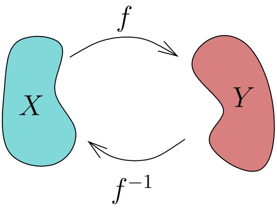
MAT^2
MATerials MATemàtics
Versió per a e-book del
treball no. 8 del volum 2014
www.mat.uab.cat/matmat

Sull'inversione di funzioni

Gaetano Zampieri

Scopo di questo articolo è introdurre al tema dell'inversione globale di funzioni. Partiamo dal teorema che deduce l'invertibilità locale della funzione



dall'invertibilità dell'approssimazione affine. Illustriamo il teorema della funzione propria di Hadamard e Caccioppoli che è la pietra angolare della questione. Discutiamo poi la congettura Jacobiana di Keller legata alla domanda tuttora aperta: si può estendere il teorema di Cramer alle funzioni polinomiali? Infine usiamo il teorema della funzione propria per dimostrare che non esistono prodotti commutativi in dimensione maggiore di due, un esempio del profondo dialogo fra analisi e algebra. Il risultato è ottimale grazie ai numeri reali e complessi; i quaternioni in dimensione 4 e gli ottetti in dimensione 8 non commutano.

1 Invertibilità globale di funzioni

Un problema fondamentale in matematica è quello dell'esistenza e unicità delle soluzioni dell'equazione $y = f(x)$ nell'incognita x. La funzione f manda X in Y dove X, Y sono insiemi con qualche struttura altrimenti siamo impotenti. Ci limiteremo all'importante caso particolare $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ oppure $X = Y = \mathbb{C}^n$. Il problema però è studiato, sia nella teoria che per le applicazioni, anche in spazi normati di dimensione infinita e perfino in spazi topologici più generali, vedi [DGZ].

Per dare un'idea dell'importanza della questione, basti dire che un noto teorema d'inversione, detto di Gale e Nikaido, ha avuto origine da una congettura errata del premio Nobel per l'Economia

Samuelson, vedi [Pa]. Altre notevoli applicazioni si hanno in molti rami della scienza.

Il problema dell'inversione di funzioni è difficile e porta a condizioni sulla funzione f di diversa natura. C'è invece una variante, un po' più complicata da enunciare, ma dove tutto è chiaro: il teorema locale.

Preliminarmente, ricordiamo che una funzione f da un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ si dice differenziabile in $\tilde{x} \in A$ se esiste una funzione lineare $f'(\tilde{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto f'(\tilde{x})v$, tale che

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(\tilde{x}+v) - \big(f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})v\big)}{|v|} = 0\,,$$

e, in questo caso, la funzione lineare $f'(\tilde{x})$ è unica e si dice *differenziale* di f in $\tilde{x}$. Nel precedente limite, il termine $v \mapsto f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})v$ è "l'approssimazione affine della funzione" f vicino a $\tilde{x}$. Dall'algebra lineare sappiamo che condizione necessaria e sufficiente di invertibilità dell'approssimazione affine è che $f'(\tilde{x})$ sia non singolare cioè che $f'(\tilde{x})v = 0 \Longrightarrow v = 0$. Equivalentemente, $\det f'(\tilde{x}) \neq 0$ dove abbiamo indicato con $f'(\tilde{x})$ anche la matrice Jacobiana delle derivate parziali. La f si dice differenziabile con continuità in A, o brevemente di classe C^1, se esiste $f'(x)$ per ogni $x \in A$ ed inoltre se la funzione $x \mapsto f'(x)$ è continua, in altri termini se le componenti di f hanno derivate parziali continue.

Una funzione biiettiva e continua, assieme alla funzione inversa, si dice *omeomorfismo*, nel seguito *omeo*. Se un omeo è di classe C^1 assieme all'inversa si dice *diffeomorfismo* C^1, nel seguito *diffeo*. Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$, la funzione $f : A \to \mathbb{R}^n$ si dice un *omeo locale*, rispettivamente un *diffeo locale*, se per ogni $x \in A$ esistono due aperti U, V di $\mathbb{R}^n$ con $x \in U \subseteq A$ e $f(x) \in V$ tali che $f(U) = V$

e $f|U : U \to V$ sia un omeo, rispettivamente un diffeo.

Il teorema locale della funzione inversa può essere enunciato nel modo seguente: *$f : A \to \mathbb{R}^n$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, di classe C^1, è un diffeo locale se e solo se $f'(x)$ è non singolare per ogni $x \in A$.*

Il teorema esprime forse il più importante esempio di dialogo fra analisi e algebra: *se l'approssimazione affine è invertibile, allora la funzione stessa è localmente invertibile.* Si osservi però che la funzione reale di variabile reale $f(x) = x^3$ è iniettiva anche se $f'(0) = 0$.

In quest'ultimo esempio la derivata $f'(x) = 3x^2$ non cambia mai di segno. Cima, Gasull e Mañosas hanno dimostrato in [CGM] che $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 con $\det f'(\tilde{x}) = 0$ non è localmente iniettiva in $\tilde{x}$ se il $\det f'$ assume valori sia positivi che negativi in ogni intorno di $\tilde{x}$.

Il diffeo locale $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \mathrm{e}^x(\cos y, \sin y)$ non è iniettivo, e si può fare perfino un esempio con determinante Jacobiano costante:

$$f(x,y) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{x/2}\bigl(\cos(y\,e^{-x}), \sin(y\,\mathrm{e}^{-x})\bigr)\,.$$

È anche interessante la funzione continua $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(0,0) = 0$ e

$$f(x,y) = \left(x\,\frac{x^2 - 3\,y^2}{x^2+y^2}, y\,\frac{3\,x^2 - y^2}{x^2+y^2}\right), \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

Questa funzione per $(x,y) \neq (0,0)$ è C^1 e il determinante Jacobiano è costantemente uguale a 3. Non è però iniettiva, nemmeno localmente in $(0,0)$:

$$\begin{aligned} f(\lambda,0) &= f\bigl(-\lambda/2, \lambda\sqrt{3}/2\bigr) \\ &= f\bigl(-\lambda/2, -\lambda\sqrt{3}/2\bigr) = (\lambda,0), \qquad \forall\lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Per passare a vedere un importante teorema di invertibilità *globale* richiamiamo preliminarmente i concetti di funzione propria e di insieme semplicemente connesso.

Una funzione continua si dice *propria* se le immagine inverse dei compatti sono compatte. In $\mathbb{R}^n$ i compatti sono gli insiemi chiusi e limitati quindi in particolare una funzione continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è propria se e solo se è *coerciva* cioè $|f(x)| \to \infty$ per $|x| \to \infty$.

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *connesso per archi* se, dati comunque $x, y \in A$, esiste un arco che li congiunge cioè una funzione continua $\gamma : [0, 1] \to A$ con $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. È quindi un sottoinsieme "fatto di un solo pezzo". Un insieme connesso per archi $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice poi *semplicemente connesso* se dato comunque un *circuito* in A, cioè un arco continuo $\gamma : [0, 1] \to A$ con $\gamma(0) = \gamma(1)$, esiste una funzione continua $h : [0,1] \times [0,1] \to A$ tale che $h(t,0) = \gamma(t)$, $h(t,1) = h(0,1)$ per ogni $t \in [0,1]$, e $h(0,s) = h(1,s)$ per ogni $s \in [0,1]$. Una tale funzione h è detta *omotopia*. L'ultima condizione che la definisce dice che per ogni fissato $s \in [0,1]$ si ha un circuito, la prima che per $s = 0$ si ha γ e la seconda che per $s = 1$ si ha un circuito costante. Insomma, *A è semplicemente connesso se ogni circuito in A si può deformare con continuità ad un punto.*

L'aperto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso perché un circuito "attorno all'origine" non si può deformare con continuità ad un punto, mentre, se togliamo a $\mathbb{R}^3$ un punto, otteniamo un insieme che è semplicemente connesso. Invece, se togliamo ad $\mathbb{R}^3$ una retta, otteniamo un aperto che non è semplicemente connesso.

E finalmente siamo al teorema di inversione globale che avevamo annunciato. Qui X, Y sono aperti di $\mathbb{R}^n$ ma potrebbero essere spazi metrici o addirittura spazi topologici di Hausdorff, vedi [DGZ] per una dimostrazione.

Teorema della funzione propria (Hadamard-Caccioppoli). *Siano X, Y connessi per archi, Y semplicemente connesso, e $f : X \to Y$ un omeo locale. Allora f è un omeo su Y se e solo se è una funzione propria.*

Corollario. *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$, $\det f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $|f(x)| \to +\infty$ per $|x| \to +\infty$, allora f è un omeomorfismo. In particolare, fissato comunque $y \in \mathbb{R}^n$ l'equazione $y = f(x)$ ha una ed una sola soluzione.*

J. Hadamard

R. Caccioppoli

2 Si può estendere il teorema di Cramer alle funzioni polinomiali?

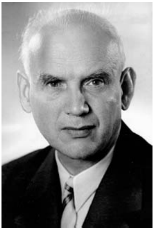
In pratica succede che non è sempre facile dimostrare che sono proprie le funzioni con cui si sta lavorando. Un esempio notevole sono i polinomi. Pensiamo innanzi tutto all'iniettività: *una* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *polinomiale* (cioè a componenti polinomiali) *tale che* $\det f'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$, *è necessariamente iniettiva?* Fino a qualche anno fa si pensava di sì, poi Pinchuk (1994) ha prodotto un controesempio in $\mathbb{R}^2$, piuttosto complicato, che il lettore interessato può trovare in [Pi].

Se consideriamo $\mathbb{C}^n$ invece di $\mathbb{R}^n$, la condizione $\det f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{C}^n$, equivale a $\det f'(x) = \text{cost} \neq 0$, dato che un polinomio ha sempre zeri a meno che non sia una costante, questo per il teorema fondamentale dell'algebra che si dimostra facilmente con l'analisi. Senza perdita di generalità possiamo anche scegliere la $\text{cost} = 1$. *Una $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ polinomiale, tale che* $\det f'(x) = 1$ *per ogni $x \in \mathbb{C}^n$, è sempre iniettiva?* Non si sa. Però:

Teorema. *Se la funzione polinomiale $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è iniettiva, allora è anche suriettiva e ha inversa polinomiale, brevemente è un "automorfismo polinomiale" di $\mathbb{C}^n$.*

Il teorema, dimostrato in varie tappe, è stato rivisitato recentemente da Rudin [R] che ne ha dato una nuova prova.

A questo punto enunciamo la congettura che costituisce un importante problema aperto, il numero 16 della lista di Smale [S] dei problemi per il secolo attuale:



E. O. Keller

Congettura Jacobiana, Keller (1939). Una funzione polinomiale $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, con determinante Jacobiano diverso da 0, è un automorfismo polinomiale di $\mathbb{C}^n$.

Se sostituiamo "lineare" a "polinomiale" otteniamo il teorema di Cramer di cui avremmo una bellissima estensione all'importante classe delle funzioni polinomiali.

Sono state pubblicate varie dimostrazioni sbagliate della congettura Jacobiana, le più famose sono forse quelle dovute a Segre (1956-57-60) e a

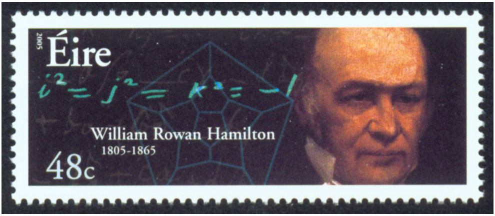
Gröbner (1961), vedi il fondamentale lavoro [BCW] di Bass, Connell e Wright.

La congettura è un problema aperto su cui, comunque, si sanno molte cose, ad esempio che ci si può limitare a considerare polinomi del tipo $f(x) = x + g(x)$ con g omogenea di grado 3. Più precisamente, se si riesce a dimostrarla per questa classe di funzioni in ogni dimensione, allora è vera, inoltre se si trova un controesempio allora si può costruirne un altro in dimensione maggiore del tipo $f(x) = x + g(x)$ con g cubica. Incidentalmente, se $g(x)$ è quadratica allora $f(x) = x + g(x)$ è sempre iniettiva, purchè il determinante Jacobiano sia diverso da 0 naturalmente. C'è anche una ricca zoologia di esempi fra cui il più semplice è $f(x_1, x_2) = (x_1 + {x_2}^3, x_2)$. Il libro [E2], di Arno van den Essen, contiene una rassegna sullo stato dell'arte nell'ultimo anno del secolo scorso. L'autore di quel libro sembra pensare che la congettura Jacobiana di Keller sia falsa, vedi [E1].

3 Non esistono prodotti commutativi in dimensione > 2

Passiamo infine a vedere un'applicazione all'algebra del teorema di analisi della funzione propria di Hadamard-Caccioppoli dovuta a Gordon [G]. Si tratta di provare che non esiste un prodotto commutativo in $\mathbb{R}^n$ per $n > 2$. Naturalmente questo fatto era ben noto prima della prova di Gordon. La sua dimostrazione è però eccezionalmente semplice e mette in luce alcuni aspetti profondi della questione. In particolare, la non esistenza è legata al fatto topologico che $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è semplicemente connesso per $n > 2$, mentre non lo è per $n \leq 2$. Prodotti commutativi esistono per $n = 1$, il semplice prodotto fra reali, e $n = 2$, i numeri complessi.

Ci sono prodotti anche in $\mathbb{R}^4$, i quaternioni di Hamilton, e in $\mathbb{R}^8$, gli ottetti di Cayley, ma non sono commutativi.



Vediamo quindi il corollario al teorema della funzione propria. A differenza di [G] qui diamo tutti i dettagli della dimostrazione per enfatizzarne il carattere elementare.

Corollario. *Per* $n > 2$ *non esiste un'operazione* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto x \star y$, *con le seguenti proprietà: per ogni* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *e* $a \in \mathbb{R}$

(i) $x \star (a\, y) = (a\, x) \star y = a\, x \star y$,

(ii) $x \star (y + z) = x \star y + x \star z$,

(iii) $x \star y = 0 \implies x = 0$ *oppure* $y = 0$,

(iv) $x \star y = y \star x$.

L'operazione è quindi bilineare, commutativa e senza 0-divisori; non è richiesta l'associatività $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$, né l'esistenza dell'unità.

Prova. Sia $n > 2$ e per assurdo supponiamo che esista un prodotto con le suddette proprietà. Indichiamolo con $F(x, y) := x \star y$. Sia poi $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x \mapsto x^2 = F(x, x)$. Si noti che f è ben definita poiché per (iii) $x^2 = 0$ implica $x = 0$ (quindi l'origine non è fra i valori di f).

Innanzi tutto $f \in C^1$, anzi $f \in C^\infty$. Infatti, scrivendo x con la base canonica di $\mathbb{R}^n$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$, e usando la bilinearità di F, otteniamo:

$$f(x) = F\big(\sum_{j=1}^{n} x_j\, e_j, \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_j\big)$$
$$= \sum_{j,k=1}^{n} x_j\, x_k\, F(e_j, e_k)$$

una funzione quadratica, quindi C^{∞}.

Proviamo ora che $f'(x)$ è non singolare per ogni $x \neq 0$, facendo perciò vedere che f è un diffeo locale (in particolare un omeo locale) per il teorema locale della funzione inversa

$$\begin{aligned}
f'(x)\, v &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\,v) - f(x)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(x+t\,v)^2 - x^2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{x^2 + t\,x\star v + t\,v\star x + t^2\,v^2 - x^2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} (x\star v + v\star x + t\,v^2) \\
&= x\star v + v\star x = 2\,x\star v
\end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio abbiamo usato la commutatività, prima la bilinearità). Quindi $f'(x)v = 2\,x \star v = 0$ implica $v = 0$ per (iii) dato che $x \neq 0$.

Come terzo passo della dimostrazione facciamo vedere che f è una funzione propria. Non basta far vedere che f è coerciva poiché qui stiamo trattando $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e non tutto lo spazio. Siano

$$m := \min_{|x|=1} |f(x)| > 0\,, \qquad M := \max_{|x|=1} |f(x)| > 0\,.$$

Allora

$$|f(x)| = \left| f\Big(|x|\,\frac{x}{|x|}\Big)\right| = |x|^2\,\left| f\Big(\frac{x}{|x|}\Big)\right|$$

dove abbiamo usato (i). Perciò per ogni $x \neq 0$

$$0 < m\,|x|^2 \leq |f(x)| \leq M\,|x|^2\,.$$

Sia $C \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ compatto. Allora $\{|y| : y \in C\}$ ha minimo $\tilde{m} > 0$ e massimo $\tilde{M} \geq \tilde{m}$. Per x tale che $f(x) \in C$ si ha

$$\tilde{m} \leq |f(x)| \leq M\,|x|^2\,, \qquad m\,|x|^2 \leq |f(x)| \leq \tilde{M}\,,$$

quindi

$$0 < \frac{\tilde{m}}{M} \leq |x|^2 \leq \frac{\tilde{M}}{m} < +\infty\,.$$

L'immagine inversa di C tramite la funzione continua f è un chiuso di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ i cui punti x soddisfano la relazione precedente che ci dice che C è chiuso anche in tutto $\mathbb{R}^n$ ed è pure limitato, quindi compatto. Abbiamo così provato che f è propria.

Infine $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è semplicemente connesso per $n > 2$. La funzione f soddisfa tutte le ipotesi del teorema della funzione propria ed è quindi un omeomorfismo, in particolare una funzione iniettiva. Un assurdo poiché per (i)

$$f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)\,.$$

$\square$

Bibliografia

[BCW] Hyman BASS, Edwin CONNELL, David WRIGHT, *The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse*, Bull. Amer. Math. Soc. 7, 287–330 (1982).

[CGM] Anna CIMA, Armengol GASULL, Francesc MAÑOSAS, *Injectivity of polynomial local homeomorphims of* $\mathbb{R}^n$, Nonlinear Anal. TMA 26, 877–885 (1996).

[DGZ] Giuseppe DE MARCO, Gianluca GORNI, Gaetano ZAMPIERI, *Global inversion of functions: an introduction*, Nonlinear Differential Equations and Applications 1, 229–248 (1994).

[E1] Arno van den ESSEN, *To believe or not to* *believe: the Jacobian Conjecture*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino 55, 283–290 (1997).

[E2] Arno van den ESSEN, *Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture*. Progress in Mathematics Vol. 190. Birkhäuser 2000.

[G] William B. GORDON, *An application of Hadamard's inverse function theorem to algebra*, Amer. Math. Monthly 84, 28–29 (1977).

[Pa] Thiruvenkatachari PARTHASARATHY, *On Global Univalence Theorems*. Lecture Notes in Mathematics Vol. 977. Springer-Verlag 1983.

[Pi] Serguey PINCHUK, *A counterexample to the real Jacobian conjecture*, Math. Z. 217, 1–4 (1994).

[R] Walter RUDIN, *Injective polynomial maps are automorphisms*, The Amer. Math. Monthly 102, 540–543 (1995).

[S] Steve SMALE, *Mathematical problems for the next century*, The Mathematical Intelligencer 20, 7–15 (1998).

Dipartimento di Informatica
Università di Verona
gaetano.zampieri@univr.it

Publicat el 18 de desembre de 2014