzem la definició de la derivada de Rumin.

Per (4), la igualtat

$$i_{\tilde{X}}d(\alpha\wedge\eta) = \mathcal{L}_{\tilde{X}}(\alpha\wedge\eta) - d(i_{\tilde{X}}(\alpha\wedge\eta))$$

i que el segon sumand és una forma exacta. El primer sumand el podem reescriure com

$$\mathcal{L}_{\tilde{X}}(\alpha\wedge\eta) = (\mathcal{L}_{\tilde{X}}\alpha)\wedge\eta + \alpha\wedge\mathcal{L}_{\tilde{X}}\eta$$

d'on obtenim que la seva integral s'anul·la ja que $\tilde{X}$ preserva α i α s'anul·la sobre el fibrat unitari (cf. lema 1.3.12).

Com que la derivada de Rumin és, per definició, una $2n$ forma múltiple de α definida al fibrat normal unitari, tenim (5).

Ara, per (6), utilitzant la definició de contracció tenim

$$i_{\tilde{X}}(\alpha\wedge\rho) = (i_{\tilde{X}}\alpha)\wedge\rho + \alpha\wedge(i_{\tilde{X}}\rho)$$

i el segon sumand s'anul·la sobre $N(\Omega)$.

Per obtenir (7), utilitzem el mateix raonament que a (4) amb T al lloc de $\tilde{X}$ per poder tenir la forma $\alpha\wedge\rho$, que és la diferencial de Rumin de β.

Finalment, recordem la definició de α i que la integral es restringeix al fibrat normal unitari de manera que els punts (x,v) són de la forma (x,N) amb $x\in\partial\Omega$ i N vector normal unitari de $\partial\Omega$ en el punt x. □

El lema anterior ens permet, doncs, calcular la variació de qualsevol valoració donada a partir de la integral d'una forma, una vegada coneixem la derivada de Rumin. En aquest treball donem la variació dels volums intrínsecs hermítics a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ (a [BF08] es donen per $\epsilon = 0$).

En el següent lema donem la diferencial de les formes $\beta_{k,q}$ i $\gamma_{k,q}$ (definides a 2.4.6) utilitzant les diferencials del lema 2.4.8. Aquestes diferencials ens serviran pel càlcul de la derivada de Rumin.

Lema 4.1.5. *A $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$*

$$d\beta_{k,q} = c_{n,k,q}(\theta_0^{n-k+q} \wedge \theta_1^{k-2q} \wedge \theta_2^q - \epsilon(n-k+q)\alpha \wedge \beta \wedge \theta_0^{n-k+q-1} \wedge \theta_1^{k-2q} \wedge \theta_2^q)$$

i

$$\begin{aligned} d\gamma_{k,q} =& c_{n,k,q}(\theta_0^{n-k+q} \wedge \theta_1^{k-2q} \wedge \theta_2^q - \epsilon\theta_0^{n-k+q-1} \wedge \theta_1^{k-2q} \wedge \theta_2^{q+1} - \epsilon\alpha \wedge \beta \wedge \theta_0^{n-k+q-1} \wedge \theta_1^{k-2q} \wedge \theta_2^q \\ &- \epsilon\frac{(n-k+q-1)}{2}\alpha \wedge \gamma \wedge \theta_0^{n-k+q-2} \wedge \theta_1^{k-2q+1} \wedge \theta_2^q \\ &- \epsilon\frac{(n-k+q-1)}{2}\beta \wedge \gamma \wedge \theta_s \wedge \theta_0^{n-k+q-2} \wedge \theta_1^{k-2q} \wedge \theta_2^q). \end{aligned}$$

A partir del lema anterior i seguint el mètode utilitzat per [BF08] podem trobar la variació de les valoracions $B_{k,q}$ i $\Gamma_{k,q}$ a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$.

Notació 4.1.6. Denotem

$$\tilde{B}_{k,q} = \tilde{B}_{k,q}(\Omega) := \int_{\partial\Omega} \langle X, N\rangle \beta_{k,q} \quad \text{i} \quad \tilde{\Gamma}_{k,q} = \tilde{\Gamma}_{k,q}(\Omega) := \int_{\partial\Omega} \langle X, N\rangle \gamma_{k,q}.$$

Proposició 4.1.7. *Sigui X un camp diferenciable definit a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ i $\Omega \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ un domini regular. La variació a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ de les valoracions $B_{k,q}$ i $\Gamma_{k,q}$ respecte el camp X està donada per*

$$\begin{aligned} \delta_X B_{k,q}(\Omega) = 2c_{n,k,q}(&c_{n,k-1,q}^{-1}(k-2q)^2\tilde{\Gamma}_{k-1,q} - c_{n,k-1,q-1}^{-1}(n+q-k)q\tilde{\Gamma}_{k-1,q-1} \\ &+ c_{n,k-1,q-1}^{-1}(n+q-k+\frac{1}{2})q\tilde{B}_{k-1,q-1} - c_{n,k-1,q}^{-1}(k-2q)(k-2q-1)\tilde{B}_{k-1,q} \\ &+ \epsilon(c_{n,k+1,q+1}^{-1}(k-2q)(k-2q-1)\tilde{B}_{k+1,q+1} - c_{n,k+1,q}^{-1}(n-k+q)(q+\frac{1}{2})\tilde{B}_{k+1,q})) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \delta_X\Gamma_{k,q}(\Omega) = 2c_{n,k,q}\Big(&c_{n,k-1,q}^{-1}(k-2q)^2\tilde{\Gamma}_{k-1,q} - c_{n,k-1,q-1}^{-1}(n+q-k)q\tilde{\Gamma}_{k-1,q-1} \\ &+ c_{n,k-1,q-1}^{-1}(n+q-k+\frac{1}{2})q\tilde{B}_{k-1,q-1} - c_{n,k-1,q}^{-1}(k-2q)(k-2q-1)\tilde{B}_{k-1,q} \\ &+ \epsilon\big(c_{n,k+1,q+1}^{-1}2(k-2q)(k-2q-1)\tilde{B}_{k+1,q+1} - c_{n,k+1,q}^{-1}((n-k+q)(2q+\frac{3}{2}) - \frac{1}{2}(q+1))\tilde{B}_{k+1,q} \\ &- c_{n,k+1,q+1}^{-1}(k-2q)^2\tilde{\Gamma}_{k+1,q+1} + c_{n,k+1,q}^{-1}(n-k+q-1)(q+1)\tilde{\Gamma}_{k+1,q} \\ &- \epsilon(c_{n,k+3,q+2}^{-1}(k-2q)(k-2q-1)\tilde{B}_{k+3,q+2} - c_{n,k+3,q+1}^{-1}(n-k+q-1)(q+\frac{3}{2})\tilde{B}_{k+3,q+1}))\Big). \end{aligned}$$

Demostració. Considerem primer la valoració donada per $\beta_{k,q}$.

Al lema 4.1.4 donem una expressió de la variació d'una valoració definida per una forma en termes de la derivada de Rumin de la forma. Per tant, si coneixem la derivada de Rumin de $\beta_{k,q}$ tindrem la variació de la valoració $B_{k,q}$.

De totes maneres, n'hi ha prou trobant $i_T D\beta_{k,q}$ i $i_T D\gamma_{k,q}$ mòdul α i $d\alpha$ ja que després integrem sobre el fibrat normal unitari i les formes α i $d\alpha$ s'hi anul·len (cf. lema 1.3.12).

De la demostració de la proposició 4.6 de [BF08] tenim que, per $\max\{0, k-n\} \leq q \leq \frac{k}{2} < n$, existeix una forma invariant $\xi_{k,q} \in \Omega^{2n-1}(S(\mathbb{C}^n))$ tal que

$$d\alpha \wedge \xi_{k,q} \equiv -\theta_0^{n-k+q}\theta_1^{k-2q}\theta_2^q \qquad \text{mod}(\alpha), \tag{4.3}$$

i

$$\begin{aligned}\xi_{k,q} \equiv{}& \beta\gamma\theta_0^{n+q-k-1}\theta_1^{k-2q-2}\theta_2^{q-1} \\ &\wedge \big((n+q-k)q\theta_1^2 - (k-2q)(k-2q-1)\theta_0\theta_2\big) \qquad \mathrm{mod}(\alpha, d\alpha).\end{aligned} \tag{4.4}$$

Per trobar $\delta_X B_{k,q}$ per ϵ qualsevol, prenem una forma $\xi^\epsilon \in \Omega^{2n-1}(S(\mathbb{CK}^n(\epsilon)))$ tal que $\xi^\epsilon_{(p,v)} \equiv \xi_{(p',v')}$ quan identifiquem $T_{(p,v)}S(\mathbb{CK}^n(\epsilon))$ i $T_{(p',v')}\mathbb{C}^n$, per cada $(p,v) \in S(\mathbb{CK}^n(\epsilon)), (p',v') \in S(\mathbb{C}^n)$. Dit d'una altra manera, en ser ξ^ϵ invariant, es pot expressar com a combinació de productes de les formes $\alpha, \beta, \gamma, \theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_s$. Prenem aquesta expressió com a definició de ξ^ϵ. Llavors, a partir del lema 4.1.5 i (4.3) tenim que $d(\beta_{k,q} + c_{n,k,q}\alpha \wedge \xi^\epsilon) \equiv 0$ mòdul α.

Pel lema 2.4.8, la diferencial exterior de ξ^ϵ per a ϵ qualsevol és

$$d\xi^\epsilon \equiv \theta_0^{n-k+q-1}\theta_1^{k-2q-2}\theta_2^{q-1}((n-k+q)q\theta_1^2 - (k-2q)(k-2q-1)\theta_0\theta_2)(\gamma\theta_1 - 2\beta\theta_0 + 2\epsilon\beta\theta_2) \ \mathrm{mod}(\alpha, d\alpha)$$

i la contracció de $d\beta_{k,q}$ amb el camp T, pels lemes 4.1.5 i 4.1.3, és

$$i_T d\beta_{k,q} \equiv c_{n,k,q}\theta_0^{n-k+q-1}\theta_1^{k-2q-1}\theta_2^{q-1}((k-2q)\gamma\theta_0\theta_2 + q\beta\theta_0\theta_1 - \epsilon(n-k+q)\beta\theta_1\theta_2) \qquad \mathrm{mod}\ \alpha.$$

Substituint els resultats anteriors a $i_T D\beta_{k,q} \equiv i_T d\beta_{k,q} - c_{n,k,q} d\xi^\epsilon$ (mod α, $d\alpha$) obtenim la variació de l'enunciat.

Per donar la variació de la valoració $\Gamma_{k,q}$ amb $k \neq 2q$ utilitzem la relació entre $\Gamma_{k,q}$ i $B_{k,q}$ donada a 2.4.9 i la variació de la valoració $B_{k,q}$.

Per calcular la variació de $\Gamma_{2q,q}$, notem primer de tot que $d\gamma_{2q,q}$ té 3 termes que no són múltiples d'α (cf. lema 4.1.5). De la mateixa manera que per trobar la variació de $B_{k,q}$, considerem $\xi_1^\epsilon, \xi_2^\epsilon \in \Omega^{2n-1}(S(\mathbb{CK}^n(\epsilon)))$ corresponents a $\xi_{2q,q}$ i $\xi_{2q+2,q+1}$ respectivament. Considerem també

$$\xi_3^\epsilon = \frac{n-q-1}{2}\beta\gamma\theta_0^{n-q-2}\theta_2^q. \tag{4.5}$$

Llavors, l'operador de Rumin de $\gamma_{2q,q}$ és $D\gamma_{2q,q} = d(\gamma_{2q,q} + c_{n,2q,q}\alpha \wedge (\xi_1^\epsilon - \epsilon\xi_2^\epsilon - \epsilon\xi_3^\epsilon))$. En efecte, $d\alpha \wedge \xi_1^\epsilon$ cancel·la el primer terme de $d\gamma_{2q,q}$ mòdul α i $d\alpha \wedge \xi_2^\epsilon$ cancel·la el segon. El tercer és cancel·lat exactament per $d\alpha \wedge \xi_3^\epsilon$.

Ara, utilitzant els lemes 4.1.5 i 4.1.3 obtenim

$$i_T d\gamma_{2q,q} \equiv q\beta\theta_0^{n-q}\theta_2^{q-1} - \epsilon(q+2)\beta\theta_0^{n-q-1}\theta_2^q - \epsilon\frac{n-q-1}{2}\gamma\theta_0^{n-q-2}\theta_1\theta_2^q \qquad \mathrm{mod}(\alpha, d\alpha)$$

i a partir de (4.4) i (4.5)

$$\begin{aligned} d\xi_1^\epsilon &\equiv (n-q)q\theta_0^{n-q-1}\theta_2^{q-1}(\gamma\theta_1 - 2\beta\theta_0 + 2\epsilon\beta\theta_2) \qquad \mathrm{mod}(\alpha, d\alpha), \\ d\xi_2^\epsilon &\equiv (n-q-1)(q+1)\theta_0^{n-q-2}\theta_2^q(\gamma\theta_1 - 2\beta\theta_0 + 2\epsilon\beta\theta_2) \qquad \mathrm{mod}(\alpha, d\alpha), \\ d\xi_3^\epsilon &\equiv \frac{n-q-1}{2}\theta_0^{n-q-2}\theta_2^q(\gamma\theta_1 - 2\beta\theta_0 + 2\epsilon\beta\theta_2) \qquad \mathrm{mod}(\alpha, d\alpha). \end{aligned}$$

Substituint aquestes expressions a $i_T D\gamma_{2q,q} \equiv i_T d\gamma_{2q,q} - c_{n,2q,q}(d\xi_1^\epsilon - \epsilon d\xi_2^\epsilon - \epsilon d\xi_3^\epsilon)$ mod$(\alpha, d\alpha)$ obtenim el resultat.

□

Observació 4.1.8. Per $\epsilon = 0$ la variació de $B_{k,q}$ coincideix amb la variació de $\Gamma_{k,q}$ i recuperem el resultat de la proposició 4.6 de [BF08].

A partir de la proposició anterior podem trobar de manera senzilla la variació de la integral de la curvatura de Gauss. Aquesta variació sabem, per la fórmula de Gauss-Bonnet, que és nul·la a $\mathbb{C}^n$ però no als altres espais de curvatura holomorfa constant.

Corol·lari 4.1.9. *A $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ la variació de la integral de la curvatura de Gauss ve donada per*

$$\delta_X M_{2n-1}(\partial\Omega) = 2\epsilon\omega_{2n-1}(2(n-1)\tilde{\Gamma}_{1,0} - (3n-1)\tilde{B}_{1,0} + \frac{3}{2\pi}\epsilon(2n-1)\tilde{B}_{3,1}).$$

Demostració. Primer de tot relacionem la integral de la curvatura de Gauss amb $\Gamma_{0,0}(\Omega)$ a partir de l'exemple 2.4.19.1:

$$M_{2n-1}(\partial\Omega) = \frac{2c_{n,0,0}^{-1}}{(n-1)!}\Gamma_{0,0}(\Omega) = 2n\omega_{2n}\Gamma_{0,0}(\Omega). \tag{4.6}$$

Per tant, a partir de la proposició 4.1.7 i utilitzant que $c_{n,1,0}^{-1} = (n-1)!\omega_{2n-1}$, $c_{n,3,1}^{-1} = (n-2)!\omega_{2n-3}$ i $\omega_{2n-1} = (2n-1)\omega_{2n-3}/2\pi$ tenim l'expressió de l'enunciat:

$$\begin{aligned}\delta_X M_{2n-1}(\partial\Omega) &= \frac{2\epsilon}{(n-1)!}(-c_{n,1,0}^{-1}(3n-1)\tilde{B}_{1,0} + 2c_{n,1,0}^{-1}(n-1)\tilde{\Gamma}_{1,0} + c_{n,3,1}^{-1}3\epsilon(n-1)\tilde{B}_{3,1})\\ &= 2\epsilon(-\omega_{2n-1}(3n-1)\tilde{B}_{1,0} + 2\omega_{2n-1}(n-1)\tilde{\Gamma}_{1,0} + 3\epsilon\omega_{2n-3}\tilde{B}_{3,1})\\ &= 2\epsilon\omega_{2n-1}(-(3n-1)\tilde{B}_{1,0} + 2(n-1)\tilde{\Gamma}_{1,0} + \frac{3}{2\pi}\epsilon(2n-1)\tilde{B}_{3,1}).\end{aligned}$$

□

4.2 Variació de la mesura de r-plans complexos que tallen un domini regular

Proposició 4.2.1. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ domini regular, X un camp diferenciable definit a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ i ϕ_t el flux associat al camp X. Denotem $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$. Llavors,*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}} \chi(\Omega_t \cap L_r) dL_r = \int_{\partial\Omega} \langle X, N\rangle \int_{G_{n-1,r}^{\mathbb{C}}(\mathcal{D}_p)} \sigma_{2r}(II|_V) dV dp$$

on N és el camp normal unitari exterior, $\mathcal{D}$ és la distribució tangent a $\partial\Omega$ i ortogonal a JN i $\sigma_{2r}(II|_V)$ denota la $2r$-èssima funció simètrica elemental de II restringida a $V \in G_{n-1,r}^{\mathbb{C}}(\mathcal{D}_p)$.

Demostració. La demostració és anàloga a la de [Sol06, teorema 4] pel cas de curvatura seccional constant. Cal fer però alguna modificació.

Denotem $G_{n-1,r}^{\mathbb{C}}(\mathcal{D}) = \{(p,l) \,|\, l \subseteq T_p\partial\Omega, \dim_{\mathbb{R}} l = 2r \text{ i } Jl = l\} = \bigcup_{p\in\partial\Omega} G_{n-1,r}^{\mathbb{C}}(\mathcal{D}_p)$.

Per cada $V \in G_{n-1,r}^{\mathbb{C}}(\mathcal{D}_p)$, considerem el transport paral·lel V_t de V al llarg de $\phi_t(p)$. Recordem que el transport paral·lel preserva l'estructura complexa en varietats de Kähler (cf. [O'N83, p. 326]). Llavors, la projecció ortogonal de V_t a $\mathcal{D}_{\phi_t(p)}$ és un r-pla complex V_t' (al menys per valors petits de t). Així, podem definir l'aplicació

$$\begin{array}{rccc}\gamma: & G_{n-1,r}^{\mathbb{C}}(\mathcal{D}) \times (-\epsilon,\epsilon) & \longrightarrow & \mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}\\ & ((p,V),t) & \mapsto & \exp_{\phi_t(p)} V_t'.\end{array} \tag{4.7}$$

La proposició 3 de [Sol06] és vàlida sense canvi en el cas d'espais de curvatura holomorfa constants. A partir d'aquesta i raonant com a [Sol06, teorema 4] tenim

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}} \chi(\Omega_t \cap L_r) dL_r &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{G_{n-1,r}^{\mathbb{C}}(\mathcal{D})\times(0,h)} \sum \operatorname{sign}\langle\frac{\partial\phi}{\partial t}, N\rangle \operatorname{sign}(\sigma_{2r}(\mathrm{II}|_V))\gamma^* dL_r\\ &= \int_{G_{n-1,r}^{\mathbb{C}}(\mathcal{D})} \langle\frac{\partial\phi}{\partial t}, N\rangle \operatorname{sign}(\sigma_{2r}(\mathrm{II}|_V))\gamma_0^*(\iota_{d\phi\partial t} dL_r)\end{aligned}$$

on la suma dins la segona integral és sobre les tangències de L_r amb les hipersuperfícies $\partial\Omega_t$ amb $0 < t < h$.

Considerem, ara, una J-referència mòbil $\{g; g_1, Jg_1, ..., g_n, Jg_n\}$ tal que $g((p,l),t) = \phi(p,t)$, $\gamma = \langle g; g_1, Jg_1, ..., g_r, Jg_r\rangle \cap \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ i $Jg_n((p,l),t) = N_t$ (vector normal a $\partial\Omega_t$ en el punt $\phi(p,t)$). Suposem que la referència està definida en un entorn de $\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}$ ja que només estem interessats en els punts regulars de γ.

Considerem també la corba $L_r(t)$ definida a partir del transport paral·lel de L_r al llarg de la geodèsica donada per N, el vector normal exterior a $\partial\Omega_0$. Recordem que el transport paral·lel conserva l'estructura complexa (cf. [O'N83, p. 326]). Sigui $P \in T_{L_r}\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}$ el vector tangent a $L_r(t)$. Llavors en $t = 0$ tenim

$$\begin{aligned}
\omega_i(P) &= \langle dg(P), g_i\rangle = \langle \frac{d}{dt} g(L_r(t)), g_i\rangle = 0, \quad i \in \{r+1, \overline{r+1}, ..., n-1, \overline{n-1}\},\\
\omega_{\overline{n}}(P) &= \langle dg(P), N\rangle = 1, \\
\omega_{ij}(P) &= \langle \nabla g_i(P), g_j\rangle = \langle \frac{D}{dt} g_i(L_r(t)), g_j\rangle = 0, \quad j \in \{r+1, \overline{r+1}, ..., n, \overline{n}\},\ i \in \{1, \overline{1}, ..., r, \overline{r}\}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

La mesura de r-plans complexos a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ és (cf. proposició 1.5.5)

$$dL_r = \left| \bigwedge_{i=r+1}^{n} \omega_i \wedge \omega_{\overline{i}} \bigwedge_{\substack{i=1,...,r\\ j=r+1,...,n}} \omega_{ij}\omega_{\overline{ij}} \right|.$$

Per les igualtats anteriors es compleix

$$dL_r = |\omega_{\overline{n}}|\iota_P dL_r$$

ja que a partir de (4.8) tenim $\iota_P dL_r = |\bigwedge_{h=r+1}^{n-1} \omega_h \wedge \overline{\omega_h} \wedge \omega_n \bigwedge \omega_{ij}|$. Per tant,

$$\iota_{d\gamma\partial t} dL_r = |\omega_{\overline{n}}(d\gamma\partial t)|\iota_P dL_r + |\omega_{\overline{n}}|\iota_{d\gamma\partial t}\iota_P dL_r$$

amb

$$\begin{aligned}
\omega_{\overline{n}}(d\gamma\partial t) &= \langle dg(d\gamma\partial t), N\rangle = \langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, N\rangle,\\
\gamma_0^*(\omega_{\overline{n}})(v) &= \langle dg(d\gamma_0(v)), N\rangle = 0 \quad \forall v \in T_{(p,l)}G^{\mathbb{C}}_{n-1,r}(T_p\partial\Omega_0),
\end{aligned}$$

d'on obtenim

$$\gamma_0^*(\iota_{d\gamma\partial t} dL_r) = |\langle \frac{\partial\phi}{\partial t}, N\rangle|\gamma_0^*(\iota_P dL_r).$$

Finalment, utilitzant que $\gamma_0^*(\iota_P dL_r) = |K(l)| dV dp$ obtenim el resultat de l'enunciat.

□

Observació 4.2.2. La integral

$$\int_{G^{\mathbb{C}}_{n,r}} \sigma_{2r}(\mathrm{II}|_V) dV$$

sembla difícil de calcular directament. De totes maneres, a partir d'un mètode indirecte la calcularem. Recordem que la integral anàloga en els espais de curvatura constant és igual a un múltiple d'una integral de curvatura mitjana.

Pel cas $r = n-1$, però, podem calcular la integral fàcilment a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$.

Corol·lari 4.2.3. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ domini regular, X camp diferenciable definit a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ i ϕ_t el flux associat al camp X. Denotem $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$. Llavors,*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\mathcal{L}^{\mathbb{C}}_{n-1}} \chi(L_{n-1} \cap \Omega_t) dL_{n-1} = \omega_{2n-1} \tilde{B}_{1,0}(\Omega).$$

Demostració. A partir de la proposició 4.2.1 tenim directament el resultat ja que només hi ha un hiperplà complex tangent a un punt d'una hipersuperfície i llavors es compleix

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\mathcal{L}^{\mathbb{C}}_{n-1}} \chi(\Omega_t \cap L_{n-1}) dL_{n-1} &= \int_{\partial\Omega_0} \langle \partial\phi/\partial t, N\rangle \int_{G^{\mathbb{C}}_{n-1,n-1}} \sigma_{2n-2}(\mathrm{II}|_V) dV dx \\
&= \int_{\partial\Omega_0} \langle \partial\phi/\partial t, N\rangle \sigma_{2n-2}(\mathrm{II}|_{\mathcal{D}}) dx \\
&= \int_{\partial\Omega_0} \langle \partial\phi/\partial t, N\rangle \frac{\beta \wedge \theta_0^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \frac{c^{-1}_{n,1,0}}{(n-1)!} \tilde{B}_{1,0}(\Omega) \\
&= \omega_{2n-1} \tilde{B}_{1,0}(\Omega).
\end{aligned}$$

□

4.3 Mesura de r-plans complexos que tallen un domini

4.3.1 A l'espai hermític estàndard

Utilitzant que la mesura de r-plans complexos a $\mathbb{C}^n$ que tallen un domini regular és combinació lineal dels elements de la base dels volums intrínsecs hermítics i les proposicions 4.2.1 i 4.1.7 trobem explícitament aquesta combinació lineal.

Teorema 4.3.1. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ convex regular, X un camp diferenciable definit a $\mathbb{C}^n$ i ϕ_t el flux associat al camp X. Denotem $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$. Llavors,*

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\mathcal{L}^{\mathbb{C}}_r} \chi(\Omega_t \cap L_r) dL_r = \mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r}) \omega_{2r+1} (r+1) \binom{n-1}{r}^{-1} \binom{n}{r}^{-1} \cdot \\
\cdot \left(\sum_{q=\max\{0,n-2r-1\}}^{n-r-1} \binom{2n-2r-2q-1}{n-r-q} \frac{1}{4^{n-r-q-1}} \tilde{B}_{2n-2r-1,q}(\Omega) \right)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

i

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{L}^{\mathbb{C}}_r} \chi(\Omega \cap L_r) dL_r = \mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r}) \omega_{2r} \binom{n-1}{r}^{-1} \binom{n}{r}^{-1} \cdot \\
\cdot \left(\sum_{q=\max\{0,n-2r\}}^{n-r} \frac{1}{4^{n-r-q}} \binom{2n-2r-2q}{n-r-q} \mu_{2n-2r,q}(\Omega) \right).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Demostració. Per tal de simplificar els càlculs, considerem

$$B'_{k,q} = B'_{k,q}(\Omega) := c^{-1}_{n,k,q} \mu_{k,q}(\Omega), \quad \Gamma'_{2q,q} = \Gamma'_{2q,q}(\Omega) := 2c^{-1}_{n,2q,q} \mu_{2q,q}(\Omega). \tag{4.11}$$

De la mateixa manera denotem

$$\tilde{B}'_{k,q} = c^{-1}_{n,k,q} \tilde{B}_{k,q}, \quad \tilde{\Gamma}'_{k,q} = 2c^{-1}_{n,k,q} \tilde{\Gamma}_{k,q}. \tag{4.12}$$

L'expressió $\int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}} \chi(\Omega \cap L_r) dL_r$ a $\mathbb{C}^n$ és una valoració homogènia de grau $2n-2r$. Per l'observació 2.4.12, es pot expressar com a combinació lineal dels elements de grau $2n-2r$ de la base de valoracions $\{\mu_{2n-2r,q} | \max\{0, n-2r\} \leq q \leq n-r\}$ (cf. definició 2.4.11) també de grau $2n-2r$. Llavors,

$$\int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}} \chi(\Omega \cap L_r) dL_r = \sum_{q=\max\{0,n-2r\}}^{n-r-1} C_q B'_{2n-2r,q} + D\Gamma'_{2n-2r,n-r}, \tag{4.13}$$

per a certes constants C_q i D, que volem determinar. Fent variació a banda i banda i comparant les expressions obtindrem aquestes constants i l'expressió de l'enunciat.

A partir d'ara suposem $2r < n$. El cas $2r \geq n$ es pot tractar de manera semblant (cf. observació 4.3.2).

De la proposició 4.1.7 tenim que la variació de la banda dreta de (4.13) és una combinació lineal del tipus

$$\sum_{q=n-2r-1}^{n-r-1} c_q \tilde{B}'_{2n-2r-1,q} + \sum_{q=n-2r}^{n-r1} d_q \tilde{\Gamma}'_{2n-2r-1,q} \tag{4.14}$$

on les constants c_q i d_q es poden posar com a combinació lineal amb coeficients coneguts de les variables C_q i D, que encara no han estat determinades.

La variació de la banda esquerra de (4.13), per la proposició 4.2.1 és

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}} \chi(\Omega \cap L_r) dL_r = \int_{\partial\Omega_0} \langle \partial\phi/\partial t, N \rangle \int_{G^{\mathbb{C}}_{n-1,r}(\mathcal{D})} \sigma_{2r}(\mathrm{II}|_V) dV dx. \tag{4.15}$$

A partir del lema 2.4.18, quan considerem el pull-back de la forma $\gamma_{k,q}$ des de $N(\Omega)$ a $\partial\Omega$, obtenim un polinomi $P_{k,q}$ de grau $2n-k-1$ en els coeficients h_{ij} de II amb $i, j \in \{\overline{1}, 2, \overline{2}, \ldots, n, \overline{n}\}$. A més a més, per cada q els monomis de $P_{k,q}$ que només contenen entrades de la forma h_{ii} contenen el factor $h_{\overline{1}\overline{1}} = \mathrm{II}(JN, JN)$ i cada un d'aquests monomis no apareix a cap altre $P_{k,q'}$ amb $q' \neq q$. Per tant, cada combinació lineal no trivial de $\{P_{k,q}\}_q$ ha de contenir la variable $h_{\overline{1}\overline{1}}$. Per altra banda, la integral $\int_{G^{\mathbb{C}}_{n-1,r}} \sigma_{2r}(\mathrm{II}|_V) dV$ és un polinomi de la segona forma fonamental II restringida a la distribució $\mathcal{D} = \langle N, JN \rangle^{\perp}$, així doncs, un polinomi que no conté $h_{\overline{1}\overline{1}}$. Comparant les expressions de (4.14) i (4.15), obtenim que cal que $d_q = 0$ per a tot $q \in \{n-2r, \ldots, n-r-1\}$.

Com que c_q i d_q depenen de C_q i D tindrem el valor de c_q una vegada coneguem el de C_q i D, que els trobarem a partir de les equacions $\{d_q = 0\}$. Observem que en aquest sistema hi ha r equacions ja que $q \in \{n-2r, \ldots, n-r-1\}$ a (4.14). De variables n'hi ha $r+1$: hi ha r constants C_q i la constant D, (comparar amb (4.13)).

Per tant, tenim una incògnita més que equacions. Podem afegir una equació considerant $\mathrm{II}|_{\mathcal{D}} = \lambda \mathrm{Id}$ i escrivint la igualtat que s'obté d'igualar (4.15) a (4.14) en aquest cas. Llavors, per a qualsevol parella (n, r) tenim un sistema amb tantes equacions com incògnites, que serà compatible perquè les constants de (4.13) existeixen. Tot seguit resolem el sistema.

Expressem, primer de tot, les constants c_q i d_q en termes de C_q i D.

Per simplificar el rang de l'índex q en d_q i c_q escriurem d_{n-r-a} amb $a \in \{1, \ldots, r\}$ i c_{n-r-a} amb $a \in \{1, \ldots, r+1\}$.

Constant d_{n-r-1}. A partir de l'expressió de la variació de $B'_{k,q}$ a $\mathbb{C}^n$ (proposició 4.1.7 amb $\epsilon = 0$) tenim que el coeficient de $\tilde{\Gamma}'_{2n-2r-1,n-r-1}$ l'obtenim de la variació de $B'_{2n-2r,n-r-1}$ i de $\Gamma'_{2n-2r,n-r}$. Així queda,

$$\begin{aligned} d_{n-r-1} &= -2r(n-r)D + (2n-2r-2(n-r-1))^2 C_{n-r-1} \\ &= 4C_{n-r-1} - 2r(n-r)D. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Constants d_{n-r-a}*,* $a \in \{2,\dots,r\}$. El coeficient de $\tilde{\Gamma}'_{2n-2r-1,n-r-a}$ l'obtenim de la variació de $B'_{2n-2r,n-r-a}$ i de $B'_{2n-2r,n-r-a+1}$ i és

$$\begin{aligned} d_{n-r-a} &= (2n-2r-2(n-r-a))^2 C_{n-r-a} - (2r+n-r-a+1-n)(n-r-a+1)C_{n-r-a+1} \\ &= 4a^2 C_{n-r-a} - (r-a+1)(n-r-a+1)C_{n-r-a+1}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Constant c_{n-r-1}. El coeficient de $\tilde{B}'_{2n-2r-1,n-r-1}$ l'obtenim de la variació de $B'_{2n-2r,n-r-1}$ i de $\Gamma'_{2n-2r,n-r}$ i és

$$\begin{aligned} c_{n-r-1} &= 4(r+1/2)(n-r)D - 4C_{n-r-1} \\ &= 2(2r+1)(n-r)D - 4C_{n-r-1}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Constants c_{n-r-a}*,* $a \in \{2,\dots,r-2\}$. El coeficient de $\tilde{B}'_{2n-2r-1,n-r-a}$ l'obtenim de la variació de $B'_{2n-2r,n-r-a}$ i de $B'_{2n-2r,n-r-a+1}$ i és

$$\begin{aligned} c_{n-r-a} &= -2(2a)(2a-1)C_{n-r-a} + 2(r-a+3/2)(n-r-a+1)C_{n-r-a+1} \\ &= -4a(2a-1)C_{n-r-a} + (2r-2a+3)(n-r-a+1)C_{n-r-a+1}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Constant c_{n-2r-1}. El coeficient de $\tilde{B}'_{2n-2r-1,n-2r-1}$ l'obtenim de la variació de $B'_{2n-2r,n-2r}$ i és

$$\begin{aligned} c_{n-2r-1} &= (2r-2(r+1)+3)(n-r-(r+1)+1)C_{n-2r} \\ &= (n-2r)C_{n-2r}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Una vegada hem escrit les constants de la variació en termes de les constants de (4.13) ja podem resoldre el sistema $\{d_{n-r-a} = 0\}$ per $a \in \{1,\dots,r\}$. A partir de les equacions (4.16) i (4.17) tenim que el sistema que cal resoldre és:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r(n-r)D &=& 2C_{n-r-1} \\ 4a^2 C_{n-r-a} &=& (n-r-a+1)(r-a+1)C_{n-r-a+1}. \end{array} \right.$$

Per inducció obtenim totes les constants en termes de D:

$$\begin{aligned} C_{n-r-a} &= \frac{(n-r-a+1)(n-r-a+2)\cdot\dots\cdot(n-r)(r-a+1)(r-a+2)\cdot\dots\cdot r}{2\cdot 4^{a-1}a^2(a-1)^2\cdot\dots\cdot 1^2} D \\ &= \frac{(n-r)!r!}{2^{2a-1}(n-r-a)!(r-a)!a!a!} D \\ &= \frac{D}{2^{2a-1}}\binom{n-r}{a}\binom{r}{a}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Per determinar el valor de la constant D calculem $\int_{G^{\mathbb{C}}_{n-1,r}(\mathcal{D}_p)} \sigma_{2r}(p)dV$ i $\beta'_{2n-2r-1,n-r-a}$ per $\mathrm{II}|_{\mathcal{D}}(p) = \lambda \mathrm{Id}$, que és el cas quan Ω és una esfera geodèsica. Per una banda tenim,

$$\int_{G^{\mathbb{C}}_{n-1,r}(\mathcal{D}_p)} \sigma_{2r}(p)(\lambda \mathrm{Id}|_V)dV = \lambda^{2r}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})$$

i per altra banda, si $\mathrm{II}|_{\mathcal{D}} = \lambda \mathrm{Id}$, les formes de connexió satisfan $\alpha_{1i} = \lambda\omega_i$ i $\beta_{1i} = \lambda\omega_i$, per tant, $\theta_1 = 2\lambda\theta_2$ i $\theta_0 = \lambda^2\theta_2$ d'on obtenim

$$\begin{aligned} \beta'_{2n-2r-1,n-r-a}(p) &= \lambda^{2r}(\beta \wedge \theta_0^{r-a+1} \wedge \theta_1^{2a-2} \wedge \theta_2^{n-r-a})(p) \\ &= 2^{2a-2}\lambda^{2r}(\beta \wedge \theta_2^{n-1})(p) \\ &= 2^{2a-2}\lambda^{2r}(n-1)! \end{aligned}$$

Així doncs, s'ha de satisfer

$$\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r}) = \sum_{a=1}^{r+1} c_{n-r-a} 2^{2a-2}(n-1)!.$$

Substituint les equacions (4.18), (4.19) i (4.20) a l'expressió anterior obtenim

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{(n-1)!} &= (2(2r+1)(n-r)D - 4C_{n-r-1}) \\
&\quad + \sum_{a=2}^{r} 2^{2a-2}((2r-2a+3)(n-r+a+1)C_{n-r-a+1} - 4a(2a-1)C_{n-r-a}) \\
&\quad + 2^{2r}(n-2r)C_{n-2r} \\
&= 2(2r+1)(n-r)D + 4((2r-1)(n-r-1)-1)C_{n-r-1} \\
&\quad + \sum_{a=2}^{r-1}(-2^{2a-2}4a(2a-1) + 2^{2a}(2r-2a+1)(n-r-a))C_{n-r-a} \\
&\quad + (2^{2r}(n-2r) - 2^{2r-2}4r(2r-1))C_{n-2r} \\
&= 2(2r+1)(n-r)D + \sum_{a=1}^{r} 2^{2a}((2r-2a+1)(n-r-a) - a(2a-1))C_{n-r-a} \\
&\overset{(4.21)}{=} D\left(2(n-r)!r!\sum_{a=0}^{r}\frac{(2r-2a+1)(n-r-a)-a(2a-1)}{(n-r-a)!(r-a)!a!a!}\right) \\
&= D\frac{2\,n!}{r!(n-r-1)!}
\end{aligned}$$

d'on obtenim

$$\begin{aligned}
D &= \frac{\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{2\,n!}\binom{n-1}{r}^{-1} \\
C_{n-r-a} &= \frac{\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{4^a n!}\binom{n-1}{r}^{-1}\binom{n-r}{a}\binom{r}{a}.
\end{aligned}$$

Per tant, l'expressió de la mesura de r-plans complexos, $2r < n$, que tallen un domini regular a $\mathbb{C}^n$ ve donada per

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{L}^{\mathbb{C}}_r} \chi(\Omega \cap L_r)dL_r &= \sum_{a=1}^{r} C_{n-r-a}B'_{2n-2r,n-r-a} + D\Gamma'_{2n-2r,n-r} \\
&= \frac{\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{2\,n!}\binom{n-1}{r}^{-1}\left(\sum_{a=1}^{r}\binom{n-r}{a}\binom{r}{a}2^{-2a+1}B'_{2n-2r,n-r-a} + \Gamma'_{2n-2r,n-r}\right)
\end{aligned}$$

i la variació de la mesura de r-plans complexos, $2r < n$, que tallen un domini regular a $\mathbb{C}^n$ ve donada per

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\mathcal{L}^{\mathbb{C}}_r} \chi(\Omega_t \cap L_r)dL_r &= (2(2r+1)(n-r)D - 4C_{n-r-1})B'_{2n-2r-1,n-r-1} \\
&\quad + \sum_{a=2}^{r}((2r-2a+3)(n-r+a+1)C_{n-r-a+1} - 4a(2a-1)C_{n-r-a})B'_{2n-2r-1,n-r-a} \\
&\quad + (n-2r)C_{n-2r}B'_{2n-2r-1,n-2r-1} \\
&= \frac{\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{n!}\binom{n-1}{r}^{-1}\left(\sum_{a=1}^{r+1}\binom{n-r}{a}\binom{r+1}{a}\frac{a}{4^{a-1}}\tilde{B}'_{2n-2r-1,n-r-a}\right). \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

Finalment, apliquem el canvi de (4.11) per obtenir el resultat respecte les valoracions $\{B_{k,q}, \Gamma_{k,q}\}$. □

Observació 4.3.2. El cas $2r \geq n$ també es pot trobar directament a partir de la relació entre les diferents bases de valoracions de $\mathbb{C}^n$ i la fórmula de Gauss-Bonnet a $\mathbb{C}^n$. De [Ale03] tenim

$$\int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}} \chi(\Omega \cap L_r) dL_r = \frac{1}{O_{2r-1}} \int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}} M_{2r-3}(\partial\Omega \cap L_r) dL_r = cU_{2(n-r),n-r}(\Omega)$$

per a certa constant c que ve de les diferents normalitzacions de dL_r.

A la secció 3 de l'article [BF08] es relacionen les valoracions $U_{k,q}$ amb els volums intrínsecs hermítics. Utilitzant aquestes relacions s'obté la mateixa expressió que al teorema anterior pel cas $2r \geq n$.

Corol·lari 4.3.3. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ domini regular, X un camp diferenciable definit a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ i ϕ_t el flux associat al camp X. Denotem $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$. Llavors,*

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}} \chi(\Omega_t \cap L_r) dL_r = \mathrm{vol}(G_{n-1,r}^{\mathbb{C}}) \omega_{2r+1} (r+1) \binom{n-1}{r}^{-1} \binom{n}{r}^{-1} \cdot$$
$$\cdot \left(\sum_{q=\max\{0,n-2r-1\}}^{n-r-1} \binom{2n-2r-2q-1}{n-r-q} \frac{1}{4^{n-r-q-1}} \tilde{B}_{2n-2r-1,q}(\Omega) \right). \tag{4.23}$$

Demostració. Comparant l'equació (4.9) i la proposició 4.2.1 en el cas $\epsilon = 0$ tenim que per Ω convex regular

$$\int_{\partial\Omega} \langle X, N \rangle \left(\int_{G_{n-1,r}^{\mathbb{C}}(T_x\partial\Omega)} \sigma_{2r}(\mathrm{II}|_V) dV \right) dx$$

és igual a la banda dreta de l'equació anterior. Prenent un camp X tal que s'anul·la fora d'un petit entorn d'un punt fixat $x \in \partial\Omega$, es dedueix la següent igualtat entre formes

$$\left(\int_{G_{n-1,r}^{\mathbb{C}}(T_x\partial\Omega)} \sigma_{2r}(\mathrm{II}|_V) dV \right) dx = \frac{\omega_{2r+1}}{\binom{n-1}{r}\binom{n}{r}} \mathrm{vol}(G_{n-1,r}^{\mathbb{C}})(r+1) \cdot \tag{4.24}$$
$$\cdot \sum_{q=\max\{0,n-2r-1\}}^{n-r-1} \binom{2n-2r-2q-1}{n-r-q} \frac{c_{n,2n-2r-1,n-r-q}}{4^{n-r-q-1}} \beta \wedge \theta_0^{r-q+1} \wedge \theta_1^{2q-2} \wedge \theta_2^{n-r-q}.$$

L'equació anterior es pot escriure $P(\mathrm{II})dx = Q(\mathrm{II})dx$ on P i Q són polinomis en les entrades de la segona forma fonamental. Aquests polinomis coincideixen per qualsevol forma bilineal definida positiva. Per tant, $P = Q$ i (4.24) és vàlida per dominis regulars (no necessàriament convexos). A més, és certa a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ per tot ϵ. Aplicant la proposició 4.2.1 tenim el resultat. □

Corol·lari 4.3.4. *L'equació (4.10) és vàlida per $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ domini regular no necessàriament convex.*

Demostració. Considerem $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$ per un cert flux ϕ_t.

A partir del corol·lari anterior coneixem la variació del costat esquerre de (4.10).

Per la proposició 4.1.7, la variació del costat dret és combinació lineal de $\{B_{k,q}, \Gamma_{k,q}\}$. Pel teorema 4.3.1 aquesta combinació lineal coincideix amb el costat dret de (4.23).

Per tant, la variació dels dos costats de (4.10) és la mateixa. Així, la diferència dels dos membres de (4.10) és constant.

Prenem ϕ_t tal que $\phi_t(\Omega)$ convergeixi a un punt per $t \to \infty$. Els dos costats de (4.10) tenen límit nul quan $t \to \infty$, per tant la seva diferència és nul·la per a tot t. □

4.3.2 En espais de curvatura holomorfa constant

Teorema 4.3.5. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ un domini regular. Llavors,*

$$\int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}} \chi(\Omega \cap L_r) dL_r = \mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r}) \binom{n-1}{r}^{-1} \cdot \tag{4.25}$$

$$\cdot \Big(\sum_{k=n-r}^{n-1} \epsilon^{k-(n-r)} \omega_{2n-2k} \binom{n}{k}^{-1} \left(\sum_{q=\max\{0,2k-n\}}^{k-1} \frac{1}{4^{k-q}} \binom{2k-2q}{k-q} \mu_{2k,q}(\Omega) + (k+r-n+1)\mu_{2k,k}(\Omega) \right)$$

$$+ \epsilon^r (r+1) \mathrm{vol}(\Omega)\Big).$$

Observació 4.3.6. Tot seguit donem una demostració del teorema suposant conegut el resultat. A l'apèndix detallem els càlculs que ens han permès obtenir-lo.

Demostració. Si els dos costats de l'expressió tenen la mateixa variació δ_X respecte qualsevol camp X, llavors l'expressió és vàlida. En efecte, prenem una deformació Ω_t de Ω tal que Ω_t convergeixi en un punt. Llavors, els dos costats de (4.25) tenen la mateixa derivada i s'anul·len en el límit.

La variació del costat esquerra de (4.25) està donada al corol·lari 4.3.3. La variació del costat dret es pot calcular utilitzant la proposició 4.1.7 i $\delta_X \mathrm{vol}(\Omega) = 2\tilde{B}_{2n-1,n-1}(\Omega)$. Per tal de simplificar els càlculs reescribim el costat dret de (4.25) com

$$\mathcal{C}_r(\Omega) := \frac{\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{n!} \binom{n-1}{r}^{-1} \{\epsilon^r (r+1) n! \mathrm{vol}(\Omega)$$

$$+ \sum_{j=n-r}^{n-1} \epsilon^{j-n+r} \left(\frac{j-n+r+1}{2} \Gamma'_{2j,j} + \sum_{q=\max\{0,2j-n\}}^{j-1} \frac{1}{4^{j-q}} \binom{n-j}{j-q} \binom{j}{q} B'_{2j,q} \right) \}.$$

A partir de la proposició 4.1.7 tenim

$$\delta_X \mathcal{C}_r(\Omega) = \frac{\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{n!} \binom{n-1}{r}^{-1} [\epsilon^r n(r+1) \delta_x \tilde{B}'_{2n-1,n-1} \tag{4.26}$$

$$+ \sum_{j=n-r}^{n-1} \epsilon^{j-n+r} \frac{j-n+r+1}{2} \{-2(n-j) j \tilde{\Gamma}'_{2j-1,j-1} + 2\epsilon(n-j-1)(j+1)\tilde{\Gamma}'_{2j+1,j}$$

$$+4(n-j+\frac{1}{2}) j \tilde{B}'_{2j-1,j-1} + 4\epsilon \left(\frac{j+1}{2} - (n-j)(2j+\frac{3}{2}) \right) \tilde{B}'_{2j+1,j} + 4\epsilon^2 (n-j-1)(j+\frac{3}{2}) \tilde{B}'_{2j+3,j+1} \}]$$

$$+ \sum_{j=n-r}^{n-1} \sum_{q=\max\{0,2j-n\}}^{j-1} \frac{\epsilon^{j-n+r}}{4^{j-q}} \binom{n-j}{j-q} \binom{j}{q} \{(2j-2q)^2 \tilde{\Gamma}'_{2j-1,q}$$

$$-(n+q-2j) q \tilde{\Gamma}'_{2j-1,q-1} + 2(n+q-2j+\frac{1}{2}) q \tilde{B}'_{2j-1,q-1} - 2(2j-2q)(2j-2q-1)\tilde{B}'_{2j-1,q}$$

$$+2\epsilon(2j-2q)(2j-2q-1)\tilde{B}'_{2j+1,q+1} - 2\epsilon(n-2j+q)(q+\frac{1}{2})\tilde{B}'_{2j+1,q}\}.$$

Provem que l'expressió anterior és independent d'ϵ; és a dir, tots els termes que contenen ϵ es cancel·len. D'aquí obtenim que $\delta_X \mathcal{C}_r(\Omega)$ coincideix amb (4.23) ja que aquest fet és conegut $\epsilon = 0$. Això demostra el teorema.

Estudiem primer els termes amb $\tilde{B}'_{k,q}$. Reagrupant els termes similars, la tercera línea de (4.26) s'escriu com

$$\sum_{h=n-r+1}^{n-1} \epsilon^{h-n+r} 2\{(h-n+r+1)(n-h+\frac{1}{2})h + (h-n+r)(\frac{h}{2} - (n-h+1)(2h-\frac{1}{2})) \tag{4.27}$$

$$+(h-n+r+1)(n-h+1)(h-\frac{1}{2})\}\tilde{B}'_{2h-1,h-1}$$
$$-\epsilon^r\{(r+2)n-1\}\tilde{B}'_{2n-1,n-1}+(2r+1)(n-r)\tilde{B}'_{2n-2r-1,n-r-1}.$$

Reagrupant els termes similars, el doble sumatori de (4.26) (oblidant per un moment els termes amb $\tilde{\Gamma}'_{k,q}$) s'escriu com

$$\sum_{h=n-r}^{n-1}\sum_{a=\max\{-1,2h-n-1\}}^{h-2}\frac{\epsilon^{h-n+r}}{4^{h-a-1}}\binom{n-h}{h-a-1}\binom{h}{a+1}2(n+a-2h+\frac{3}{2})(a+1)\tilde{B}'_{2h-1,a}$$
$$-\sum_{h=n-r}^{n-1}\sum_{a=\max\{0,2h-n\}}^{h-1}\frac{\epsilon^{h-n+r}}{4^{h-a}}\binom{n-h}{h-a}\binom{h}{a}2(2h-2a)(2h-2a-1)\tilde{B}'_{2h-1,a}$$
$$+\sum_{h=n-r+1}^{n}\sum_{a=\max\{1,2h-n-1\}}^{h-1}\frac{\epsilon^{h-n+r}}{4^{h-a}}\binom{n-h+1}{h-a}\binom{h-1}{a-1}2(2h-2a)(2h-2a-1)\tilde{B}'_{2h-1,a}$$
$$-\sum_{h=n-r+1}^{n}\sum_{a=\max\{0,2h-n-2\}}^{h-2}\frac{\epsilon^{h-n+r}}{4^{h-a-1}}\binom{n-h+1}{h-a-1}\binom{h-1}{a}2(n-2h+a+2)(a+\frac{1}{2})\tilde{B}'_{2h-1,a}.$$

Observem que els termes amb $a=-1$ o $a=2h-n-2$ s'anul·len, si surten en el sumatori. Llavors, es pot verificar que tots els termes de l'expressió anterior es cancel·len excepte aquells amb $h=n-r,n$, i aquells amb $a=h-1$. Clarament els termes corresponents a $h=n-r$ són independents d'ϵ. Els termes amb $h=n$ sumen $\epsilon^r(n-1)\tilde{B}'_{2n-1,n-1}$, i junt amb el terme similar que apareix a (4.27) anul·len el primer terme de (4.26). Finalment, els termes amb $a=h-1$ són cancel·lats amb la suma a (4.27).

Amb un anàlisis similar, però més curt, es pot verificar que els múltiples de $\tilde{\Gamma}'_{k,q}$ s'anul·len completament. Això prova que (4.26) és independent d'ϵ, i acaba la demostració. □

4.4 Fórmula de Gauss-Bonnet a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$

Teorema 4.4.1. *Sigui Ω un domini regular a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$. Llavors*

$$\omega_{2n}\chi(\Omega)=(n+1)\epsilon^n\mathrm{vol}(\Omega)+ \tag{4.28}$$
$$+\sum_{c=0}^{n-1}\frac{(n-c)\omega_{2n-2c}\epsilon^c}{n\binom{n-1}{c}}\left(\sum_{q=\max\{0,2c-n\}}^{c-1}\frac{1}{4^{c-q}}\binom{2c-2q}{c-q}\mu_{2c,q}(\Omega)+(c+1)\mu_{2c,c}(\Omega)\right).$$

Observació 4.4.2. Per $\epsilon=0$ estem considerant el teorema de Gauss-Bonnet a $\mathbb{C}^n\cong\mathbb{R}^{2n}$ on és conegut:

$$\chi(\Omega)=\frac{1}{2n\omega_{2n}}M_{2n-1}(\partial\Omega)=\mu_{0,0}(\Omega),$$

que és precisament l'expressió que s'obté de la fórmula de l'enunciat.

Com en el teorema 4.3.5, donem aquí una demostració a partir de suposar conegut el resultat i a l'apèndix detallem els càlculs que ens han permès obtenir el resultat.

Demostració. La demostració és anàloga a la del teorema 4.3.5. En efecte, els mateixos càlculs que a la demostració del teorema 4.3.5 mostra (en el cas $r=n$) que la variació de la part dreta de (4.28) s'anul·la.

Per $\epsilon=0$, l'equació (4.28) és la coneguda fórmula de Gauss-Bonet a $\mathbb{C}^n\cong\mathbb{R}^{2n}$. Per $\epsilon\neq 0$, prenem una variació diferenciable de Ω per obtenir un domini contingut en una bola de radi r. La part dreta de (4.28) es manté constant sota aquesta deformació. Prenent r prou petit, la diferència entre els dos costats de l'equació es fa arbitràriament petita. Per tant, coincideixen. □

Tot i que en l'expressió del teorema anterior no apareix explícitament la integral de la curvatura de Gauss, es pot fer aparèixer trivialment.

Corol·lari 4.4.3. *Sigui Ω un domini regular a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$. Llavors,*

$$2n\omega_{2n}\chi(\Omega) = M_{2n-1}(\partial\Omega) + 2n(n+1)\epsilon^n \mathrm{vol}(\Omega) + \\ + \sum_{c=1}^{n-1} 2n\omega_{2n-2c}\epsilon^c \binom{n}{c}^{-1} \left(\sum_{q=\max\{0,2c-n\}}^{c-1} \frac{1}{4^{c-q}} \binom{2c-2q}{c-q} \mu_{2c,q}(\Omega) + (c+1)\mu_{2c,c}(\Omega) \right).$$

Demostració. Apliquem la relació (4.6) al resultat del teorema anterior. □

Observacions 4.4.4. 1. Recordem l'expressió de la fórmula de Gauss-Bonnet-Chern per un domini regular Ω en un espai de curvatura seccional constant k de dimensió parell:

$$O_{2m-1}\chi(\Omega) = M_{2n-1}(\partial\Omega) + c_{n-3}M_{2n-3}(\partial\Omega) + \cdots + c_1 M_1(\partial\Omega) + (|k|)^{n/2}\mathrm{vol}(\Omega),$$

on c_j són certes constants conegudes que depenen de la curvatura seccional de l'espai.

Observem que a l'expressió surten totes les integrals de curvatura mitjana d'índex senar i el volum. A la fórmula que hem donat per $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$, $\epsilon \neq 0$, també hi ha tots els volums intrínsecs hermítics de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ amb primer índex senar.

2. A [Sol06] es dóna una expressió de la fórmula de Gauss-Bonnet-Chern per espais de curvatura seccional constant k utilitzant la mesura de plans de codimensió 2 que tallen el domini. La fórmula allà obtinguda per $\Omega \subset \mathbb{RK}^n(\epsilon)$ és la següent:

$$n\omega_n\chi(\Omega) = M_{n-1}(\partial\Omega) + \frac{2k}{\omega_{n-1}} \int_{\mathcal{L}_{n-2}} \chi(\Omega \cap L_{n-2}) dL_{n-2}. \tag{4.29}$$

Una pregunta natural és si en els espais de curvatura holomorfa constant també podem trobar una expressió que relacioni la integral de la curvatura de Gauss amb la característica d'Euler mitjançant la mesura de plans complexos que tallen el domini, és a dir, si per $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ existeix una fórmula de l'estil:

$$c_0\chi(\Omega) \stackrel{?}{=} M_{2n-1}(\partial\Omega) + \sum_{q=1}^{n-1} c_q \int_{\mathcal{L}_q^{\mathbb{C}}} \chi(\Omega \cap L_q) dL_q$$

o bé

$$c_0\chi(\Omega) \stackrel{?}{=} M_{2n-1}(\partial\Omega) + \sum_{q=0}^{n-1} M_{2q+1}(\partial\Omega) + \sum_{q=1}^{n-1} c_q \int_{\mathcal{L}_q^{\mathbb{C}}} \chi(\Omega \cap L_q) dL_q.$$

Utilitzant també variació a banda i banda de les expressions anteriors es pot veure que cap de les dues fórmules anteriors és possible en general (per $n = 2$ i $n = 3$ sí que es poden ajustar les constants). Es pot obtenir però una aproximació, que donem al teorema 4.4.5. Potser seria possible una fórmula similiar a les anteriors si també coneguéssim la mesura dels plans totalment reals que tallen un domini regular. Aquesta és una qüestió que queda pendent d'estudi.

3. Per $n = 2$ la fórmula de Gauss-Bonnet-Chern a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ ja era coneguda de [Par02]. A partir del resultat general anterior obtenim la mateixa expressió, que es pot escriure com:

$$\chi(\Omega) = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{2}\Gamma'_{0,0} + \epsilon \left(\frac{1}{4} B'_{2,0} + \Gamma'_{2,1} \right) + 6\epsilon^2 \mathrm{vol}(\Omega) \right).$$

Dues altres maneres equivalents d'escriure la fórmula anterior són

$$\chi(\Omega) = \frac{1}{2\pi^2}\left(M_3(\partial\Omega) + \frac{3\epsilon}{2}\left(M_1(\partial\Omega) + \int_{\partial\Omega} k_n(JN)\right) + 12\epsilon^2 \mathrm{vol}(\Omega)\right) \tag{4.30}$$

i

$$\chi(\Omega) = \frac{1}{2\pi^2}\left(M_3(\partial\Omega) + 2\epsilon\int_{\mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}} \chi(\Omega\cap L_1)dL_1 + \frac{\epsilon}{2}\int_{\partial\Omega} k_n(JN) + 12\epsilon^2\mathrm{vol}(\Omega)\right).$$

En el següent resultat expressem la característica d'Euler en termes de la integral de la curvatura de Gauss, el volum, la mesura d'hiperplans complexos i les valoracions $\mu_{2c,c}$. Aquesta fórmula ve a generalitzar (4.29) en espais de curvatura holomorfa constant.

Teorema 4.4.5. *Si Ω és un domini regular a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ aleshores*

$$\begin{aligned}\omega_{2n}\chi(\Omega) &= \epsilon\int_{\mathcal{L}_{n-1}^{\mathbb{C}}} \chi(\Omega\cap L_{n-1})dL_{n-1} + \sum_{c=0}^{n}\frac{\epsilon^c\omega_{2n}}{\omega_{2c}}\mu_{2c,c}(\Omega)\\ &= \frac{1}{2n}M_{2n-1}(\partial\Omega) + \epsilon\int_{\mathcal{L}_{n-1}^{\mathbb{C}}}\chi(\Omega\cap L_{n-1})dL_{n-1} + \sum_{c=1}^{n}\frac{\epsilon^c\omega_{2n}}{\omega_{2c}}\mu_{2c,c}(\Omega).\end{aligned}$$

Demostració. A partir dels teoremes 4.3.5 i 4.4.1 tenim la igualtat d'aquest teorema:

$$\begin{aligned}\chi(\Omega) &= \sum_{c=0}^{n-1}\frac{\epsilon^c\, c!}{\pi^c}\left(\sum_{q=\max\{0,2c-n\}}^{n-1}\frac{1}{4^{c-q}}\binom{2c-2q}{c-q}B_{2c,q}(\Omega) + (c+1)\Gamma_{2c,c}(\Omega)\right) + \frac{\epsilon^n(n+1)!}{\pi^n}\mathrm{vol}(\Omega)\\ &= \Gamma_{0,0}(\Omega) + \sum_{c=1}^{n-1}\frac{\epsilon^c\, c!}{\pi^c}\left(\sum_{q=\max\{0,2c-n\}}^{n-1}\frac{1}{4^{c-q}}\binom{2c-2q}{c-q}B_{2c,c}(\Omega) + (c+1)\Gamma_{2c,c}(\Omega)\right) + \frac{\epsilon^n(n+1)!}{\pi^n}\mathrm{vol}(\Omega)\\ &= \Gamma_{0,0}(\Omega) + \frac{\epsilon\, n!}{\pi^n}\sum_{c=1}^{n-1}\frac{\epsilon^{c-1}\, c!\pi^{n-c}}{n!}\left(\sum_{q=\max\{0,2c-n\}}^{n-1}\frac{1}{4^{c-q}}\binom{2c-2q}{c-q}B_{2c,c}(\Omega) + c\Gamma_{2c,c}(\Omega)\right) +\\ &\quad + \frac{\epsilon\, n!}{\pi^n}\sum_{c=1}^{n-1}\frac{\epsilon^{c-1}c!\pi^{n-c}}{n!}\Gamma_{2c,c}(\Omega) + \frac{\epsilon^n(n+1)!}{\pi^n}\mathrm{vol}(\Omega)\\ &= \Gamma_{0,0}(\Omega) + \frac{\epsilon\, n!}{\pi^n}\int_{\mathcal{L}_{n-1}^{\mathbb{C}}}\chi(\Omega\cap L_{n-1})dL_{n-1} + \sum_{c=1}^{n-1}\frac{\epsilon^c\, c!}{\pi^c}\Gamma_{2c,c}(\Omega) + \left(\frac{\epsilon^n(n+1)!}{\pi^n} - \frac{\epsilon^n\, n!n}{\pi^n}\right)\mathrm{vol}(\Omega).\end{aligned}$$

□

4.5 Un altre mètode per calcular la mesura de rectes complexes que tallen un domini

A partir del teorema 4.3.5 podem donar una expressió de la mesura de rectes complexes que tallen un domini regular (només cal prendre $r = 1$). En aquest apartat, però, volem donar una altra manera d'arribar a l'expressió a partir dels resultats del capítol 3.

4.5.1 Mesura de rectes complexes que tallen un domini a $\mathbb{C}^n$

Proposició 4.5.1. *Sigui Ω domini regular de $\mathbb{C}^n$. Llavors,*

$$\int_{\mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}}\chi(\Omega\cap L_1)dL_1 = \frac{\omega_{2n-4}}{4n(n-1)}\left((2n-1)M_1(\partial\Omega) + \int_{\partial\Omega}k_n(Jn)\right).$$

Demostració. Recordem que cada recta complexa és isomètrica a $\mathbb{C}$. El teorema de Gauss-Bonnet és conegut a $\mathbb{C}^n$ per hipersuperfícies $\partial\Omega$ i afirma

$$M_{2n-1}(\partial\Omega) = 2n\omega_{2n}\chi(\Omega).$$

Aplicant el teorema de Gauss-Bonnet a $\mathbb{C}$ i la proposició 3.3.2 amb $s = 1$ tenim

$$\int_{\mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}} \chi(\Omega \cap L_1)dL_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}}\int_{\partial\Omega\cap L_1} k_g dp dL_1 = \frac{\omega_{2n-2}}{4n\omega_2}\left((2n-1)M_1(\partial\Omega) + \int_{\partial\Omega} k_n(Jn)\right),$$

tal com volíem provar. □

Tot i que tenim Gauss-Bonnet a $\mathbb{C}^n$ per a tot $n \geq 1$ no podem trobar la mesura de s-plans que tallen un domini seguint el mateix mètode ja que no coneixem la integral $\int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}} M_{2r-1}(\partial\Omega \cap L_r)dL_r$. De fet, a la següent secció obtenim una expressió d'aquesta integral a partir de la fórmula de Gauss-Bonnet i la mesura de r-plans complexos que tallen un domini.

4.5.2 Mesura de rectes complexes que tallen un domini a $\mathbb{CP}^n$ i $\mathbb{CH}^n$

El següent resultat es troba, per exemple, a [ÁPF04].

Proposició 4.5.2 ([ÁPF04])**.** *Sigui Ω domini regular de $\mathbb{CP}^n$ o $\mathbb{CH}^n$. Llavors,*

$$\int_{\mathcal{L}_s^{\mathbb{C}}} \mathrm{vol}_{2s}(\Omega \cap L_s)dL_s = C\mathrm{vol}_{2n}(\Omega).$$

El valor de la constant, C, però no és conegut. Ara ens interessa conèixer explícitament el valor de la constant per tal de poder aplicar el resultat al càlcul de la mesura de rectes i plans complexos que tallen un domini.

Proposició 4.5.3. *Sigui Ω domini regular de $\mathbb{CP}^n$ o $\mathbb{CH}^n$. Llavors,*

$$\int_{\mathcal{L}_s^{\mathbb{C}}} \mathrm{vol}_{2s}(\Omega \cap L_s)dL_s = \mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n,n-s})\mathrm{vol}_{2n}(\Omega).$$

Demostració. Per trobar la constant apliquem la proposició anterior a una bola de radi R. Sigui L_s un s-pla complex que interseca B_R a distància ρ del centre de la bola. A partir del lema 3.2.13 de [Gol99], tenim que la intersecció $B_R \cap L_s$ és un bola de dimensió complexa s amb radi r tal que

$$\cos_\epsilon(R) = \cos_\epsilon(r)\cos_\epsilon(\rho).$$

L'expressió del volum d'una bola geodèsica de radi R de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ és (cf. [Gra73])

$$\mathrm{vol}_{2n}(B_R) = \frac{\pi^n}{|\epsilon|^n\, n!}\sin^{2n}_\epsilon(R).$$

Utilitzant aquesta expressió obtenim

$$\mathrm{vol}_{2s}(L_s \cap B_R) = \left(\frac{\pi}{|\epsilon|}\right)^s \frac{1}{s!}\left(\frac{\cos^2_\epsilon(R) - \cos^2_\epsilon(\rho)}{\cos^2_\epsilon(\rho)}\right)^s.$$

Per altra banda, l'expressió del Jacobià per l'aplicació de canvi a coordenades polars és (cf. [Gra73])

$$\frac{\cos_\epsilon(R)\sin^{2n-1}_\epsilon(R)}{|\epsilon|^{n-1/2}}.$$

Llavors, utilitzant l'expressió de la proposició 1.5.8, obtenim

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{L}_s^{\mathbb{C}}} \mathrm{vol}_{2s}(L_s \cap B_R)dL_s &= \frac{\pi^s \mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n,n-s})O_{2(n-s)-1}}{|\epsilon|^{n-1/2}s!}\sum_{i=0}^{s}(-1)^{i+1}\binom{s}{i}\cdot \\ &\quad\cdot\int_0^R \sin_\epsilon^{2(n-s)-1}(\rho)\cos_\epsilon^{2i}(R)\cos_\epsilon^{2(s-i)+1}(\rho)d\rho \\ &= \frac{\pi^s \mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n,n-s})O_{2(n-s)-1}}{|\epsilon|^{n-1/2}s!}\cdot \\ &\quad\cdot\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{s-i}\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i+1}\binom{s}{i}\binom{s-i}{j}\binom{i}{k}\frac{\sin_\epsilon^{2(n-s+k+j)}(R)}{\sqrt{\epsilon}(n-s+j)}.\end{aligned}$$

De la proposició 4.5.2 sabem que aquesta expressió és múltiple de

$$\mathrm{vol}_{2n}(B_R) = \frac{\pi^n}{|\epsilon|^n n!}\sin_\epsilon^{2n}(R).$$

Així, tots els termes de la suma són zero excepte quan $2(n-s+k+j) = 2n$, és a dir, per $k+j=s$. Això junt amb $j \leq s-i$, $k \leq i$ implica $j = s-i$, $k = i$ i tenim

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{L}_s^{\mathbb{C}}} \mathrm{vol}_{2s}(L_s \cap B_R)dL_s \\ &\quad= \frac{\pi^s \mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n,n-s})O_{2(n-s)-1}}{|\epsilon|^n s!}\sum_{i=0}^{s}(-1)^{i+1}\binom{s}{i}\frac{\sin_\epsilon^{2n}(R)}{2(n-i)} \\ &\quad= \frac{\pi^s \mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n,n-s})O_{2(n-s)-1}}{2|\epsilon|^n}\sin_\epsilon^{2n}(R)\sum_{i=0}^{s}\frac{(-1)^{i+1}}{i!(s-i)!(n-i)} \\ &\quad= \frac{\pi^s \mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n,n-s})O_{2(n-s)-1}(n-s-1)!}{2|\epsilon|^n n!}\sin_\epsilon^{2n}(R).\end{aligned}$$

Ara, a partir de la igualtat

$$C\frac{\pi^n}{|\epsilon|^n n!} = \frac{\pi^s \mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n,n-s})O_{2(n-s)-1}(n-s-1)!}{2|\epsilon|^n n!}$$

i utilitzant que $O_{2(n-s)-1} = 2(n-s)\omega_{2(n-s)} = 2\frac{\pi^{n-s}}{(n-s-1)!}$ obtenim el valor de C.

□

Corol·lari 4.5.4. *Sigui Ω domini regular a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$. Llavors*

$$\int_{\mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}}\chi(\Omega\cap L_1)dL_1 = \frac{\omega_{2n-4}}{4n(n-1)}\left((2n-1)M_1(\partial\Omega) + \int_{\partial\Omega}k_n(JN) + 8n\epsilon\mathrm{vol}(\Omega)\right).$$

on $k_n(JN)$ la curvatura normal en la direcció JN.

Demostració. Utilitzant la fórmula de Gauss-Bonnet a $\mathbb{H}^2(-4)$ tenim (veure [San04, p.309])

$$\int_{\mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}}\chi(\Omega\cap L_1)dL_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}}M_1(\partial\Omega\cap L_1)dL_1 - \frac{2}{\pi}\int_{\mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}}\mathrm{vol}(\Omega\cap L_1)dL_1$$

i utilitzant la reproductibilitat pel volum (proposició 4.5.3) amb $s=1$ i la proposició 3.3.2 obtenim el resultat. □

Corol·lari 4.5.5. *Si Ω és un domini regular de $\mathbb{CK}^2(\epsilon)$, $\epsilon \neq 0$, aleshores*

$$\int_{\Omega\cap L_1\neq\emptyset} \chi(\Omega\cap L_1)dL_1 = \frac{1}{4}\left(M_1(\partial\Omega) - \frac{1}{3\epsilon}M_3(\partial\Omega) + 4\epsilon\mathrm{vol}(\Omega) + \frac{2\pi^2}{3\epsilon}\chi(\Omega)\right).$$

Demostració. Del corol·lari anterior, amb $n = 2$, obtenim

$$\int_{\mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}} \chi(\Omega\cap L_1)dL_1 = \frac{1}{8}\left(3M_1(\partial\Omega) + \int_{\partial\Omega} k_n(JN) + 16\epsilon\mathrm{vol}(\Omega)\right).$$

Ara, aïllant $\int_{\partial\Omega} k_n(JN)$ de l'expressió (4.30) obtenim el resultat de l'enunciat. □

Observem que el corol·lari anterior no té sentit per $\epsilon = 0$ ja que l'expressió (4.30) no té el terme $\int_{\partial\Omega} k_n(JN)$.

4.6 Fórmules de Crofton per a la curvatura total a $\mathbb{C}^n$

Teorema 4.6.1. *Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ és un domini regular aleshores*

$$\int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}} M_{2r-1}(\partial\Omega\cap L_r)dL_r = 2r\omega_{2r}^2\mathrm{vol}(G_{n-1,r}^{\mathbb{C}})\binom{n-1}{r}^{-1}\binom{n}{r}^{-1}\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{q=\max\{0,n-2r\}}^{n-r}\frac{1}{4^{n-r-q}}\binom{2n-2r-2q}{n-r-q}\mu_{2n-2r,q}(\Omega)\right).$$

Demostració. Per una banda, utilitzant la fórmula de Gauss-Bonnet a $\mathbb{C}^n$ i la relació (4.6) tenim

$$\int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}} M_{2r-1}(\partial\Omega\cap L_r)dL_r = 2r\omega_r\int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}}\chi(\Omega\cap L_r)dL_r = 2r\omega_{2r}\int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}}\mu_{0,0}(\Omega\cap L_r)dL_r. \tag{4.31}$$

Per altra banda, utilitzant el teorema 4.3.1, tenim

$$\int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}}\chi(\Omega\cap L_r)dL_r = \mathrm{vol}(G_{n-1,r}^{\mathbb{C}})\omega_{2r}\binom{n-1}{r}^{-1}\binom{n}{r}^{-1}$$
$$\cdot\left(\sum_{q=\max\{0,n-2r\}}^{n-r}\frac{1}{4^{n-r-q}}\binom{2n-2r-2q}{n-r-q}\mu_{2n-2r,q}(\Omega)\right),$$

i obtenim l'expressió de l'enunciat. □

Capítol 5

Altres fórmules de Crofton

En el capítol anterior hem donat una expressió per la mesura de plans complexos que tallen un domini regular en un espai de curvatura holomorfa constant. Els plans complexos de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ són subvarietats totalment geodèsiques, però no són les úniques, sinó que els plans totalment reals també són subvarietats totalment geodèsiques a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ per a qualsevol ϵ (cf. teorema 1.4.6). A més a més, per $\epsilon = 0$, hi ha moltes altres subvarietats totalment geodèsiques, d'aquestes ens interessen els plans afins que són holomòrficament isomètrics a $\mathbb{C}^p \oplus \mathbb{R}^{k-2p}$. Observem que els plans complexos i els totalment reals en són casos particulars, per $(k,p) = (2p,p)$ i $(k,p) = (k,0)$, respectivament.

En aquest capítol donem l'expressió de la mesura dels plans de tipus $(2n-p, n-p)$ que tallen un domini regular a $\mathbb{C}^n$, els anomenats plans coisotròpics, i pels plans Lagrangians a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$.

5.1 Espai de (k,p)-plans

Primer de tot, donem la definició de (k,p)-pla a $\mathbb{C}^n$, seguint [BF08].

Definició 5.1.1. Suposem que V és un espai vectorial real i $\mathcal{L}_k^n(V)$ denota l'espai de tots els subespais afins de dimensió k de V. Si $V = \mathbb{C}^n$, considerat com a espai vectorial real, llavors l'*espai dels* (k,p)*-plans*, $\mathcal{L}_{k,p}(\mathbb{C}^n) \subset \mathcal{L}_k^n(\mathbb{C}^n)$ es defineix com el conjunt de tots els subespais de dimensió (real) k que es poden expressar com a suma ortogonal d'un subespai complex de dimensió complexa p i un subespai totalment real de dimensió real $(k-2p)$.

Denotem per $L_{k,p}$ els elements de $\mathcal{L}_{k,p}(\mathbb{C}^n)$ i la Grassmaniana de tots els (k,p)-plans en un espai vectorial V que passen per l'origen per $G_{n,k,p}(V)$.

De la definició anterior tenim que $\mathcal{L}_{k,p}(\mathbb{C}^n)$ és l'òrbita de $\mathbb{C}^p \oplus \mathbb{R}^{k-2p}$ sota l'acció del grup $\mathbb{C}^n \rtimes U(n)$, isometries holomorfes de $\mathbb{C}^n$.

La noció de (k,p)-pla es pot estendre a $\mathbb{CH}^n$. A [Gol99] i [Hsi98], es consideren a $\mathbb{CH}^n$ les anomenades subvarietats lineals que definim a continuació.

Definició 5.1.2. Anomenem *subvarietat lineal* a la imatge per l'aplicació exponencial en un punt $x \in \mathbb{CH}^n$ d'un subespai vectorial de $T_x\mathbb{CH}^n$.

Anomenem (k,p)*-pla lineal* a la imatge per l'aplicació exponencial en un punt $x \in \mathbb{CH}^n$ d'un (k,p)-pla de $T_x\mathbb{CH}^n$.

La definició anterior es podria considerar també a $\mathbb{CP}^n$ però fent-ho s'obtenen subvarietats singulars. Els únics casos en què obtenim una subvarietat regular són els casos en què també obtenim una subvarietat totalment geodèsica, és a dir, pels plans complexos, que serien els $(2p,p)$-plans i els pels plans totalment real, que serien els $(k,0)$-plans.

A $\mathbb{CH}^n$, les subvarietat lineals no són sempre totalment geodèsiques. Les úniques subvarietats totalment geodèsiques són també els plans complexos ($L_{2p,p} \in \mathcal{L}_{2p,p}$, $p \in \{1, ..., n-1\}$) i els plans totalment reals ($L_{k,0} \in \mathcal{L}_{k,0}$, $k \in \{1, ..., n\}$) (cf. teorema 1.4.6).

5.1.1 Bisectors

Tot seguit mostrem algunes propietats dels bisectors a $\mathbb{CH}^n$, la majoria d'elles recollides a [Gol99]. Els bisectors són considerats (cf. [Gol99, p. 152]) com els substituts naturals dels hiperplans (reals) ja que són hipersuperfícies mínimes i estan generades per l'aplicació exponencial.

Definició 5.1.3. Siguin z_1, z_2 punts diferents de $\mathbb{CH}^n$. Definim el *bisector de* $\{z_1, z_2\}$ com

$$\mathfrak{E}(z_1, z_2) = \{z \in \mathbb{CH}^n \mid d(z_1, z) = d(z_2, z)\}$$

on $d(z, z_i)$ denota la distància a $\mathbb{CH}^n$ entre z_i i z (veure proposició 1.2.3).

Observació 5.1.4. La definició anterior a $\mathbb{CP}^n$, dóna lloc a una subvarietat amb singularitats.

Definició 5.1.5. Siguin z_1, z_2 punts diferents de $\mathbb{CH}^n$.

- La geodèsica complexa Σ determinada per z_1 i z_2 s'anomena *espina complexa del bisector* $\mathfrak{E}(z_1, z_2)$.
- L'*espina real del bisector* $\mathfrak{E}(z_1, z_2)$, $\sigma(z_1, z_2)$ és la intersecció del bisector i l'espina complexa, és a dir,

$$\sigma(z_1, z_2) = \mathfrak{E}(z_1, z_2) \cap \Sigma(z_1, z_2) = \{z \in \Sigma \mid d(z_1, z) = d(z_2, z)\}.$$

- Una *llesca del bisector* $\mathfrak{E}(z_1, z_2)$ és un hiperplà complex $\Pi_\Sigma^{-1}(s)$ on $\Pi : \mathbb{CH}^n \longrightarrow \Sigma$ denota la projecció ortogonal sobre Σ.

Observació 5.1.6.
1. El conjunt de llesques d'un bisector donen una fol·liació del bisector amb hiperplans complexos.
2. L'espina real és una geodèsica (real) dins de $\mathbb{CH}^n$ ja que Σ és totalment geodèsic i isomètric a $\mathbb{H}^2$ i a l'espai hiperbòlic real la mediatriu de dos punts és una geodèsica.
3. Tota geodèsica γ de $\mathbb{CH}^n$ és espina d'un únic bisector. En efecte, considerem la geodèsica complexa Σ que conté γ i la projecció ortogonal a Σ. Llavors $\Pi_\Sigma^{-1}(\gamma)$ determina un bisector.

Exemple 5.1.7. A $\mathbb{CH}^2$ amb el model del disc, el bisector respecte els punts $z_1 = [(1, 0, i)]$ i $z_2 = [(1, 0, -i)]$ és

$$\mathfrak{E}(z_1, z_2) = \{[(1, z, t)] \in \mathbb{CH}^n \mid z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}\}.$$

Es pot obtenir l'expressió directament utilitzant l'expressió per la distància entre 2 punts donada a la proposició 1.2.3.

L'espina complexa és $\left\{\left[\left(1, 0, i\dfrac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}\right)\right] \text{ amb } \lambda, \mu \in \mathbb{C} \text{ no nuls a la vegada}\right\}$ i l'espina real $\{[1, 0, t]\}$.

Proposició 5.1.8. *Les isometries de* $\mathbb{CH}^n$ *actuen transitivament sobre el conjunt de bisectors.*

Demostració. Per la correspondència entre els bisectors i les geodèsiques tenim que les isometries actuen transitivament els bisectors ja que actuen transitivament sobre les geodèsiques. $\square$

Sabem que no hi ha cap isometria no trivial que fixi un bisector punt a punt per no ser una hipersuperfície totalment geodèsica (per $\epsilon \neq 0$). De totes maneres, podem considerar reflexió respecte una llesca S del bisector. Aquesta reflexió fixa punt a punt la llesca S i deixa el bisector invariant. A més, cada una d'aquestes reflexions és una reflexió de l'espina σ del bisector, i fixa el punt de $\sigma \cap S$.

Els bisectors són *hipersuperfícies de cohomogenitat 1.* És a dir, l'òrbita d'un punt d'un bisector (excepte pels punts de σ, que tenen mesura nul·la dins del bisector) per les isometries que fixen el bisector és una subvarietat de codimensió 1 dins del bisector; una subvarietat de codimensió 2 de $\mathbb{CH}^n$ (cf. [GG00]).

Per tant, els bisectors no són *hipersuperfícies homogènies.* Per definició una hipersuperfície és homogènea si l'òrbita de cada punt, respecte el subgrup d'isometries que deixen la hipersuperfície invariant, és tota la hipersuperfície.

Estudiem l'òrbita d'un punt d'un bisector. Primer de tot observem que una geodèsica $\gamma(t) \subset \mathbb{CH}^n$ determina de manera única un tub $T(r)$ de radi r (format per tots els punts a distància r de γ) i un bisector $\mathfrak{E}$ amb espina real γ.

Volem estudiar la relació entre aquestes dues hipersuperfícies. En concret, donem l'òrbita d'un punt del bisector en termes del tub que passa pel punt.

Proposició 5.1.9. *Sigui $p \in \mathfrak{E}$. Considerem r tal que $p \in T(r) \cap \mathfrak{E}$ on $T(r)$ denota el tub de radi r al voltant de l'espina real γ de $\mathfrak{E}$. L'òrbita de p per les isometries que fixen $\mathfrak{E}$ coincideix amb $T(r) \cap \mathfrak{E}$.*

Demostració. Tot punt de l'òrbita O_p de p està contingut a $T(r)$ ja que les isometries que fixen el bisector han de fixar l'espina i conservar distàncies. Llavors, $O_p \subset T(r) \cap \mathfrak{E}$.

Tot punt de $T(r) \cap \mathfrak{E}$ és de l'òrbita de p. En efecte, si $q \in T(r) \cap \mathfrak{E}$ llavors $d(q,\gamma(t)) = d(p,\gamma(t))$ condició necessària per tal que un punt q sigui de l'òrbita de p. Tenim dues situacions diferents pels punts p, q segons la projecció d'aquests punts a Σ sigui el mateix punt o no. Provem que en ambdós casos existeix una isometria que fixa el bisector i porta p a q.

Suposem que p, q projecten a Σ al mateix punt x, és a dir, $x = \Pi_\Sigma p = \Pi_\Sigma q$, llavors p i q estan a la mateixa llesca de $\mathfrak{E}$. Construïm g una isometria que fixi el bisector i x. Denotem per v el vector director de l'espina real γ en x. Com que les isometries que fixen el bisector fixen γ, g satisfà $dg(v) = \pm v$ i, per conservar g l'angle d'holomorfia tenim $dg(Jv) = \pm Jv$, de manera que g fixa el pla complex generat per γ, és a dir, l'espina complexa Σ. Per altra banda, però, g també fixa el subespai ortogonal a Σ en x, que és isomètric a $\mathbb{CK}^{n-1}(\epsilon)$ i coincideix amb la llesca que conté els punts p i q. Ara bé, a $\mathbb{CK}^{n-1}(\epsilon)$ existeix una isometria $\tilde{g}$ que porta p a q (per ser $\mathbb{CK}^{n-1}(\epsilon)$ un espai homogeni). Per tant, g definida com $g(x) = x$, $dg(v) = \pm v$, $dg(Jv) = \pm Jv$ i $dg(u) = \tilde{d}g(u)$, per a togot $u \in \langle v, Jv\rangle^\perp$, determina una isometria de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ que fixa el bisector $\mathfrak{E}$ i porta p a q.

Suposem que p i q no projecten a Σ al mateix punt. Sigui $x = \Pi_\Sigma p$ i $y = \Pi_\Sigma q$. Observem que $x, y \in \gamma$ ja que p i q són punts del bisector. Llavors existeix una reflexió ρ tal que $\rho(x) = y$ i deixa γ invariant. Per tant, $d\rho$ porta l'espai ortogonal de $\{\gamma'_x, J\gamma'_x\}$ a l'espai ortogonal de $\{\gamma'_y, J\gamma'_y\}$. A més, $\tilde{q} = \rho(q)$ satisfà $\Pi_\Sigma \tilde{q} = \Pi_\Sigma q$. Si considerem els punts $\tilde{q}$ i q estem en el cas anterior i sabem que existeix una isometria que porta $\tilde{q}$ a q. □

De la proposició anterior tenim que el conjunt de bisectors que passen per un punt és un subconjunt no acotat, dins de l'espai de bisectors. A la següent proposició veiem que, de fet, la mesura de bisectors que tallen un domini és infinita.

Observació 5.1.10. Denotem per dL la densitat invariant de l'espai de bisectors $\mathfrak{B}$ i per dL_1 la densitat invariant de l'espai de geodèsiques reals a $\mathbb{CH}^n$. Per la correspondència entre geodèsiques i bisectors tenim

$$dL = dL_1.$$

Si denotem per Σ la geodèsica complexa que conté una geodèsica real γ, llavors la densitat de l'espai de geodèsiques reals s'expressa com

$$dL_1 = dL_1^{\Sigma} d\Sigma,$$

on $d\Sigma$ denota la densitat de l'espai de rectes complexes i dL_1^{Σ} la densitat de l'espai de geodèsiques reals contingudes a Σ. Ara bé, utilitzant coordenades polars ρ, θ a Σ tenim

$$dL_1^{\Sigma} d\Sigma = \cos_{4\epsilon}(\rho) d\rho d\theta d\Sigma. \tag{5.1}$$

Proposició 5.1.11. *La mesura de bisectors que tallen un domini regular a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ amb $\epsilon < 0$ és infinita.*

Demostració. Provem que la mesura de bisectors que tallen una bola B de radi R de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ és infinita, és a dir,

$$\int_{\mathfrak{B}} \chi(B \cap L) dL = +\infty.$$

Considerem l'expressió per la densitat de bisector de (5.1). Denotem l'element de volum de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ per dx. Aquest es pot expressar com $dx = dx_1 dx_L$ on dx_L denota l'element de volum del bisector i dx_1 l'element de longitud de la direcció N_x ortogonal al bisector en el punt x.

Si considerem el vector N_y normal al bisector en el punt $y = \Pi_{\Sigma}(x)$, llavors el pla generat per N_y (que coincideix amb el vector normal a l'espina real dins de Σ) i el vector u tangent a la geodèsica que uneix y i x és totalment real i conté N_x.

Per tant, el pla $\exp_y(\mathrm{span}\{N_y, u\})$ és isomètric a $\mathbb{H}^2(\epsilon)$. Si r denota la distància entre y i x, llavors se satisfà $dx_1 = \cos_{\epsilon}(r) dy_1$ on dy_1 denota l'element de longitud en la direcció N_y.

A l'observació anterior donem una expresió per dL_1. Ara, l'utilitzem prenent coordenades polars respecte $y \in \Sigma$, de manera que $\rho = 0$. Llavors, $dy_1 = d\rho$ i

$$dx_L dL_1 = dx_L dL_1^{\Sigma} d\Sigma = dx_L d\theta d\rho d\Sigma = d\theta dx_L dy_1 d\Sigma = \frac{1}{\cos_{\epsilon}(r)} d\theta d\Sigma dx.$$

Per altra banda, observem que fixat un domini regular $\Omega \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ se satisfà, per una certa constant $C > 0$, $\mathrm{vol}(\Omega) < \frac{1}{C}\chi(\Omega)$.

Llavors,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathfrak{B}} \chi(B \cap L) dL &> C \int_{\mathfrak{B}} \mathrm{vol}(B \cap L) dL = C \int_{\mathfrak{B}} \int_{B \cap L} dx_L dL \\
&= C \int_B \int_{\mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos_{\epsilon}(r)} d\theta d\Sigma dx = 2\pi C \int_B \int_{\mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}} \frac{1}{\cos_{\epsilon}(r)} d\Sigma dx \\
&\overset{(1.16)}{=} 2\pi C \int_B \int_{G^{C}_{n,n-1}} \int_{L^{\mathbb{C}}_{(n-1)[x]}} \frac{\cos^2_{\epsilon}(r)}{\cos_{\epsilon}(r)} dp_{n-1} dG_{n,n-1} dx \\
&= 2\pi \mathrm{vol}(B) \int_{\mathbb{CH}^{n-1}(\epsilon)} \cos_{\epsilon}(r) dx = +\infty.
\end{aligned}$$

$\square$

5.2 Variació de la mesura de plans que tallen un domini

Al capítol 4 hem donat una expressió per la mesura de r-plans complexos que tallen un domini regular a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$. Tot seguit donem una generalització d'aquest resultat per l'espai de (k,p)-plans a $\mathbb{C}^n$ i per l'espai de k-plans totalment reals a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$.

Primer de tot, necessitem conèixer l'expressió per la densitat de l'espai de (k,p)-plans en termes de la formes ω_{ij} definides a (1.13).

Lema 5.2.1. *1. A $\mathbb{C}^n$, l'espai $\mathcal{L}_{k,p}$ és un espai homogeni i*

$$\mathcal{L}_{k,p} \cong U(n) \ltimes \mathbb{C}^n/((U(p) \times O(k-2p) \times U(n-k+p)) \ltimes \mathbb{R}^k).$$

Sigui $\{g; g_1, g_2, ..., g_{2n-1}, g_{2n}\}$ amb $g_{2i} = Jg_{2i+1}$ una J-referència mòbil adaptada a un (k,p)-pla a g de manera que $\{g_1, Jg_1, ..., g_p, Jg_p, g_{2p+1}, ..., g_{2k-2p-1}\}$ genera l'espai tangent a aquest (k,p)-pla. La densitat invariant de $\mathcal{L}_{k,p}$ està donada per

$$dL_{k,p} = \left| \bigwedge_i \omega_i \bigwedge_{j,i} \omega_{ji} \right| \tag{5.2}$$

on $i \in \{2p+2, 2p+4, ..., 2k, 2k+1, 2k+2, ..., 2n\}$ i $j \in \{1, 3, ..., 2p-1, 2p+1, 2p+3, ..., 2k-1\}$.

2. A $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$, $\epsilon \neq 0$, l'espai de p-plans complexos $\mathcal{L}_p^{\mathbb{C}}$ i l'espai de k-plans totalment reals $\mathcal{L}_k^{\mathbb{R}}$ són espais homogenis i

$$\mathcal{L}_p^{\mathbb{C}} \cong U_\epsilon(n)/(U_\epsilon(p) \times U(n-p)),$$
$$\mathcal{L}_k^{\mathbb{R}} \cong U_\epsilon(n)/(O_\epsilon(k) \times U(n-k)),$$

on

$$U_\epsilon(n) = \begin{cases} U(1+n), & si\ \epsilon > 0, \\ U(1,n), & si\ \epsilon < 0. \end{cases}, \quad O_\epsilon(k) = \begin{cases} O(1+k), & si\ \epsilon > 0, \\ O(1,k), & si\ \epsilon < 0. \end{cases}$$

A més a més, fixada una J-referència ortonormal de la mateixa manera que al punt anterior, l'expressió (5.2) segueix sent vàlida.

Demostració. 1. Com que el grup d'isometries actua transitivament sobre les J-bases (cf. lema 1.5.1) tenim que també actua transitivament sobre les parelles de (k,p)-plans. Llavors $\mathcal{L}_{k,p}$ és un espai homogeni.

El grup d'isotropia d'un (k,p)-pla a $\mathbb{C}^n$ és isomorf a $U(p) \times O(k-2p) \times U(n-k+p)$ ja que els (k,p)-plans a $\mathbb{C}^n$ són subvarietats totalment geodèsiques i l'espai tangent en qualsevol dels seus punts és isomètric a $\mathbb{C}^p \oplus \mathbb{R}^{k-2p}$.

La densitat es pot obtenir utilitzant la teoria de les referències ortonormals que hem comentat a la secció 1.3.

2. Pel cas de subvarietats totalment geodèsiques, són vàlids els mateixos arguments que en el punt anterior.

□

La següent proposició és una generalització de la proposició 4.2.1 per a qualsevol (k,p)-pla a $\mathbb{C}^n$. La seva demostració és completament anàloga a la demostració de 4.2.1.

Proposició 5.2.2. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domini regular, X un camp vectorial diferenciable definit a $\mathbb{C}^n$ amb ϕ_t el flux associat i $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$, llavors per l'espai de (k,p)-plans $\mathcal{L}_{k,p}$ a $\mathbb{C}^n$ es té*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\mathcal{L}_{k,p}} \chi(\Omega_t \cap L_{k,p}) dL_{k,p} = \int_{\partial\Omega} \langle \partial\phi/\partial t, N \rangle \int_{G_{n,k,p}(T_x\partial\Omega)} \sigma_k(II|_V) dV dx$$

on N és el vector normal exterior a $\partial\Omega$ i $\sigma_k(II|_V)$ denota la k-èssima funció simètrica elemental de II restringida a $V \in G_{n,k,p}(T_x\partial\Omega)$, la Grassmaniana dels (k,p)-plans continguts a l'espai tangent de $\partial\Omega$ en x.

També se satisfà la següent generalització de la proposició 4.2.1 pels plans totalment reals de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$.

Proposició 5.2.3. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ un domini regular, X un camp vectorial diferenciable definit a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ amb ϕ_t el flux associat i $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$, llavors per l'espai de k-plans totalment reals $\mathcal{L}_k^{\mathbb{R}}$ es té*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\mathcal{L}_k^{\mathbb{C}}} \chi(\Omega_t \cap L_k) dL_k^{\mathbb{R}} = \int_{\partial\Omega} \langle \partial\phi/\partial t, N\rangle \int_{G_{n,r,0}(T_x\partial\Omega)} \sigma_k(II|_V) dV dx$$

on N és el vector normal exterior a $\partial\Omega$ i $\sigma_k(II|_V)$ denota la k-èssima funció simètrica elemental de II restringida a $V \in G_{n,k,0}(T_x\partial\Omega)$, la Grassmaniana dels k-plans continguts a l'espai tangent de $\partial\Omega$ en x.

Demostració. La demostració és anàloga a la demostració de la proposició 4.2.1 ja que ens restringim a plans totalment reals, fet que ens permet assegurar que l'expressió per la densitat de l'espai pren la forma de (5.2). L'únic pas que cal modificar és la construcció de l'aplicació γ allà definida (cf. (4.7)).

Per a cada $x \in \partial\Omega$ considerem la corba $c(t) = \varphi_t(x)$. Per a cada t, sigui $\mathcal{D}_{c(t)} = \langle N_{c(t)}, JN_{c(t)}\rangle^\perp \subset d\varphi_t(T_x\partial\Omega)$ l'hiperplà complex tangent a $\varphi_t(\partial\Omega)$ en $c(t)$. Si $\nabla_{\partial t}$ denota la derivada covariant de $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ al llarg de $c(t)$, definim

$$\nabla^D_{\partial t} X(t) = \pi_t(\nabla_{\partial t} X(t))$$

on $\pi_t : T_{c(t)}\mathbb{CK}^n(\epsilon) \to \mathcal{D}_{c(t)}$ denota la projecció ortogonal. Donat un vector $X \in T_x\partial\Omega$, existeix un únic camp $X(t)$ definit al llarg de $c(t)$ que compleix $\nabla^D_{\partial t} X(t) = 0$ (es demostra exactament igual que l'existència del transport paral·lel habitual). Això defineix una aplicació lineal $\psi_t : \mathcal{D}_x \to \mathcal{D}_{c(t)}$, que preserva l'estructura complexa J ja que

$$\nabla^D_{\partial t} JX(t) = \pi_t(\nabla_{\partial t} JX(t)) = \pi_t(J\nabla_{\partial t} X(t)) = J\pi_t(\nabla_{\partial t} X(t)).$$

Finalment, extenem ψ_t linealment a $\psi_t : T_x\partial\Omega \to d\varphi_t(T_x\partial\Omega)$ de forma que $\psi_t(JN_x) = JN_{c(t)}$. Aquesta aplicació lineal, porta plans totalment reals a plans totalment reals. De manera que podem definir la nova aplicació γ com

$$\begin{array}{rccl} \gamma: & G_{n,k,p}(T\partial\Omega) \times (-\epsilon, \epsilon) & \longrightarrow & \mathcal{L}_{k,p} \\ & ((x,V),t) & \mapsto & \exp_{\phi_t(x)} \psi_t(V) \end{array}.$$

□

5.3 Mesura de geodèsiques reals a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$

El següent resultat, que s'obté directament de la proposició anterior, ens diu que, en els espais de curvatura holomorfa constant, la mesura de geodèsiques reals que tallen un domini regular coincideix, igual que en els espais de curvatura seccional constant, amb un múltiple de l'àrea de la frontera del domini.

Teorema 5.3.1. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ un domini regular. Llavors*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}} \chi(\Omega_t \cap L_1) dL_1^{\mathbb{R}} = O_{2n+1}(\tilde{B}_{2n-2,n-2}(\Omega) + \tilde{\Gamma}_{2n-2,n-1}(\Omega))$$

i

$$\int_{\mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}} \chi(\Omega \cap L_1) dL_1^{\mathbb{R}} = \omega_{2n}\mu_{2n-1,n-1}(\Omega) = \frac{\omega_{2n}}{2}\mathrm{vol}(\partial\Omega).$$

Demostració. A partir de la proposició 5.2.3 tenim

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\int_{\mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}}\chi(\Omega_t\cap L_1)dL_1^{\mathbb{R}}=\int_{\partial\Omega}\langle\partial\phi/\partial t,N\rangle\int_{G_{n,1,0}(T_x\partial\Omega)}\sigma_1(\mathrm{II}|_V)dV dx.$$

Estudiem la integral respecte la Grassmaniana de geodèsiques reals de l'espai tangent en cada punt $x\in\partial\Omega$. Denotem per $\{f_1,\ldots,f_{2n-1}\}$ les direccions principals en x. Llavors,

$$\begin{aligned}\int_{G_{n,1,0}(T_x\partial\Omega)}\sigma_1(\mathrm{II}|_V)dV&=\frac{1}{2}\int_{S^{2n-1}}k_n(v)dv=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1}\int_{S^{2n-1}}\langle v,f_i\rangle^2k_idv\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-1}k_i\int_{S^{2n-1}}\langle v,f_i\rangle^2dv\overset{(3.1.2)}{=}\frac{O_{2n-1}}{4n}\sum_{i=1}^{2n-1}k_i=\frac{O_{2n-1}(2n-1)}{4n}\mathrm{tr}(\mathrm{II}).\end{aligned}$$

Llavors, a partir dels exemples 2.4.20 3. i 4. tenim

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\int_{\mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}}\chi(\Omega_t\cap L_1)dL_1^{\mathbb{R}}&=\frac{O_{2n-1}(2n+1)}{4n}\int_{\partial\Omega}\langle X,N\rangle\mathrm{tr}(\mathrm{II})dx\\&=\frac{O_{2n-1}}{4n}\int_{N(\Omega)}\langle X,N\rangle\left(\frac{1}{(n-1)!}\gamma\wedge\theta_2^{n-1}+\frac{1}{(n-2)!}\beta\wedge\theta_1\wedge\theta_2^{n-2}\right)\\&=\frac{O_{2n-1}}{4\,n!}\left(\int_{N(\Omega)}\langle X,N\rangle\gamma\wedge\theta_2^{n-1}+(n-1)\int_{N(\Omega)}\langle X,N\rangle\beta\wedge\theta_1\wedge\theta_2^{n-2}\right)\\&=\frac{\omega_{2n}}{2\,(n-1)!}\left(\tilde{\Gamma}'_{2n-2,n-1}(\Omega)+(n-1)\tilde{B}'_{2n-2,n-2}(\Omega)\right)\\&=O_{2n+1}(\tilde{B}_{2n-2,n-2}(\Omega)+\tilde{\Gamma}_{2n-2,n-1}(\Omega)).\end{aligned}$$

A $\mathbb{C}^n$, la valoració $\int_{\mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}}\chi(\Omega\cap L_1)dL_1$ és de grau $2n-1$, per tant, és múltiple de $\mu_{2n-1,n-1}(\Omega)$, que té variació (cf. proposició 4.1.7)

$$\begin{aligned}\delta_X\mu_{2n-1,n-1}(\Omega)&=c_{n,2n-1,n-1}(2c^{-1}_{n,2n-2,n-1}\tilde{\Gamma}_{2n-2,n-1}(\Omega)+c^{-1}_{n,2n-2,n-2}(n-1)\tilde{B}_{2n-2,n-2}(\Omega))\\&=c_{n,2n-2,n-1}(\tilde{\Gamma}'_{2n-2,n-1}(\Omega)+(n-1)\tilde{B}'_{2n-2,n-2}(\Omega))\\&=\frac{1}{(n-1)!\omega_1}(\tilde{\Gamma}'_{2n-2,n-1}(\Omega)+(n-1)\tilde{B}'_{2n-2,n-2}(\Omega)).\end{aligned}$$

Per tant, comparant les dues variacions obtenim el resultat per $\mathbb{C}^n$. Però, el mateix és cert per $\epsilon\neq 0$ ja que la variació de $\mu_{2n-1,n-1}$ no depèn de ϵ.

La relació amb el volum de la frontera la trobem a partir de la relació de $\beta_{2n-1,n-1}$ amb la segona forma fonamental donada a l'exemple 2.4.20.5. □

5.4 Mesura d'hiperplans reals a $\mathbb{C}^n$

L'altre cas particular que podem obtenir directament de la proposició 5.2.2 és el dels hiperplans reals a $\mathbb{C}^n$. Aquest cas particular també té interès per ell mateix ja que els hiperplans reals són de codimensió 1.

Teorema 5.4.1. *Sigui $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ un domini regular. Llavors*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\int_{\mathcal{L}_{2n-1,n-1}}\chi(\Omega_t\cap L_{2n-1,n-1})dL_{2n-1,n-1}=O_{2n+1}\tilde{\Gamma}_{0,0}(\Omega)$$

i

$$\int_{\mathcal{L}_{2n-1,n-1}}\chi(\Omega\cap L_{2n-1,n-1})dL_{2n-1,n-1}=\omega_{2n-1}\mu_{1,0}(\Omega).$$

Demostració. A partir de la proposició 4.2.1 tenim

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\int_{\mathcal{L}_{2n-1,n-1}}\chi(\Omega_t\cap L_{2n-1,n-1})dL_{2n-1,n-1} &= \int_{\partial\Omega_0}\langle X,N\rangle\int_{G_{n,2n-1,n-1}(T_x\partial\Omega)}\sigma_{2n-1}(\mathrm{II}|_V)dV dx\\ &= \int_{\partial\Omega}\langle X,N\rangle\sigma_{2n-1}(\mathrm{II})dx\\ &= \int_{N(\Omega)}\langle X,N\rangle\frac{1}{(n-1)!}\gamma\wedge\theta_0^{n-1}\\ &= \frac{2c_{n,0,0,}^{-1}}{(n-1)!}\tilde{\Gamma}_{0,0}(\Omega).\end{aligned}$$

A $\mathbb{C}^n$, la valoració $\int_{\mathcal{L}_{2n-1,n-1}}\chi(\Omega\cap L_{2n-1,n-1})dL_{2n-1,n-1}$ és de grau 1, per tant, és múltiple de $\mu_{1,0}$, que té per variació

$$\delta_X\mu_{1,0} = c_{n,1,0}2c_{n,0,0}^{-1}\tilde{\Gamma}_{0,0}.$$

Així, igualant les dues variacions obtenim el resultat. □

Observació 5.4.2. A partir de l'exemple 2.4.20 tenim la igualtat

$$\mu_{1,0}(\Omega) = \frac{1}{\omega_{2n-1}}\int_{\partial\Omega}\det(\mathrm{II}|_{\mathcal{D}}) = \frac{1}{\omega_{2n-1}}M_{2n-2}^{\mathcal{D}}(\partial\Omega),$$

però per haver-hi una única valoració linealment independent a l'espai de valoracions contínues invariants per isometries de $\mathbb{C}^n$ de grau 1 tenim

$$\mu_{1,0}(\Omega) = cM_{2n-2}(\partial\Omega).$$

Així doncs, la mesura d'hiperplans reals de $\mathbb{C}^n$ que tallen un domini coincideix amb un múltiple de "l'amplada mitja", com a l'espai euclidià.

5.5 Mesura de plans coisotròpics de $\mathbb{C}^n$

Els subespais de $\mathbb{C}^n$ tals que el seu ortogonal és un pla totalment real s'anomenen *plans coisotròpics.*

Lema 5.5.1. *Els $(2n-p,n-p)$-plans de $\mathbb{C}^n$ coincideixen amb els plans coisotròpics.*

Demostració. Sigui $L\in\mathcal{L}_{2n-p,n-p}$ llavors $L^\perp$ té dimensió $2n-(2n-p)=p$. La dimensió del subespai maximal complex contingut a $L^\perp$ és $n-(n-p)-p=0$. Així doncs, $L^\perp$ és un pla totalment real.

Recíprocament, si $L^\perp$ és un p-pla totalment real, llavors L és un pla de dimensió $2n-p$ i l'espai complex maximal té dimensió $n-p$. □

Lema 5.5.2. *Sigui $S\subset\mathbb{C}^n$ una hipersuperfície i $L\in\mathcal{L}_{2n-p,n-p}$, $p\in\{1,\dots,n\}$, un $(2n-p,n-p)$-pla tangent a S en x. Si N és vector normal a S en x, llavors $JN\in T_xL$.*

Demostració. Per ser L un $(2n-p,n-p)$-pla, podem considerar, en cada punt, una base ortonormal del seu espai tangent de la forma $\{e_1,Je_1,\dots,e_{n-p},Je_{n-p},e_{n-p+1},e_{n-p+2},\dots,e_n\}$, de manera que $Je_i\perp T_xL$ per a $i\in\{n-p+1,\dots,n\}$. Podem completar aquesta base ortonormal a una base ortonormal de $T_x\mathbb{C}^n$ amb els vectors $\{Je_{n-p+1},\dots,Je_n\}$.

Per altra banda, si $x\in L\cap S$, se satisfà $T_xL\subset T_xS$. Per tant, $N\perp T_xL$, és a dir,

$$\begin{aligned}\langle N,e_i\rangle &= 0, \quad \forall\, i\in\{1,\dots,n\},\\ \langle N,Je_j\rangle &= 0, \quad \forall\, j\in\{1,\dots,n-p\}.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Ara, si $JN=\sum_{i=1}^n\alpha_ie_i+\sum_{i=1}^n\beta_iJe_i$, llavors $N=-\sum_{i=1}^n\alpha_iJe_i+\sum_{i=1}^n\beta_ie_i$. Utilitzant (5.3) obtenim $JN=\sum_{i=n-p+1}^n\alpha_ie_i$, d'on $JN\in T_xL$. □

A partir del lema anterior, podem provar el següent resultat.

Teorema 5.5.3. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ domini regular, X un camp vectorial diferenciable definit a $\mathbb{C}^n$, ϕ_t el flux associat a X i $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$. Llavors,*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\mathcal{L}_{2n-p,n-p}} \chi(\Omega_t \cap L)dL = \frac{\mathrm{vol}(G_{n,2n-p,n-p})\omega_{2n-p+1}}{(n-1)!}(2n-p+2)\binom{n}{p-1}^{-1} \cdot$$
$$\cdot \sum_{q=\max\{0,p-n-1\}}^{\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor} \frac{4^{q-p+1}}{(2n+2q-2p+3)}\binom{2n+2q-2p+1}{n+q-p+1}^{-1}\tilde{\Gamma}_{p-1,q}(\Omega) \tag{5.4}$$

i

$$\int_{\mathcal{L}_{2n-p,n-p}} \chi(\Omega \cap L)dL = \frac{\mathrm{vol}(G_{n,2n-p,n-p})\omega_{2n-p}}{(n-1)!}\binom{n}{p-1}^{-1} \cdot$$
$$\cdot \sum_{q=\max\{0,p-n\}}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor} \binom{2n+2q-2p-1}{n+q-p-1}^{-1} \frac{4^{q-p}}{2n+2q-2p+1}\mu_{p,q}(\Omega).$$

Demostració. Primer de tot, cal provar que pels espais de plans coisotròpics la variació de la mesura només té part en $\tilde{\Gamma}_{p,q}$. De la proposició 5.2.2 tenim

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\mathcal{L}_{2n-p,n-p}} \chi(\Omega_t \cap L)dL = \int_{\partial\Omega} \langle \partial\phi/\partial t, N\rangle \int_{G_{n,2n-p,n-p}(T_x\partial\Omega)} \sigma_{2n-p}(\mathrm{II}|_V)dVdx$$

però cada $V \in G_{n,2n-p,n-p}(T_x\partial\Omega)$, pel lema anterior, conté la direcció JN (on N denota el vector normal unitari a $\partial\Omega$ en x), de manera que $\mathrm{II}|_V$ conté sempre l'entrada corresponent a la curvatura normal en la direcció JN, però al lema 2.4.18 hem vist que només els polinomis provinents de $\phi^*(\gamma_{k,q})$ contenen aquesta entrada de la segona forma fonamental.

Per trobar les constants, resolem un sistema lineal. Primer de tot, observem que el funcional $\int_{\mathcal{L}_{2n-p,n-p}} \chi(\Omega \cap L)dL$ és una valoració a $\mathbb{C}^n$ amb grau d'homogeneïtat p. Per tant, es pot expressar com a combinació lineal dels elements d'una base de valoracions amb el mateix grau d'homogeneïtat com

$$\int_{\mathcal{L}_{2n-p,n-p}} \chi(\Omega \cap L)dL = \sum_{q=\max\{0,p-n\}}^{\lfloor\frac{p-1}{2}\rfloor} A_{p,q}\mu_{p,q}(\Omega) \tag{5.5}$$

per certes constants $A_{p,q}$ que volem determinar.

Prenent variació a les dues bandes, trobarem el valor d'aquestes constants. Per la proposició 4.1.7, la variació de la banda dreta de (5.5) és

$$\sum_{q=\max\{0,p-n-1\}}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor-1} (A_{p,q}2c_{n,p,q}c_{n,p-1,q}^{-1}(p-2q)^2 \tag{5.6}$$
$$- A_{p,q+1}2c_{n,p,q+1}c_{n,p-1,q}^{-1}(n-p+q+1)(q+1))\tilde{\Gamma}_{p-1,q}$$
$$+ (A_{p,q+1}2c_{n,p,q+1}c_{n,p-1,q}^{-1}(n-p+q+3/2)(q+1)$$
$$- A_{p,q}2c_{n,p,q}c_{n,p-1,q}^{-1}(p-2q)(p-2q-1))\tilde{B}_{p-1,q}$$
$$+ A_{p,\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}2c_{n,p,\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}c_{n,p-1,\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}(p-2\lfloor\frac{p}{2}\rfloor)^2\tilde{\Gamma}_{p-1,\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}.$$

Ara, imposant que no hi ha variació en $\tilde{B}_{p-1,q}$ obtenim certes equacions que ens donen la següent relació:

$$A_{p,q+1} = \frac{n-p+q+1}{(n-p+q+3/2)} A_{p,q}, \tag{5.7}$$

de manera que, cada $A_{p,q+1}$ s'escriu com un múltiple de $A_{p,\max\{0,p-n\}}$. Per trobar aquest valor, necessitem una altra equació, que obtenim prenent $\mathrm{II}|_{\mathcal{D}} = \lambda \mathrm{Id}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, i igualant la variació donada a (5.6) amb la variació de la proposició 5.2.2. Llavors, per cada parella (n, r) tenim un sistema lineal compatible determinat ja que les constants a (5.5) existeixen. A més, són úniques per la relació (5.7). Fent això obtenim, de la mateixa manera que a la demostració de la proposició 4.3.1, el resultat que volíem provar. Finalment, per obtenir la variació només cal substituir els valors obtinguts de $A_{p,q}$ a l'expresió (5.6). □

Un cas particular interessant del teorema anterior és el dels plans Lagrangians. Aquest és el cas que proposa Alesker a [Ale03] com a cas destacable a estudiar. A partir del teorema anterior podem donar explícitament les constants d'un dels teoremes d'Alesker que hem reproduït a 2.3.5 però respecte la base dels volums intrínsecs hermítics definida per Bernig-Fu i no pas directament respecte la base donada per Alesker.

Corol·lari 5.5.4. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domini regular. Llavors,*

$$\int_{\mathcal{L}_{n,0}} \chi(\Omega \cap L) dL = \frac{\mathrm{vol}(G_{n,n,0})\omega_n}{n!} \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{2q-1}{q-1}^{-1} \frac{4^{q-n}}{2q+1} \mu_{n,q}(\Omega).$$

on $\mathcal{L}_n^{\mathbb{R}}$ denota l'espai de plans Lagrangians de $\mathbb{C}^n$.

5.6 Mesura de plans Lagrangians a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$

Utilitzant les mateixes tècniques que a la secció 4.3.2 del capítol 4 obtenim el següent resultat.

Teorema 5.6.1. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{CK}^n(\epsilon)$ un domini regular, X un camp diferenciable definit a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$, ϕ_t el flux associat a X i $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$. Llavors,*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\mathcal{L}_n^{\mathbb{R}}} \chi(\Omega_t \cap L) dL = \mathrm{vol}(G_{n,n,0})\omega_{n+1} \frac{(n+2)}{n!} \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{4^{q-n+1}}{2q+3} \binom{2q+1}{q+1}^{-1} \tilde{\Gamma}_{n-1,q}(\Omega)$$

i

si n és senar:

$$\int_{\mathcal{L}_n^{\mathbb{R}}} \chi(\Omega \cap L) dL = \frac{\mathrm{vol}(G_{n,n,0})\omega_n}{n!} \sum_{q=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{2q-1}{q-1}^{-1} \frac{4^{q-n}}{2q+1} \mu_{n,q}(\Omega), \tag{5.8}$$

i si n és parell:

$$\int_{\mathcal{L}_n^{\mathbb{R}}} \chi(\Omega \cap L) dL = \frac{\mathrm{vol}(G_{n,n,0})}{n!} \cdot \tag{5.9}$$
$$\cdot \left(\sum_{q=0}^{\frac{n}{2}} \binom{2q-1}{q-1}^{-1} \frac{4^{q-n}\omega_n}{2q+1} \mu_{n,q}(\Omega) + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \epsilon^i \binom{n}{\frac{n}{2}+i}^{-1} \frac{2^{-n+1}\omega_{n-2i}}{n+1} \mu_{n+2i,\frac{n}{2}+i}(\Omega) \right).$$

Demostració. De la mateixa manera que a la demostració del teorema 4.3.5, n'hi ha prou en veure que la variació de cada costat coincideix.

La variació del costat esquerre de (5.9) i (5.8) coincideix i és independent de ϵ, de manera que és la mateixa que la donada a (5.4). La variació del costat dret, la calculem a partir de la proposició 4.1.7. En aquesta demostració reproduïm els càlculs només per n senar. Per n parell, podem fer un estudi semblant, però més llarg per verificar l'expressió de (5.9).

Denotem $\mathcal{E}_n(\Omega)$ la part dreta de (5.8). Llavors, per l'expressió (5.4) tenim

$$\begin{aligned}
\delta_X\mathcal{E}_n(\Omega) = {} & \frac{\mathrm{vol}(G_{n,n,0})\omega_n}{n!}\sum_{q=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{2q-1}{q-1}^{-1}\frac{4^{q-n}}{2q+1}2c_{n,n,q}\cdot \\
& \cdot\Big(c^{-1}_{n,n-1,q}(n-2q)^2\tilde{\Gamma}_{n-1,q}-c^{-1}_{n,n-1,q-1}q^2\tilde{\Gamma}_{n-1,q-1} \\
& + c^{-1}_{n,n-1,q-1}q(q+1/2)\tilde{B}_{n-1,q-1}-c_{n,n-1,q}(n-2q)(n-2q-1)\tilde{B}_{n-1,q} \\
& + \epsilon(c^{-1}_{n,n+1,q+1}(n-2q)(n-2q-1)\tilde{B}_{n+1,q+1}-c^{-1}_{n,n+1,q}q(q+1/2)\tilde{B}_{n+1,q})\Big) \\
= {} & 2\frac{\mathrm{vol}(G_{n,n,0})\omega_n}{n!}\{\sum_{q=0}^{\frac{n-3}{2}}\{\left(\frac{c_{n,n,q}4^{q-n}(n-2q)^2}{(2q+1)\binom{2q-1}{q-1}}-\frac{c_{n,n,q+1}4^{q-n+1}(q+1)^2}{(2q+3)\binom{2q+1}{q}}\right)c^{-1}_{n,n-1,q}\tilde{\Gamma}_{n-1,q} \\
& +\left(\frac{c_{n,n,q+1}4^{q-n+1}(q+1)(q+3/2)}{(2q+3)\binom{2q+1}{q}}-\frac{c_{n,n,q}4^{q-n}(n-2q)(n-2q-1)}{(2q+1)\binom{2q-1}{q-1}}\right)c^{-1}_{n,n-1,q}\tilde{B}_{n-1,q}\} \\
& +\epsilon\sum_{q=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{c_{n,n,q-1}4^{q-n-1}(n-2q+2)(n-2q+1)}{(2q-1)\binom{2q-3}{q-2}}-\frac{c_{n,n,q}4^{q-n}q(q+\frac{1}{2})}{(2q+1)\binom{2q-1}{q-1}}\right)c^{-1}_{n,n+1,q}\tilde{B}_{n+1,q}\}.
\end{aligned}$$

Per provar el resultat, n'hi ha prou en veure que aquesta expressió és independent de ϵ. Com que per $\epsilon=0$ sabem que $\delta_X\mathcal{E}_n(\Omega)$ coincideix amb (5.4), obtenim el resultat.

Ara bé, per provar que l'expressió és independent de ϵ agrupem els coeficients per cada $\tilde{B}_{n-1,q}$ i $\tilde{B}_{n+1,q}$ i veiem que s'anul·len. $\square$

Apèndix

En aquest apèndix incloem la demostració que ens permet obtenir les constants donades a l'expressió dels teoremes 4.3.5 i 4.4.1.

Demostració del teorema 4.3.5

Comprovarem si és possible trobar constants $\alpha_{k,q}$ tals que

$$\int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}} \chi(\Omega \cap L_r) dL_r = \sum_{k,q} \alpha_{k,q} B_{k,q}(\Omega) + \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \alpha_{2j,j} \Gamma_{2j,j}(\Omega) + \alpha_{2n,n} \mathrm{vol}(\Omega) \tag{A.10}$$

on $\max\{0, k-n\} \leq q < k/2 \leq n$.

Observem que a diferència del cas $\epsilon = 0$, no podem assegurar que l'existència d'aquestes constants ja que no se sap si les valoracions $\{\mu_{k,q}\}$ són base de les valoracions $\mathcal{C}^\infty$ a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$. Tot i això, trobarem els valors de les constants que fan que la variació dels dos costats de (A.10) coincideixi. Això és suficient per demostrar (A.10). En efecte, prenem una deformació Ω_t de Ω tal que Ω_t convergeixi en un punt. Llavors, els dos costats de (A.10) tenen la mateixa derivada i s'anul·len en el límit.

La variació del costat esquerre de (A.10) està donada al corol·lari 4.3.3. La variació del costat dret es pot calcular utilitzant la proposisició 4.1.7 i $\delta_X \mathrm{vol} = 2\tilde{B}_{2n-1,n-1}$.

Ara bé, observem que a la variació del costat esquerra només apareix $\{\tilde{B}_{2n-2r-1,q}\}_q$, de manera que la variació de la part dreta només ha de tenir també aquests termes. Per altra banda, recordem que quan considerem la variació d'un volum intrínsec hermític $B_{k,q}$ amb k parell (resp. senar) obtenim només termes $\tilde{B}_{a,b}$ i $\tilde{\Gamma}_{a',b'}$ amb a, a' senars (resp. parell) (cf. proposició 4.1.7). Així doncs, com que la variació del costat esquerra només té termes no nuls amb primer índex senar, podem considerar que al costat dret només hi ha les valoracions amb primer índex parell, de manera que l'expressió de (A.10) queda reduïda, si també fem el canvi donat a (4.11)

$$\int_{\mathcal{L}_r^{\mathbb{C}}} \chi(\Omega \cap L_r) dL_r = \sum_{k=1}^{n-1} \Big(\sum_{q=\max\{0,2k-n\}}^{k-1} C_{2k,q} B'_{2k,q}(\Omega) + D_{2k,k} \Gamma'_{2k,k}(\Omega) \Big) + d \mathrm{vol}(\Omega). \tag{A.11}$$

Ens proposem, doncs, trobar constants $C_{k,q}$, $D_{2q,q}$, d tals que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \Big(\sum_{q=\max\{0,2k-n\}}^{k-1} C_{2k,q} \delta B'_{2k,q}(\Omega) + D_{2k,k} \delta \Gamma'_{2k,k}(\Omega) + d \delta \mathrm{vol}(\Omega)$$

$$= \frac{\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r}) \omega_{2r+1} (r+1)}{\binom{n-1}{r}\binom{n}{r}} \left(\sum_{q=\max\{0,n-2r-1\}}^{n-r-1} \binom{2n-2r-2q-1}{n-r-q} \frac{1}{4^{n-r-q-1}} \tilde{B}'_{2n-2r-1,q}(\Omega) \right).$$

Gràcies a la proposició 4.1.7, l'equació anterior dóna lloc a un sistema d'equacions lineals. Escriurem aquest sistema en forma matricial $Ax = b$. Considerem el vector de les incògnites com

$$x^t = (C_{2,0}, D_{2,1}, C_{4,0}, C_{4,1}, D_{4,2}, \dots, C_{2c,\max\{0,2c-n\}}, \dots, D_{2c,c}, \dots, C_{2n-2,n-2}, D_{2n-2,n-1}, d).$$

Les entrades del vector b contenen el coeficient de $\tilde{B}'_{k,q}$, $\tilde{\Gamma}'_{k,q}$ de la fórmula del corol·lari 4.3.3 però amb el canvi de notació de (4.11), és a dir, els coeficients de l'expressió (4.22), de manera que

$$b^t = \frac{\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{n!\binom{n-1}{r}} \left(0, ..., 0, \binom{n-r}{1}\binom{r+1}{1}, \binom{n-r}{2}\binom{r+1}{2}\frac{1}{2}, ..., \binom{n-r}{r+1}\binom{r+1}{r+1}\frac{r+1}{4^r}, 0, ..., 0\right).$$

Observem que b té totes les entrades nul·les excepte les corresponents a $\tilde{B}'_{2n-2r-1,q}$.

Les entrades de la matriu A codifiquen la variació de cada $B'_{2k,q}$ i $\Gamma'_{2q,q}$ respecte $\tilde{B}'_{r,s}$ i $\tilde{\Gamma}'_{r,s}$ de la següent manera. Si denotem per $(\delta B'_{k,q}, \tilde{B}_{r,s})$, el coeficient de $\tilde{B}_{r,s}$ quan considerem la variació de la valoració $B'_{k,q}$, llavors a partir de la proposició 4.1.7 tenim

$$(\delta B'_{k,q}, \tilde{B}'_{r,s}) = \begin{cases} 2q(n+q-k+1/2), & \text{si } r = k-1, s = q-1 \\ -2(k-2q)(k-2q-1), & \text{si } r = k-1, s = q \\ 2\epsilon(k-2q)(k-2q-1), & \text{si } r = k+1, s = q+1 \\ -2\epsilon(n-k+q)(q+1/2), & \text{si } r = k+1, s = q \\ 0, & \text{sinó.} \end{cases}$$

$$(\delta B'_{k,q}, \tilde{\Gamma}'_{r,s}) = \begin{cases} (k-2q)^2, & \text{si } r = k-1, s = q \\ -(n+q-k)q, & \text{si } r = k-1, s = q-1 \\ 0, & \text{sinó.} \end{cases}$$

$$(\delta \Gamma'_{2q,q}, \tilde{B}'_{r,s}) = \begin{cases} 4q(n-q+1/2), & \text{si } r = 2q-1, s = q-1 \\ -4\epsilon((n-q)(2q+3/2)-(q+1)/2), & \text{si } r = 2q+1, s = q \\ 4\epsilon^2(n-q-1)(q+3/2), & \text{si } r = 2q+3, s = q+1 \\ 0, & \text{sinó.} \end{cases}$$

$$(\delta \Gamma'_{2q,q}, \tilde{\Gamma}'_{r,s}) = \begin{cases} -2(n-q)q, & \text{si } r = 2q-1, s = q-1 \\ 2\epsilon(n-q-1)(q+1), & \text{si } r = 2q+1, s = q \\ 0, & \text{sinó.} \end{cases}$$

Cada columna de la matriu A conté la variació d'una valoració $B'_{2k,q}$, $\Gamma'_{2q,q}$ o del volum. L'ordre en què col·loquem les valoracions $B'_{2k,q}$, $\Gamma'_{2q,q}$ és l'anàleg al del vector b. (El volum es correspon a l'última columna.) És a dir, les columnes de la matriu A donen, en l'ordre indicat, les següents variacions:

$$(\delta B'_{2,0}, \delta\Gamma'_{2,1}, \delta B'_{4,0}, \delta B'_{4,1}, \delta\Gamma'_{4,2}, \dots, \delta B'_{2n-2,n-2}, \delta\Gamma'_{2n-2,n-1}, \delta\mathrm{vol}).$$

Si denotem

$$\begin{aligned} \delta B'_{2k,\cdot} &= (\delta B'_{2k,\max\{0,2k-n\}}, \delta B'_{2k,\max\{0,2k-n\}+1}, \dots, \delta B'_{2k,k-1}), \\ \delta\Gamma'_{2k,\cdot} &= \delta\Gamma'_{2k,k}, \\ \tilde{B}'_{2k+1,\cdot} &= (\tilde{B}'_{2k+1,\max 0,2k-n+1}, \tilde{B}'_{2k+1,\max 0,2k-n+1+1}, \dots, \tilde{B}'_{2k+1,k})^t, \\ \tilde{\Gamma}'_{2k+1,\cdot} &= (\tilde{\Gamma}'_{2k+1,\max 0,2k-n+1}, \tilde{\Gamma}'_{2k+1,\max 0,2k-n+1+1}, \dots, \tilde{\Gamma}'_{2k+1,k})^t, \end{aligned}$$

llavors la matriu A té la següent estructura de caixes.

	$\delta B'_{2,\cdot}$	$\delta\Gamma'_{2,\cdot}$	$\delta B'_{4,\cdot}$	$\delta\Gamma'_{4,\cdot}$	$\delta B'_{6,\cdot}$	$\delta\Gamma'_{6,\cdot}$	$\delta B'_{8,\cdot}$	$\delta\Gamma'_{8,\cdot}$	$\cdots$	$\delta B'_{2n-4,\cdot}$	$\delta\Gamma'_{2n-4,\cdot}$	$\delta B'_{2n-2,\cdot}$	$\delta\Gamma'_{2n-2,\cdot}$	$\delta\mathrm{vol}$
$\tilde{B}'_{1,\cdot}$	$*$	$*$												
$\tilde{\Gamma}'_{1,\cdot}$	$*$	$*$												
$\tilde{B}'_{3,\cdot}$	$*_\epsilon$	$*_\epsilon$	$*$	$*$										
$\tilde{\Gamma}'_{3,\cdot}$		$*_\epsilon$	$*$	$*$										
$\tilde{B}'_{5,\cdot}$		$*_\epsilon$	$*_\epsilon$	$*_\epsilon$	$*$	$*$								
$\tilde{\Gamma}'_{5,\cdot}$				$*_\epsilon$	$*$	$*$								
$\tilde{B}'_{7,\cdot}$				$*_\epsilon$	$*_\epsilon$	$*_\epsilon$	$*$	$*$						
$\tilde{\Gamma}'_{7,\cdot}$						$*_\epsilon$	$*$	$*$						
$\tilde{B}'_{9,\cdot}$						$*_\epsilon$	$*_\epsilon$	$*_\epsilon$						
$\tilde{\Gamma}'_{9,\cdot}$								$*_\epsilon$						
$\vdots$														
$\tilde{B}'_{2n-3,\cdot}$										$*_\epsilon$	$*_\epsilon$	$*$	$*$	
$\tilde{\Gamma}'_{2n-3,\cdot}$											$*_\epsilon$	$*$	$*$	
$\tilde{B}'_{2n-1,\cdot}$											$*_\epsilon$	$*_\epsilon$	$*_\epsilon$	$*$

Hem denotat per $*$ les caixes de la matriu que tenen entrades no nul·les indepenents d'ϵ i per $*_\epsilon$ les caixes de la matriu que tenen entrades no nul·les per $\epsilon \neq 0$ però nul·les per $\epsilon = 0$.

L'estructura del sistema ja ens suggereix l'estratègia per a la resolució: començant per dalt, anirem resolent d'un en un els blocs de files corresponents a $\tilde{B}'_{q,\cdot}, \tilde{\Gamma}'_{q,\cdot}$. Un cop resoltes les variables involucrades en cada un d'aquests blocs d'equacions, substituirem els valors trobats en les altres equacions on apareguin i les passarem canviades de signe al terme independent. D'aquesta manera, ens reduirem a un sistema més petit que conservarà l'estructura de caixes del sistema inicial.

Recordem que el terme independent b d'aquest sistema lineal té tots els termes nuls excepte els corresponents a $\tilde{B}'_{2n-2r-1,q}$. Per tant, el sistema lineal és homogeni per les primeres equacions fins a $\tilde{B}'_{2n-2r-2,q}$; té la solució trivial. Prenem $C_{k,q} = D_{2q,q} = 0$ sempre que $k \leq 2n-2r-1$.

Pel teorema 4.3.1 coneixem una solució del sistema anterior per $\epsilon = 0$. En aquesta solució s'anul·len totes les variables llevat de $C_{2n-2r,q}$ i $D_{2n-2r,n-r}$. Per tant, aquesta solució complirà les equacions fins al bloc amb files $\tilde{B}'_{2n-2r,\cdot}, \tilde{\Gamma}'_{2n-2r,\cdot}$ també en el cas $\epsilon \neq 0$.

Per tant, considerem, per a tot $\epsilon \in \mathbb{R}$ i per a tot $a \in \{1, ..., \min\{n-r, r\}\}$,

$$
\begin{aligned}
C_{2n-2r,n-r-a} &= \frac{\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{4^a n!} \binom{n-1}{r}^{-1} \binom{n-r}{a} \binom{r}{a}, \\
D_{2n-2r,n-r} &= \frac{\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{2\, n!} \binom{n-1}{r}^{-1}.
\end{aligned}
$$

Per seguir resolent el sistema a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ estudiem per cada $c \in \{n-r+1, \ldots, n\}$ la submatriu de A formada per totes les files $\tilde{B}'_{2c-1,q}$, $\tilde{\Gamma}'_{2c-1,q}$. Aquesta matriu té per columnes no nul·les les de $\delta\Gamma'_{2c-4,c-2}$, $\delta B'_{2c-2,q}$, $\delta\Gamma'_{2c-2,c-1}$, $\delta B'_{2c,q}$ i $\delta\Gamma'_{2c,c}$, on q pren, en cada cas, tots els valors possibles.

Suposem que coneixem el valor de les variables $D_{2c-4,c-2}$, $C_{2c-2,q}$ i $D_{2c-2,c-1}$. Llavors podem substituir-los a les equacions donades per les files corresponents a $\tilde{B}_{2c-1,q}, \tilde{\Gamma}_{2c-1,q}$ de manera que, a cada una d'aquestes equacions, només queden per determinar les variables $C_{2c,q}$ i $D_{2c,c}$. Si denotem $i = \max\{0, 2c-n\}$, la matriu dels coeficients d'aquestes equacions (que correspon a un dels blocs de A que no depenen de ϵ) és

	$\delta B_{2c,i}$	$\delta B_{2c,i+1}$	$\delta B_{2c,i+2}$	$\cdots$	$\delta B_{2c,c-2}$	$\delta B_{2c,c-1}$	$\delta \Gamma_{2c,c}$
$\tilde{B}_{2c-1,i}$	$-4c(2c-1)$	$2(n-2c+3/2)$					
$\tilde{B}_{2c-1,i+1}$		$-2(2c-2)(2c-3)$	$4(n-2c+5/2)$				
$\tilde{B}_{2c-1,i+2}$			$-2(2c-4)(2c-5)$				
$\vdots$							
$\tilde{B}_{2c-1,c-2}$					-24	$2(c-1)(n-c-\frac{1}{2})$	
$\tilde{B}_{2c-1,c-1}$						-4	$4c(n-c+\frac{1}{2})$
$\tilde{\Gamma}_{2c-1,0}$	$(2c)^2$	$-(n-2c+1)$					
$\tilde{\Gamma}_{2c-1,1}$		$(2c-2)^2$	$-2(n-2c+2)$				
$\tilde{\Gamma}_{2c-1,2}$			$(2c-4)^2$				
$\vdots$							
$\tilde{\Gamma}_{2c-1,c-2}$					4^2	$-(c-1)(n-1)$	
$\tilde{\Gamma}_{2c-1,c-1}$						4	$-2c(n-c)$

El terme independent l'obtenim a partir del terme independent inicial b, que en aquests casos sempre és nul, i de la part que hem substituït el valor de les variables $D_{2c-4,c-2}, C_{2c-2,q}$ i $D_{2c-2,c-1}$. Mirant a la matriu que dóna l'estructura de caixes de la matriu A, donada a la pàgina 95 i les entrades de la matriu A donades a la pàgina 94, tenim que el terme independent del sistema lineal té nuls els termes $\tilde{\Gamma}'_{2c-1,q}$ amb $q \in \{\max\{0, 2c-n\}, ..., c-2\}$ i el terme $\tilde{\Gamma}_{2c-1,c-1}$ és igual a $2\epsilon(n-c)cD_{2c-2,c-1}$. A continuació considerem el subsistema amb equacions les files de $\tilde{\Gamma}'_{2c-1,q}$ i la fila de $\tilde{B}_{2c-1,\max\{0,2c-n\}}$ que és un sistema compatible determinat. El terme independent de la fila $\tilde{B}_{2c-1,\max\{0,2c-n\}}$ és $\epsilon(n-2c+2)C_{2c-2,\max\{0,2c-n-2\}}$. Resolent aquest sistema quedaran les variables en funció de $C_{2c-2,\max\{0,2c-n-2\}}$ i $D_{2c-2,c-1}$, que suposem que són conegudes.

Per evitar haver de considerar el màxim $\max\{0, 2c-n-2\}$ distingim dos casos.

Primera etapa: $2c \leq n$**.** Aquest cas només es dóna si $2r > n$ (ja que $c \in \{n-r+1, \ldots, n\}$). Si tenim $2r \leq n$ no és necessària la part següent de la demostració fins que considerem el cas $2c \geq n$.

El sistema que cal resoldre és

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
-4c(2c-1) & 2(n-2c+3/2) & & & & & \epsilon(n-2c+2)C_{2c-2,0} \\
(2c)^2 & -(n-2c+1) & & & & & \\
 & (2c-2)^2 & -2(n-2c+2) & & & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & -(c-1)(n-c-1) & & \\
 & & & & 4 & -2c(n-c) & -2\epsilon c(c-n)D_{2c-2,c-1}
\end{array}\right),$$

que té per incògnites $\{C_{2c,0}, C_{2c,1}, \ldots, C_{2c,c-1}, D_{2c,c}\}$.

A partir de les dues primeres equacions obtenim

$$C_{2c,0} = \frac{\epsilon(n-2c+2)(n-2c+1)}{4c(n-c+1)}C_{2c-2,0},$$
$$C_{2c,1} = \frac{\epsilon(n-2c+2)c}{(n-c+1)}C_{2c-2,0}.$$

Posem les altres variables respecte $C_{2c-2,0}$. Per a cada $q \in \{0, ..., c-2\}$ es compleixen les relacions

$$(2c-2q)^2 C_{2c,q} = (q+1)(n-2c+q+1)C_{2c,q+1},$$
$$4C_{2c,c-1} - 2c(n-c)D_{2c,c} = -2\epsilon c(n-c)D_{2c-2,c-1},$$

d'on obtenim

$$\begin{aligned} C_{2c,q+1} &= \frac{\epsilon 4^q (n-2c+2)!c!(c-1)!}{(n-c+1)(q+1)!(n-2c+q+1)!(c-q-1)!(c-q-1)!} C_{2c-2,0}, \\ D_{2c,c} &= \epsilon\Big(D_{2c-2,c-1} + \frac{2(n-2c+2)!(c-1)!4^{c-2}}{(n-c+1)!} C_{2c-2,0}\Big). \end{aligned} \tag{A.12}$$

(Observem que el casos $C_{2c,0}$ i $C_{2c,1}$ es poden incloure al cas general $C_{2c,q+1}$.)

Com que les constants que coneixem són $C_{2n-2r,q}$ i $D_{2n-2r,n-r}$ posem les anteriors en termes d'aquestes a partir de la recurrència que acabem de donar.

$$\begin{aligned} C_{2c,0} &= \frac{\epsilon(n-2c+2)(n-2c+1)}{4c(n-c+1)} C_{2c-2,0} \\ &= \frac{\epsilon^{c-(n-r)}(n-2c+2)(n-2c+1)\cdot\ldots\cdot(n-2n+2r-2+2)(n-2n+2r-2+1)}{4^{c-(n-r)}c(c-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)(n-c+1)(n-c+2)\cdot\ldots\cdot(n-(n-r))} C_{2n-2r,0} \\ &= \frac{\epsilon^{c-(n-r)}(2r-n)!(n-r)!(n-c)!\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{4^{c-(n-r)}(n-2c)!c!r!4^{n-r}n!} \binom{n-1}{r}^{-1} \binom{r}{n-r} \\ &= \frac{\epsilon^{c-(n-r)}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{4^c n!} \binom{n-1}{r}^{-1} \binom{n-c}{c}, \end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned} C_{2c,q+1} &= \frac{\epsilon(n-2c+2)4^q(n-2c+1)!c!(c-1)!}{(n-c+1)(q+1)!(n-2c+q+1)!(c-q-1)!(c-q-1)!} C_{2c-2,0} \\ &= \frac{\epsilon(n-2c+2)4^q(n-2c+1)!c!(c-1)!\epsilon^{c-1-(n-r)}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})(n-c+1)!\binom{n-1}{r}^{-1}}{(n-c+1)(q+1)!(n-2c+q+1)!((c-q-1)!)^2 4^{c-1}n!(c-1)!(n-2c+2)!} \\ &= \frac{\epsilon^{c-(n-r)}c!(n-c)!\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{4^{c-q-1}(q+1)!(n-2c+q+1)!(c-q-1)!(c-q-1)!n!} \binom{n-1}{r}^{-1} \\ &= \frac{\epsilon^{c-(n-r)}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{4^{c-q-1}n!} \binom{n-1}{r}^{-1} \binom{c}{q+1} \binom{n-c}{c-q-1}, \end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned} D_{2c,c} &= \epsilon\left(D_{2c-2,c-1} + \frac{2(n-2c+2)!(c-1)!4^{c-2}}{(n-c+1)!} C_{2c-2,0}\right) \\ &= \epsilon\left(D_{2c-2,c-1} + \frac{2(n-2c+2)!(c-1)!4^{c-2}}{(n-c+1)!} \frac{\epsilon^{c-1-(n-r)}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})(n-c+1)!}{4^{c-1}n!(c-1)!(n-2c+2)!} \binom{n-1}{r}^{-1}\right) \\ &= \epsilon D_{2c-2,c-1} + \frac{\epsilon^{c-(n-r)}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{2\,n!} \binom{n-1}{r}^{-1} \\ &= \epsilon^{c-(n-r)} D_{2n-2r,n-r} + (c-(n-r)) \frac{\epsilon^{c-(n-r)}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{2\,n!} \binom{n-1}{r}^{-1} \\ &= \frac{\epsilon^{c-(n-r)}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{2\,n!} \binom{n-1}{r}^{-1} + (c-(n-r)) \frac{\epsilon^{c-(n-r)}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{2\,n!} \binom{n-1}{r}^{-1} \\ &= \frac{\epsilon^{c-(n-r)}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{2\,n!} (c+r-n+1) \binom{n-1}{r}^{-1}. \end{aligned} \tag{A.15}$$

Tenim doncs determinades les entrades del vector incògnita x fins a la posició $D_{2\lfloor n/2\rfloor,\lfloor n/2\rfloor}$ inclosa.

Segona etapa: $2c \geq n$**.** Notem que $B'_{2c,q}$ té sentit si q satisfà $q \geq 2c-n > 0$. En aquest cas, $2c \geq n$, el sistema que cal resoldre té la mateixa forma que el cas anterior ($2c \leq n$) però amb menys equacions i incògnites. Considerant com a equacions per resoldre el sistema descrit al paràgraf precedent al cas $2c \leq n$ tenim que la matriu ampliada del sistema lineal a resoldre és la següent

$$\left(\begin{array}{cccc|c} (2c-n) & & & & \begin{array}{c}\epsilon((4c-2n-1)C_{2c-2,2c-n-1}- \\ -4(n-c+1)(2n-2c+1)C_{2c-2,2c-n-2})\end{array} \\ & & & & \\ (2n-2c)^2 & -(2c-n-1) & & & \\ & & & & \\ & & 4 & -2c(n-c) & -2\epsilon c(c-n)D_{2c-2,c-1} \end{array}\right)$$

A partir de la primera equació obtenim

$$C_{2c,2c-n} = \frac{\epsilon}{2c-n}((4c-2n-1)C_{2c-2,2c-n-1} - 2(2n-2c+2)(2n-2c+1)C_{2c-2,2c-n-2}). \quad \text{(A.16)}$$

Per $a \in \{0, ..., n-c\}$, a partir de la relació

$$(2n-2c-2a+2)^2 C_{2c,2c-n+a-1} = a(2c-n+a)C_{2c,2c-n+a}$$

obtenim

$$\begin{aligned} C_{2c,2c-n+a} &= \frac{4(n-c-a+1)^2}{a(2c-n+a)} C_{2c,2c-n+a-1} \\ &= \frac{4^a(n-c-a+1)^2(n-c-a+2)^2 \ldots (n-c)^2}{a(a-1)\ldots 2(2c-n+a)(2c-n+a-1)\ldots(2c-n+1)} C_{2c,2c-n} \\ &= \frac{4^a(n-c)!(n-c)!(2c-n)!}{a!(n-c-a)!(n-c-a)!(2c-n+a)!} C_{2c,2c-n} \end{aligned} \quad \text{(A.17)}$$

i a partir de

$$4C_{2c,c-1} - 2(n-c)cD_{2c,c} = -2\epsilon(n-c)(c)D_{2c-2,c-1}$$

i de (A.17) obtenim

$$\begin{aligned} D_{2c,c} &= \epsilon D_{2c-2,c-1} + \frac{2}{c(n-c)} C_{2c,c-1} \\ &= \epsilon D_{2c-2,c-1} + \frac{2 \cdot 4^{n-c-1}(n-c)!(n-c)!(2c-n)!}{c(n-c)(n-c-1)!(c-1)!} C_{2c,2c-n} \\ &= \epsilon D_{2c-2,c-1} + 2\frac{4^{n-c-1}(n-c)!(2c-n)!}{c!} C_{2c,2c-n}. \end{aligned} \quad \text{(A.18)}$$

Per trobar el valor de $C_{2c,2c-n}$ utilitzem que coneixem el valor de $C_{2c-2,2c-n-1}$ i de $C_{2c-2,2c-n-2}$ si $c \in \{n-r, ..., \lfloor n/2 \rfloor\}$. Considerem $c_0 = \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$.

A partir de l'estudi previ del cas $2c \leq n$ coneixem el valor de les variables $C_{2c_0-2,2c_0-n-1}$, $C_{2c_0-2,2c_0-n-2}$ i D_{2c_0-2,c_0-1}, que per n parell és (si n és senar ometem el càlcul, que és anàleg):

$$C_{2c_0-2,2c_0-n-1} = C_{n,1} = \frac{\epsilon^{n/2-(n-r)}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})(n/2)!(n/2)!}{4^{n/2-1}n!((n-2)/2)!((n-2)/2)!}\binom{n-1}{r}^{-1} \tag{A.19}$$
$$= \frac{\epsilon^{r-n/2}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{2^n n!}n^2\binom{n-1}{r}^{-1}$$

$$C_{2c_0-2,2c_0-n-2} = C_{n,0} = \frac{\epsilon^{r-n/2}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{2^n n!}\binom{n-1}{r}^{-1}$$

$$D_{2c_0-2,c_0-1} = D_{n,n/2} = \frac{\epsilon^{n/2-(n-r)}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{2\,n!}(r-\frac{n}{2}+1)\binom{n-1}{r}^{-1}.$$

Llavors

$$\begin{aligned} C_{n+2,2} &= \frac{\epsilon}{2c-n}((4c-2n-1)C_{2c-2,2c-n-1} - 2(2n-2c+2)(2n-2c+1)C_{2c-2,2c-n-2}) \\ &= \frac{\epsilon^{r-n/2+1}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{2^{n+1}n!}(3n^2-2n(n-1))\binom{n-1}{r}^{-1} \\ &= \frac{\epsilon^{r-n/2+1}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{2^{n+1}n!}n(n+2)\binom{n-1}{r}^{-1}. \end{aligned}$$

Una vegada coneixem l'expressió de $C_{n+2,2}$ podem trobar la de $C_{2c,2c-n}$ per a qualsevol $c \in \{\lfloor n/2 \rfloor, ..., n\}$ utilitzant la recurrència trobada per $C_{2c,2c-n}$ i $C_{2c-2,2c-n-1}$. Primer de tot tenim

$$\begin{aligned} C_{2c,2c-n} &\overset{(A.16)}{=} \frac{\epsilon}{2c-n}((4c-2n-1)C_{2c-2,2c-n-1} - 2(2n-2c+2)(2n-2c+1)C_{2c-2,2c-n-2}) \\ &\overset{(A.17)}{=} \frac{\epsilon C_{2c-2,2c-n-2}}{2c-n}\cdot \\ &\quad \cdot\left(\frac{(4c-2n-1)4(n-c+1)!(n-c+1)!(2c-n-2)!}{(n-c)!(n-c)!(2c-n-1)!} - 4(n-c+1)(2n-2c+1)\right) \\ &= \frac{4\epsilon(n-c+1)}{2c-n}\left(\frac{(4c-2n-1)(n-c+1)-(2n-2c+1)(2c-n-1)}{(2c-n-1)}\right)C_{2c-2,2c-n-2} \\ &= \frac{4\epsilon(n-c+1)c}{(2c-n)(2c-n-1)}C_{2c-2,2c-n-2}. \end{aligned}$$

Si seguim aquesta recurrència fins que $C_{*,*-n}$ tingui $* \leq \frac{n+2}{2}$ ja estarem al cas que sabem el valor de la constant i podrem trobar el valor de $C_{2c,2c-n}$.

$$\begin{aligned} C_{2c,2c-n} &= \frac{(4\epsilon)^{c-(n+2)/2}c(c-1)\cdot ...\cdot((n+4)/2)(n-c+1)(n-c+2)\cdot ...\cdot(n/2-1)}{(2c-n)(2c-n-1)\cdot ...\cdot 4\cdot 3}C_{n+2,2} \\ &= \frac{(4\epsilon)^{c-(n+2)/2}c!((n-2)/2)!2}{((n+2)/2)!(n-c)!(2c-n)!}C_{n+2,2} \\ &= \frac{(4\epsilon)^{c-(n+2)/2}2^3}{(n+2)n}\binom{c}{2c-n}\frac{\epsilon^{r-n/2+1}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{2^{n+1}n!}n(n+2)\binom{n-1}{r}^{-1} \\ &= \frac{\epsilon^{c-(n-r)}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{4^{n-c}n!}\binom{n-1}{r}^{-1}\binom{c}{2c-n}. \end{aligned} \tag{A.20}$$

Finalment,

$$\begin{aligned}
C_{2c,2c-n+a} &= \frac{4^a(n-c)!(n-c)!(2c-n)!}{a!(n-c-a)!(n-c-a)!(2c-n+a)!}\frac{\epsilon^{c-(n-r)}c!\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{4^{n-c}(2c-n)!(n-c)!n!}\binom{n-1}{r}^{-1}\\
&= \frac{\epsilon^{c-(n-r)}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{4^{n-c-a}n!}\binom{n-1}{r}^{-1}\binom{n-c}{n-c-a}\binom{c}{2c-n+a}
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
D_{2c,c} &\overset{(A.17)\text{ i }(A.20)}{=} \epsilon D_{2c-2,c-1} + 2\frac{4^{n-c-1}(n-c)!(2c-n)!}{c!}\frac{\epsilon^{c-(n-r)}c!\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{4^{n-c}(2c-n)!(n-c)!n!}\binom{n-1}{r}^{-1}\\
&= \epsilon D_{2c-2,c-1} + \frac{\epsilon^{c-(n-r)}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{2\,n!}\binom{n-1}{r}^{-1}\\
&= \epsilon^{c-n/2}D_{n,n/2} + (c-n/2)\frac{\epsilon^{c-(n-r)}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{2\,n!}\binom{n-1}{r}^{-1}\\
&= \frac{\epsilon^{c-(n-r)}\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{2\,n!}(c+r-n+1)\binom{n-1}{r}^{-1}.
\end{aligned}$$

Per determinar la constant d de δvol considerem l'última equació del sistema.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{(n-1)!} &= -2\epsilon^2(2n-1)D_{2n-4,n-2} - 4\epsilon C_{2n-2,n-2} + 2\epsilon(3n-1)D_{2n-2,n-1}\\
&= 2\epsilon^r\left(-(2n-1)(r-1)-(n-1)+(3n-1)r\right)\frac{\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{2\,n!}\binom{n-1}{r}^{-1}\\
&= \frac{\epsilon^r\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})}{n!}n(r+1)\binom{n-1}{r}^{-1}
\end{aligned}$$

de manera que

$$d = \epsilon^r\mathrm{vol}(G^{\mathbb{C}}_{n-1,r})(r+1)\binom{n-1}{r}^{-1}.$$

Fent el canvi de variable donat a (4.11), trobem l'expressió de l'enunciat respecte les valoracions $\{B_{k,q},\Gamma_{k,q}\}$.

Com que no podem assegurar que l'equació plantejada a (A.10) tingui solució i que sigui única hem de comprovar que la solució que hem trobat satisfà totes les equacions que no hem considerat per resoldre el sistema.

Estudiem primer el cas $2c \le n$. Considerem la matriu de la pàgina 96. Les files que no hem tingut en compte en resoldre el sistema es corresponen a $\tilde{B}'_{2c-1,q}$, $q \in \{1,...,c-1\}$. Suposem $q \ne c-1$. L'equació que determina la fila $\tilde{B}'_{2c-1,q}$ és

$$\begin{aligned}
&-(2c-2q)(2c-2q-q)C_{2c,q} + (q+1)(n-2c+q+3/2)C_{2c,q+1}\\
&\qquad = -\epsilon(2c-2q)(2c-2q-1)C_{2c-2,q-1} + \epsilon(n-2c+q+2)(q+1/2)C_{2c-2,q}.
\end{aligned}$$

Per $q = c-1$, l'equació que s'ha de complir és:

$$\begin{aligned}
&2\epsilon^2(n-c+1)(c-1/2)D_{2c-4,c-2} + 2\epsilon C_{2c-2,c-2} - 2\epsilon((n-c+1)(2c-1/2)-c/2)D_{2c-2,c-1}\\
&\qquad = -2C_{2c,c-1} + 2c(n-2+1/2)D_{2c,c}.
\end{aligned}$$

Substituint el valor de cada $C_{*,\cdot}$ i $D_{*,\cdot}$ que hem donat a la pàgina 97 podem comprovar que se satisfan les equacions.

De la mateixa manera podem veure que les equacions que no hem considerat del cas $2c \ge n$ també es compleixen.

Demostració del teorema 4.4.1

La idea de la demostració és anàloga a la del teorema 4.3.5. De la mateixa manera, si els dos costats de l'expressió tenen la mateixa variació δ_X respecte qualsevol camp X, llavors l'expressió és vàlida.

A partir de l'expressió de Gauss-Bonnet-Chern sabem que $\chi(\Omega)$ s'escriu com la integral sobre $N(\Omega)$ d'una forma diferencial $O(2n)$-invariant i, per tant, $U(n)$-invariant. Així doncs, per la proposició 2.4.5 tenim que existeixen constants $C_{k,q}$, $D_{k,q}$, d tals que

$$\chi(\Omega) = \sum_{k,q} C_{k,q} B'_{k,q}(\Omega) + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} D_{2j,j} \Gamma'_{2j,j}(\Omega) + d\mathrm{vol}(\Omega) \tag{A.21}$$

on $\max\{0, k-n\} \leq q < k/2 \leq n$ i $B'_{k,q}$ i $\Gamma'_{k,q}$ són les valoracions definides a (4.11). Fent variació a banda i banda de la igualtat anterior tenim:

$$0 = \sum_{k,q} (c_{k,q} \tilde{B}'_{k,q}(\Omega) + d_{2q,q} \tilde{\Gamma}'_{2q,q}(\Omega))$$

amb $c_{k,q}$ i $d_{k,q}$ combinació lineal de $C_{k,q}$ i $D_{2q,q}$.

Cal imposar, doncs, $c_{k,q} = d_{k,q} = 0$.

La variació de $\Gamma'_{0,0}$ a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ és (cf. corol·lari 4.1.9):

$$\delta\Gamma'_{0,0}(\Omega) = 2\epsilon(-(3n-1)\tilde{B}'_{1,0}(\Omega) + (n-1)\tilde{\Gamma}'_{1,0}(\Omega) + 3\epsilon(n-1)\tilde{B}'_{3,1}(\Omega)).$$

Cal cancel·lar la variació en els termes $\tilde{B}'_{1,0}$, $\tilde{B}'_{3,1}$ i $\tilde{\Gamma}'_{1,0}$. Per la proposició 4.1.7 tenim que la variació d'una valoració $B_{k,q}$ a $\mathbb{CK}^n(\epsilon)$ amb k parell (resp. senar) només té termes $\tilde{B}'_{k',q'}$ i $\tilde{\Gamma}'_{k',q'}$ amb k' senar (resp. parell). Per tant, tenim que a l'expressió (A.21) podem restringir la suma als valors de k parells, de manera que (A.21) es redueix a

$$\chi(\Omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{q=\max\{0,2k-n\}}^{k-1} C_{2k,q} B'_{2k,q}(\Omega) + D_{2k,k} \Gamma'_{2k,k}(\Omega) \right) + d\mathrm{vol}(\Omega). \tag{A.22}$$

La banda dreta de la igualtat anterior és la mateixa que la de la igualtat (A.11) més el terme $D_{0,0}\Gamma'_{0,0}$. Per tant, la variació serà molt similiar, només cal sumar la variació del terme de $\Gamma'_{0,0}$ a la variació de (A.10) en el cas $r = n$. Així doncs, respecte el sistema d'equacions lineal que obteníem a la demostració del teorema 4.3.5 només cal canviar les equacions referents a $\tilde{B}'_{1,0}$, $\tilde{B}'_{3,1}$ i $\tilde{\Gamma}'_{1,0}$. Resolem primer de tot aquestes equacions (és a dir, $c_{1,0} = 0$, $d_{1,0} = 0$ i $c_{3,1} = 0$):

$$\begin{aligned} -\epsilon(3n-1)D_{0,0} - 2C_{2,0} + 2(n-1/2)D_{2,1} &= 0 \\ \epsilon(n-1)D_{0,0} + 2C_{2,0} - (n-1)D_{2,1} &= 0 \\ 3\epsilon^2(n-1)D_{0,0} + 2\epsilon C_{2,0} - \epsilon(7n-9)D_{2,1} - 2C_{4,1} + 2(2n-3)D_{4,2} &= 0. \end{aligned} \tag{A.23}$$

El valor de $D_{0,0}$ el podem trobar en el cas d'$\epsilon = 0$, és a dir, a $\mathbb{C}^n$, on sabem que

$$D_{0,0} = \frac{1}{O_{2n-1}(n-1)!} = \frac{1}{2n\omega_{2n}(n-1)!} = \frac{n!}{2\,n!\pi^n} = \frac{1}{2\pi^n}.$$

Aquesta elecció del valor de $D_{0,0}$ garanteix que les dues bandes de (A.21) coincideixen quan Ω col·lapsa a un punt.

De les dues primeres i del valor anterior de $D_{0,0}$ obtenim

$$\begin{aligned} C_{2,0} &= \frac{\epsilon}{2}(n-1)D_{0,0} = \frac{\epsilon(n-1)}{4\pi^n}, \\ D_{2,1} &= 2\epsilon D_{0,0} = \frac{\epsilon}{\pi^n}. \end{aligned}$$

Per trobar el valor de $C_{4,1}$ i $D_{4,2}$ considerem les equacions determinades per $\{c_{3,0} = 0, c_{3,1} = 0, d_{3,0} = 0, d_{3,1} = 0\}$. L'equació $c_{3,1} = 0$ és la donada a (A.23), les altres estan donades per:

$$\begin{aligned} -\epsilon(n-2)C_{2,0} - 24C_{4,0} + (2n-5)C_{4,1} &= 0. \\ 16C_{4,0} - (n-3)C_{4,1} &= 0, \\ \epsilon(n-2)D_{2,1} + C_{4,1} - (n-2)D_{4,2} &= 0. \end{aligned}$$

(Notem que coincideixen amb les del teorema 4.3.5.) Resolent el sistema determinat per les 3 equacions lineals anteriors i l'equació (A.23), obtenim que és compatible determinat amb solució

$$C_{4,0} = \frac{\epsilon^2}{32\pi^n}(n-2)(n-3), \quad C_{4,1} = \frac{\epsilon^2}{2\pi^n}(n-2), \quad D_{4,2} = \frac{3\epsilon^2}{2\pi^n}.$$

A partir de les següents caixes, és a dir, de les variables $C_{2c,q}$, $D_{2c,c}$ amb $c \geq 3$, tenim exactament les mateixes equacions que en la demostració del teorema 4.3.5. Per tant, podem utilitzar totes les relacions que hem obtingut si tenim en compte el següent fet. A la demostració del teorema 4.3.5 hem posat cada $C_{2c,q}$ i cada $D_{2q,q}$ com a múltiple de $C_{2,0}$ i $D_{2,1}$. Aquí per trobar els valors de $C_{4,0}$, $C_{4,1}$ i $D_{4,2}$ hem utilitzat un altre sistema. Per tant, podria ser que els valors que hem obtingut no complissin (A.12). Podem comprovar fàcilment que sí que es compleixen aquestes equacions.

Així doncs, a partir de les igualtats (A.13), (A.14), (A.15), (A.17) i (A.18), prenent $r = n-1$ i del càlcul de $C_{n,1}$, $C_{n,0}$, $D_{n,\lfloor n/2 \rfloor}$ de la mateixa manera que a les tres equacions de (A.19) tenim l'expressió

$$\chi(\Omega) = \sum_{c=0}^{n-1} \frac{\epsilon^c}{\pi^n} \left(\sum_{q=\max\{0,2c-n\}}^{c-1} \frac{1}{4^{c-q}} \binom{c}{q} \binom{n-c}{c-q} B'_{2c,q}(\Omega) + \frac{c+1}{2}\Gamma'_{2c,c}(\Omega) \right) + \frac{\epsilon^n (n+1)!}{\pi^n} \mathrm{vol}(\Omega).$$

Fent el canvi de variable de (4.11) obtenim l'expressió de l'enunciat:

$$\begin{aligned} \chi(\Omega) &= \sum_{c=0}^{n-1} \frac{\epsilon^c}{\pi^n} \left(\sum_{q=\max\{0,2c-n\}}^{c-1} \frac{1}{4^{c-q}} \binom{c}{q} \binom{n-c}{c-q} B'_{2c,q}(\Omega) + \frac{c+1}{2}\Gamma'_{2c,c}(\Omega) \right) + \frac{\epsilon^n (n+1)!}{\pi^n} \mathrm{vol}(\Omega) \\ &= \sum_{c=0}^{n-1} \frac{\epsilon^c}{\pi^n} (\sum_{q=\max\{0,2c-n\}}^{c-1} \frac{1}{4^{c-q}} \frac{c!(n-c)!q!(n-2c+q)!(2c-2q)!\omega_{2n-2c}}{q!(c-q)!(c-q)!(n-2c+q)!} B_{2c,q}(\Omega) + \\ &\quad + \frac{2(c+1)}{2} c!(n-2c+c)!(2c-2c)!\omega_{2n-2c}\Gamma_{2c,c}(\Omega)) + \frac{\epsilon^n (n+1)!}{\pi^n} \mathrm{vol}(\Omega) \\ &= \sum_{c=0}^{n-1} \frac{\epsilon^c}{\pi^n} (\sum_{q=\max\{0,2c-n\}}^{c-1} \frac{1}{4^{c-q}} \binom{2c-2q}{c-q} \frac{c!(n-c)!\pi^{n-c}}{(n-c)!} B_{2c,q}(\Omega) \\ &\quad + (c+1)!(n-c)! \frac{\pi^{n-c}}{(n-c)!} \Gamma_{2c,c}(\Omega)) + \frac{\epsilon^n (n+1)!}{\pi^n} \mathrm{vol}(\Omega) \\ &= \sum_{c=0}^{n-1} \frac{\epsilon^c}{\pi^c} c! \left(\sum_{q=\max\{0,2c-n\}}^{c-1} \frac{1}{4^{c-q}} \binom{2c-2q}{c-q} B_{2c,q}(\Omega) + (c+1)\Gamma_{2c,c}(\Omega) \right) + \frac{\epsilon^n (n+1)!}{\pi^n} \mathrm{vol}(\Omega). \end{aligned}$$

Bibliografia

[AB08] S. Alesker and A. Bernig. The product on smooth and generalized valuations. *arXiv:0904.1347v1*, 2008.

[Aba] J. Abardia. Average of mean curvature integral in complex space forms. *Apareixarà a Advances in Geometry.*

[AF08] S. Alesker and J.H.G. Fu. Theory of valuations on manifolds. III: Multiplicative structure in the general case. *Trans. Am. Math. Soc.*, 360(4):1951–1981, 2008.

[AGS09] J. Abardia, E Gallego, and G. Solanes. Gauss-bonnet theorem and crofton type formulas in complex space forms. *Preprints de la Universitat Autònoma de Barcelona*, 2009.

[Ale01] S. Alesker. Description of translation invariant valuations on convex sets with solution of P. McMullen's conjecture. *Geom. Funct. Anal.*, 11(2):244–272, 2001.

[Ale03] S. Alesker. Hard Lefschetz theorem for valuations, complex integral geometry, and unitarily invariant valuations. *J. Differential Geom.*, 63(1):63–95, 2003.

[Ale04] S. Alesker. SU (2)-invariant valuations. Milman, V. D. (ed.) et al., Geometric aspects of functional analysis. Papers from the Israel seminar (GAFA) 2002–2003. Berlin: Springer. Lecture Notes in Mathematics 1850, 21-29 (2004)., 2004.

[Ale06a] S. Alesker. Theory of valuations on manifolds. I: Linear spaces. *Isr. J. Math.*, 156:311–339, 2006.

[Ale06b] S. Alesker. Theory of valuations on manifolds. II. *Adv. Math.*, 207(1):420–454, 2006.

[Ale07a] S. Alesker. Theory of valuations on manifolds: a survey. *Geom. Funct. Anal.*, 17(4):1321–1341, 2007.

[Ale07b] S. Alesker. Theory of valuations on manifolds. IV: New properties of the multiplicative structure. Milman, Vitali D. (ed.) et al., Geometric aspects of functional analysis. Proceedings of the Israel seminar (GFA) 2004-2005. Berlin: Springer. Lecture Notes in Mathematics 1910, 1-44 (2007)., 2007.

[ÁPF04] J. C. Álvarez Paiva and E. Fernandes. What is a Crofton formula? *Math. Notae*, 42:95–108, 2003/04.

[Ber08a] A. Bernig. A hadwiger-type theorem for the special unitary group. *Geometric and Functional Analysis (to appear)*, 2008.

[Ber08b] A. Bernig. Integral geometry under G_2 and Spin(7). *arXiv:0803.3885v1*, 2008.

[BF08] A. Bernig and J.H.G. Fu. Hermitian integral geometry. *arXiv:0801.0711v5*, 2008.

[Bla55] W. Blaschke. *Vorlesungen über Integralgeometrie. 3. Aufl.* Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 130 S., 44 Fig. im Text. , 1955.

[Bla76] D.E. Blair. *Contact manifolds in Riemannian geometry.* Springer-Verlag, Berlin, 1976. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 509.

[Bor49] A. Borel. Some remarks about Lie groups transitive on spheres and tori. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:580–587, 1949.

[Bor50] A. Borel. Le plan projectif des octaves et les sphères comme espaces homogènes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 230:1378–1380, 1950.

[GG00] C. Gorodski and N. Gusevskii. Complete minimal hypersurfaces in complex hyperbolic space. *Manuscripta Math.*, 103(2):221–240, 2000.

[Gol99] W. M. Goldman. *Complex hyperbolic geometry.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1999. Oxford Science Publications.

[Gra73] A. Gray. The volume of a small geodesic ball of a Riemannian manifold. *Mich. Math. J.*, 20:329–344, 1973.

[Gri78] P.A. Griffiths. Complex differential and integral geometry and curvature integrals associated to singularities of complex analytic varieties. *Duke Math. J.*, 45:427–512, 1978.

[Had57] H. Hadwiger. *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie.* Springer-Verlag, Berlin, 1957.

[Hsi98] P.H. Hsieh. Linear submanifolds and bisectors in $\mathbf{C}H^n$. *Forum Math.*, 10(4):413–434, 1998.

[KN69] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. II.* Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 15 Vol. II. Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1969.

[KR97] D.A. Klain and G.-C. Rota. *Introduction to geometric probability.* Lezioni Lincee. Cambridge: Cambridge University Press. Rome: Accademia Nazionale dei Lincei, xiv, 178, 1997.

[LS82] R. Langevin and T. Shifrin. Polar varieties and integral geometry. *Amer. J. Math.*, 104(3):553–605, 1982.

[McM77] P. McMullen. Valuations and Euler-type relations on certain classes of convex polytopes. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 35(1):113–135, 1977.

[Mon85] S. Montiel. Real hypersurfaces of a complex hyperbolic space. *J. Math. Soc. Japan*, 37(3):515–535, 1985.

[MS43] D. Montgomery and H. Samelson. Transformation groups of spheres. *Ann. of Math. (2)*, 44:454–470, 1943.

[MS83] Peter McMullen and Rolf Schneider. Valuations on convex bodies. In *Convexity and its applications*, pages 170–247. Birkhäuser, Basel, 1983.

[O'N83] B. O'Neill. *Semi-Riemannian geometry*, volume 103 of *Pure and Applied Mathematics.* Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1983. With applications to relativity.

[Par02] H. Park. *Kinematic formulas for the real subspaces of complex space forms of dimension* 2 *and* 3. PhD-thesis. University of Georgia, 2002.

[Rum94] M. Rumin. Formes différentielles sur les variétés de contact. *J. Differential Geom.*, 39(2):281–330, 1994.

[San52] L. A. Santaló. Integral geometry in Hermitian spaces. *Amer. J. Math.*, 74:423–434, 1952.

[San04] L. A. Santaló. *Integral geometry and geometric probability.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2004. With a foreword by Mark Kac.

[Sch93] R. Schneider. *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, volume 44 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[Sol06] G. Solanes. Integral geometry and the Gauss-Bonnet theorem in constant curvature spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358(3):1105–1115 (electronic), 2006.

[War71] F.W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Scott, Foresman and Co., Glenview, Ill.-London, 1971.

Llista de símbols

Índex alfabètic