MAT^2

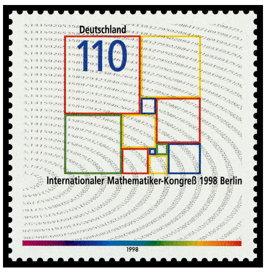
MATerials MATemàtics
Volum 2018, treball no. 2, 28 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

Integració de funcions racionals i π

Armengol Gasull

El número π denota el quocient entre la longitud d'una circumferència i el seu diàmetre i és indubtablement una de les constants matemàtiques més famosa i fascinant. Als científics els encanten les fórmules que involucren π, no només per la seva utilitat sinó per la seva estètica. Així, la fórmula preferida per a molts de nosaltres és $\mathrm{e}^{\pi\,\mathrm{i}} + 1 = 0$.

Sembla ser que el primer que va usar la lletra grega π per denotar aquest quocient va ser el matemàtic anglès William Oughtred (1574-1660). Es pensa que aquest nom prové de la paraula grega $\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\tau\rho o\xi$ (perímetre) usada per Arquimedes per a designar la longitud de la circumferència. La notació es va consolidar a partir dels treballs de Leonhard Euler de 1737.



El punt de partida d'aquest treball són les dues igualtats següents

$$0 < \int_0^1 \frac{(3\,x^2-1)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4(\pi-3), \quad 0 < \int_0^1 \frac{x^4\,(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{22}{7} - \pi, \quad (1)$$

que, a part de demostrar que $3 < \pi < \frac{22}{7}$, de ben segur desperten certa curiositat al lector.

La segona d'elles, a més de provar que $\pi \neq \frac{22}{7}$, fracció que apareixia a totes les enciclopèdies de principis i mitjans del segle passat com aproximació pràctica de π, també ens permet conèixer fàcilment els seus primers dígits. Veiem-ho: per a $x \in [0,1]$,

$$\frac{x^4(1-x)^4}{2} \leq \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \leq x^4(1-x)^4$$

i $\int_0^1 x^4(1-x)^4 \, \mathrm{d}x = 1/630$. Per tant,

$$3.1412\ldots = \frac{3958}{1260} = \frac{22}{7} - \frac{1}{630} < \pi < \frac{22}{7} - \frac{1}{1260} = \frac{3959}{1260} = 3.1420\ldots. \quad (2)$$

Aquest resultat s'atribueix a Dalzell ([14], 1944) i el mateix punt de vista ha estat desenvolupat als articles [3, 7, 15, 25, 26, 30] per a obtenir-ne extensions. Aquestes són les que han inspirat aquest treball. Per exemple, una tercera integral que apareix a [26] és

$$\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8(25+816\,x^2)}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = 3164\left(\frac{355}{113} - \pi\right). \quad (3)$$

De fet, s'han triat aquestes tres aproximacions de π, 3, $\frac{22}{7}$ i $\frac{355}{113}$, degut a que són històricament rellevants i a més apareixen en el desenvolupament de π en fraccions contínues, vegeu la §1 per a més detalls.

L'objectiu principal d'aquest treball és calcular integrals racionals adequades, diferents a les que apareixen als treballs esmentats, que permetin tant demostrar que π no coincideix amb certes aproximacions racionals donades, com calcular bones aproximacions de π.

És ben conegut, a partir dels treballs de Lambert i Legendre del segle XVIII, que π és un número irracional[1] i per tant l'interès principal de presentar resultats com (1), (3) o similars, és la seva simplicitat i la seva bellesa matemàtica. Clarament, el càlcul d'aquestes integrals i d'altres que apareixeran en aquest treball, es basa en els mètodes d'obtenció de primitives per a funcions racionals. Recordarem els resultats que necessitem sobre aquest tema a la §2. Per fer el treball més complert, a la §4 s'inclou una bonica demostració de la irracionalitat de π, deguda a Niven ([31], 1974), basada en integrar un cert polinomi multiplicat per la funció sinus.

A la §3 trobareu dos blocs d'algoritmes per a obtenir aproximacions de π. En el primer bloc, tots els algoritmes estan basats en el càlcul de primitives

[1] De fet, π no és ni tant sols algebraic: és a dir, no és arrel de cap polinomi amb coeficients racionals.

de funcions racionals. Els dos primers comencen a partir de les igualtats (1) i s'obtenen seguint els resultats desenvolupats a [14, 26, 30]. El tercer és relativament recent ([9], 1997) i té la particularitat de permetre calcular una certa xifra decimal de π (en base 16 o en base 2), sense necessitat de conèixer les anteriors. El segon bloc conté tquatre mètodes clàssics per a obtenir aproximacions de π: el d'Arquimedes, el que s'obté a partir de la fórmula d'integració numèrica dels trapezis, el basat en les funcions arctangent i la seva sèrie de Taylor truncada i el de Brent-Salamin, que es recolza en el càlcul de la mitjana aritmètica-geomètrica i que també es coneix com a algoritme de Gauss-Legendre.

1 El número π

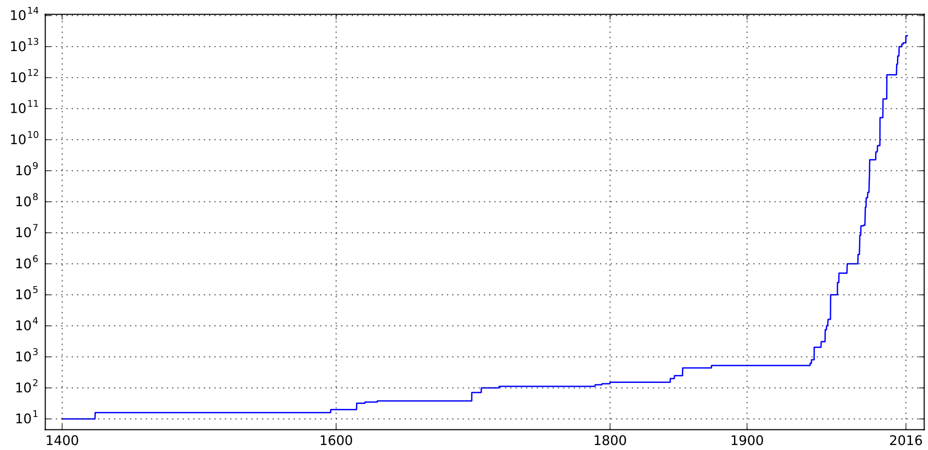
Per a aproximar π són útils altres caracteritzacions matemàtiques a part de l'original. Així, π també és el primer zero positiu de la funció sinus i per tant $\sin(\pi) = 0$. Altres relacions per π que usarem en aquest treball són:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \qquad \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

Al llarg de la història hi ha hagut molt d'interès per obtenir aproximacions cada cop més acurades de π. La llista que ve a continuació resumeix alguns resultats d'aproximació, la majoria extrets de [5, 9, 11, 16], i en cadascun hi ha subratllats els decimals correctes.

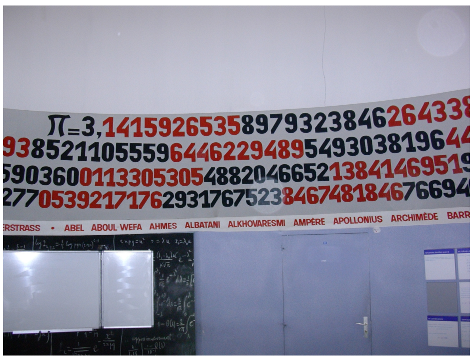
- Babilonis (2000 a.C.): $3 + \frac{1}{8} = \underline{3.1}25$.
- Egipcis (2000 a.C.): $(\frac{16}{9})^2 = \underline{3.1}6\ldots$
- Xinesos (1200 a.C.) i a la Bíblia (550 a.C.): $\underline{3}$.
- Arquimedes (250 a.C.): $\underline{3.141}85$. També va provar que $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$.
- Tsu Txung Txih ($\simeq 480$): $\frac{355}{113} = \underline{3.141592}9\ldots$
- Viète (1593): $\underline{3.141592653}6$.
- Machin (1706): 100 decimals exactes calculats.
- Euler (1707-1783): $\frac{103993}{33102} = \underline{3.14159265}30\ldots$
- De Lagny (1719): 112 decimals exactes calculats.
- Rutherford (1824): 152 decimals exactes calculats.

- Shanks (1873): 527 decimals exactes calculats.
- Kanada i Takahashi (1997): unes 5.1×10^{10} xifres.
- Kanada i col·laboradors (2002): unes 1.2×10^{12} xifres.
- Trueb (2016): unes 2.2×10^{13} xifres.



Rècords de computació dels dígits de π. Font: Wikipedia, setembre 2017

Algunes d'aquestes aproximacions milionàries s'han calculat basant-se en l'algoritme de Brent-Salamin, que com ja hem comentat es recorda en aquest treball, o en un algoritme generat a partir d'una fórmula per a $1/\pi$ deduïda pels germans Chudnovsky, que apareix a la §3, junt amb altres algoritmes més clàssics.



A la figura es mostra el número π a la cúpula del *Palais de la Découverte (1937)* de París. De bon principi, es van posar 707 xifres decimals de fusta, que són les que va calcular el 1873 el matemàtic anglès amateur, William Shanks. D'aquestes, D. F. Ferguson al 1944 va detectar que només les primeres 527 eren correctes. Les errònies es van corregir el 1949.

Ens podrien preguntar quines motivacions hi ha darrera del càlcul de les xifres decimals de π. Seguint [11, 32] podem dir que al principi hi havia l'interès de buscar una certa regularitat en aquestes, com passa per exemple amb els números racionals. Ara bé, un cop provada la seva irracionalitat per Lambert i Legendre i la seva transcendència el 1882 per Lindemann, aquest primer motiu va desaparèixer. Tot i així, avui en dia encara ens queda el repte de saber si π és *normal*. Recordem que un número real es diu normal si, en les seves xifres decimals, qualsevol bloc de k dígits apareix amb una freqüència relativa 10^{-k}, vegeu [29]. Els números normals són, d'alguna manera, els més "aleatoris". En particular, si π fos normal, la proporció de qualsevol dels deu dígits a les seves xifres decimals seria $\frac{1}{10}$. Les comprovacions que s'han fet en aquest sentit amb aquests càlculs milionaris semblen recolzar una resposta afirmativa, que en cas de ser certa haurà de ser demostrada teòricament. Per exemple, segons els càlculs de Kanada de 1995 (veure [16, Cap. 10]), les primeres 6×10^9 xifres decimals mostren les freqüències següents:

$$
\begin{array}{lcllcl}
\text{“}\mathbf{0}\text{”} & : & 599\,963\,005, & \text{“}\mathbf{5}\text{”} & : & 600\,017\,176, \\
\text{“}\mathbf{1}\text{”} & : & 600\,033\,260, & \text{“}\mathbf{6}\text{”} & : & 600\,016\,588, \\
\text{“}\mathbf{2}\text{”} & : & 599\,999\,169, & \text{“}\mathbf{7}\text{”} & : & 600\,009\,044, \\
\text{“}\mathbf{3}\text{”} & : & 600\,000\,243, & \text{“}\mathbf{8}\text{”} & : & 599\,987\,038, \\
\text{“}\mathbf{4}\text{”} & : & 599\,957\,439, & \text{“}\mathbf{9}\text{”} & : & 600\,017\,038.
\end{array}
$$

Potser encara més important, el càlcul dels dígits de π permet explotar l'extraordinària capacitat dels ordinadors actuals i pel camí descobrir possibles errors de software o hardware. A més, per exemple, per a programar el més òptimament possible els algoritmes que es van descobrint s'han desenvolupat noves tècniques per a implementar la transformada ràpida de Fourier (FFT), molt utilitzada a la ciència moderna i a l'enginyeria.

Un cop es coneixen tots els dígits d'un cert nombre real x, és natural preguntar-se quines són les fraccions que millor l'aproximen, en el sentit de buscar fraccions amb denominadors el més petits possible. Una resposta a aquest problema ens la dóna la teoria de les fraccions contínues, vegeu [23, 34]. Es construeix una successió de fraccions de la forma

$$a_0,\ a_0+\cfrac{1}{a_1},\ a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2}},\ a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}}},\ a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}}},\ a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4}}}},\ldots$$

amb $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{N}$ de manera que tendeixi a x.

Vegem com calcular els primers $a_0, a_1, a_2, \ldots$ quan $x = \pi$: a_0 és la part no decimal de π és a dir $a_0 = 3$; a_1 és la part no decimal de $\frac{1}{\pi - a_0} = \frac{1}{0.3159\ldots} = 7.06\ldots$, és a dir $a_1 = 7$; a_2 és la part no decimal de $\frac{1}{7.06\cdots-7} = 15.99\ldots$, $a_2 = 15$; a_3 és la part no decimal de $\frac{1}{15.99\cdots-15} = 1.00\ldots$, $a_3 = 1$; i així successivament. Per tant, la successió de fraccions contínues que tendeixen a π és

$$3,\ 3+\cfrac{1}{7},\ 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}},\ 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}},\ 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292}}}},\ 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1}}}}},\ldots$$

Operant resulta

$$3,\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \frac{104348}{33215},\ldots \tag{4}$$

Observem que aquesta successió conté les aproximacions racionals d'Arquimedes, Txu Txung Txih, i Euler, que acaben de sortir, a més d'altres aproximacions racionals de π força bones. En particular, la quarta és especialment fàcil de recordar un cop s'escriu com $(113/355)^{-1}$. Ara bé, també hi ha fraccions que aproximen molt bé a π i no són a la successió obtinguda. Per exemple a [16] es dóna l'aproximació $\frac{311}{99} = \underline{3.141}414\ldots$

2 Càlcul de primitives de funcions racionals

Les integrals que considerarem en aquest treball seran

$$\int_0^1 \frac{p(x)}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x, \tag{5}$$

on p és un polinomi amb coeficients racionals i $0 < n \in \mathbb{N}$.

Per a calcular les integrals anteriors quan $n = 1$ tenim el lema següent.

Lema 1. *Per a tot polinomi $p(x)$, es compleix*

$$\int_0^1 \frac{p(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = u + v\,\pi + w\ln(2),$$

on $u = Q(1) - Q(0)$ i $Q(x)$ és una primitiva del quocient de la divisió de polinomis entre $p(x)$ i $1+x^2$, $v = (p(\mathrm{i}) + p(-\mathrm{i}))/8$, $w = \mathrm{i}\,(p(-\mathrm{i}) - p(\mathrm{i}))/4$. A més, si $p(x)$ té coeficients racionals, $u, v, w \in \mathbb{Q}$.

Prova. Fent la divisió dels polinomis $p(x) = (x^2+1)\,q(x) + A + B\,x$, per $A, B \in \mathbb{R}$ i $q(x)$ un nou polinomi. Aleshores

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{p(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 q(x)\,\mathrm{d}x + A\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + B\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= Q(1) - Q(0) + \frac{A}{4}\,\pi + \frac{B}{2}\,\ln(2),\end{aligned}$$

on $Q'(x) = q(x)$. Usant que $p(\pm\mathrm{i}) = A \pm B\,\mathrm{i}$, obtenim els valors d'$A$ i B. □

Així, per exemple, si apliquem el lema per a $p(x) = x^4\,(1-x)^4$ obtenim que com

$$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2}, \tag{6}$$

$$u = \left(\frac{x^7}{7} - \frac{2x^6}{3} + x^5 - \frac{4x^3}{3} + 4x\right)\Big|_0^1, \quad v = -1 \quad \mathrm{i} \quad w = 0.$$

Per tant,

$$\int_0^1 \frac{x^4\,(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 - \pi = \frac{22}{7} - \pi.$$

De fet, a [3, 30] ja s'usa aquesta idea per a provar que

$$\int_0^1 \frac{x^m\,(1-x)^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = u_{m,n} + v_{m,n}\,\pi + w_{m,n}\,\ln(2),$$

demostrant que si $2\,m - n \equiv 0 \pmod 4$ aleshores $w_{m,n} = 0$. També s'utilitzen aquestes integrals per a diferents valors de n i m per aproximar π. Lucas a [26] ho va estendre a integrals de la forma

$$\int_0^1 \frac{x^m\,(1-x)^n\,(a + b\,x + c\,x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

per a trobar relacions com (3).


M. V. Ostrogradski

Per tal de calcular les integrals (5) quan $n \geq 2$, recordem en primer lloc el conegut com a *mètode d'Ostrogradski* (degut al matemàtic ucraïnès M. V. Ostrogradski, 1801-1862) per a calcular primitives de funcions racionals en les què el denominador té arrels múltiples.

Considerem un quocient de polinomis $p(x)/q(x)$ en el què $p(x)$ té grau menor que $q(x)$. És un resultat ben conegut que si considerem el màxim comú divisor de $q(x)$ i $q'(x)$, $q_1(x) = \text{mcd}(q(x), q'(x))$ aleshores $q_2(x) = q(x)/q_1(x)$ té totes les arrels de $q(x)$ i, a més, totes elles són simples. Aleshores el mètode d'Ostrogradski ([33]) ens diu que

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \int \frac{p_2(x)}{q_2(x)}\,\mathrm{d}x, \tag{8}$$

on $p_i(x)$ son polinomis de grau menor que $q_i(x), i = 1, 2$, que es poden calcular derivant la igualtat anterior i aplicant el mètode dels coeficients indeterminats. Com a conseqüència, en el cas de funcions racionals, ens permet reduir el càlcul de primitives al cas en que els denominadors no tinguin arrels múltiples.

En particular obtenim l'extensió següent del Lema 1.

Lema 2. *Per a tot $0 < n \in \mathbb{N}$ i tot polinomi $p(x)$, es compleix*

$$\int_0^1 \frac{p(x)}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = u_n + v_n\,\pi + w_n\,\ln(2),$$

on u_n, v_n i w_n es poden calcular a partir del mètode d'Ostrogradski i el Lema 1. A més, si $p(x)$ té coeficients racionals, $u_n, v_n, w_n \in \mathbb{Q}$.

Nosaltres usarem els casos particulars següents:

Lema 3. *Per a tot $0 < n \in \mathbb{N}$ i $a \in \mathbb{R}$:*

$$\int_0^1 \frac{x^n\,(1-x)^n\,(a+x)}{(1+x^2)^{n+2}}\,\mathrm{d}x = u(a) + v(a)\,\pi, \tag{9}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}\,(a+x^2)}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = z(a) + t(a)\,\pi. \tag{10}$$

A més, si $a \in \mathbb{Q}$, aleshores $u(a), v(a), z(a), t(a) \in \mathbb{Q}$.

Prova. Demostrem per exemple (9). La igualtat (10) es prova de manera similar. Pel Lema 2, és suficient demostrar que $w_{n+2}=0$.

Usant el mètode d'Ostrogradski tenim que

$$\int \frac{x^n\,(1-x)^n\,(a+x)}{(1+x^2)^{n+2}}\,\mathrm{d}x = \frac{s(x)}{(1+x^2)^{n+1}} + \int \frac{A+B\,x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

per un cert polinomi $s(x)$ de grau com a molt $2\,n+1$. Derivant respecte a x,

$$\frac{x^n\,(1-x)^n\,(a+x)}{(1+x^2)^{n+2}} = \frac{(1+x^2)\,s'(x)-2\,(n+1)\,x\,s(x)}{(1+x^2)^{n+2}} + \frac{A+B\,x}{1+x^2}.$$

Eliminant els denominadors obtenim

$$x^n\,(1-x)^n\,(a+x) = \left(1+x^2\right)s'(x)-2(n+1)\,x\,s(x)+(A+B\,x)\left(1+x^2\right)^{n+1}.$$

Si mirem els coeficients que acompanyen a $x^{2\,n+3}$ en l'equació anterior arribem a que $B=0$, tal i com volíem demostrar. $\square$

Anem a detallar els càlculs per a un cas concret de (9), $a=1$ i $n=6$. L'aplicació del mètode d'Ostrogradski ens diu que

$$\int \frac{x^6\,(1-x)^6\,(1+x)}{(1+x^2)^8}\,\mathrm{d}x = \frac{s(x)}{(1+x^2)^7} - \frac{5}{64}\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

on

$$\begin{aligned} s(x) = -\frac{23}{168} + \frac{5}{64}\,x - \frac{23}{24}\,x^2 + \frac{25}{48}\,x^3 - \frac{23}{8}\,x^4 + \frac{283}{192}\,x^5 - \frac{115}{24}\,x^6 + \frac{17}{7}\,x^7 \\ - \frac{65}{12}\,x^8 + \frac{613}{192}\,x^9 - \frac{15}{4}\,x^{10} + \frac{55}{48}\,x^{11} - \frac{1}{2}\,x^{12} - \frac{5}{64}\,x^{13}. \end{aligned}$$

Per tant

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^6\,(1-x)^6\,(1+x)}{(1+x^2)^8}\,\mathrm{d}x &= \frac{s(1)}{2^7} - s(0) - \frac{5}{64}\,\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{55}{896} - \frac{5}{256}\,\pi = -\frac{5}{256}\left(\pi - \frac{22}{7}\right). \end{aligned}$$

Donem a continuació quatre integrals més, molt similars a la que acabem de calcular, que ens permeten veure que π no és igual a cap de les seves aproximacions racionals donades a (4). De fet, fent acotacions similars a les usades a (2), també podríem obtenir estimacions dels errors amb els que aproximen a π.

$$\int_0^1 \frac{x^7(1-x)^7\left(\frac{203}{373}+x\right)}{(1+x^2)^9}\,\mathrm{d}x = \frac{1855}{47744}\Big(\pi - \frac{333}{106}\Big),$$
$$\int_0^1 \frac{x^{10}(1-x)^{10}\left(\frac{325}{973}+x\right)}{(1+x^2)^{12}}\,\mathrm{d}x = -\frac{5085}{71168}\Big(\pi - \frac{355}{113}\Big),$$
$$\int_0^1 \frac{x^{14}(1-x)^{14}\left(\frac{37905}{2077}+x\right)}{(1+x^2)^{16}}\,\mathrm{d}x = \frac{5522517}{4253696}\Big(\pi - \frac{103993}{33102}\Big),$$
$$\int_0^1 \frac{x^{14}(1-x)^{14}\left(\frac{63}{115}+x\right)}{(1+x^2)^{16}}\,\mathrm{d}x = -\frac{219219}{1884160}\Big(\pi - \frac{104348}{33215}\Big).$$

Usant el mateix tipus de càlculs podem provar que $3.14159 < \pi < 3.14160$ ja que

$$\int_0^1 \frac{x^9(1-x)^9\left(\frac{60309}{98389}+x\right)}{(1+x^2)^{11}}\,\mathrm{d}x = \frac{39375}{787112}(\pi - 3.14159),$$
$$\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8\left(\frac{268}{1199}+x\right)}{(1+x^2)^{10}}\,\mathrm{d}x = -\frac{4375}{76736}(\pi - 3.14160).$$

Aquestes desigualtats es demostren a [26] usant integrals de la forma (7). El mateix tipus de resultats es poden obtenir amb expressions de la forma (10). Per exemple,

$$0 > \int_0^1 \frac{x^8(x^2-1)}{(1+x^2)^4}\,\mathrm{d}x = \frac{35}{16}\Big(\pi - \frac{22}{7}\Big),$$
$$0 < \int_0^1 \frac{x^{16}\left(x^2+\frac{213}{2831}\right)}{(1+x^2)^8}\,\mathrm{d}x = \frac{795795}{181184}\Big(\pi - \frac{333}{106}\Big).$$

3 Alguns algoritmes per a calcular π

L'objectiu d'aquesta secció és presentar diversos algoritmes per a calcular π. Com ja hem dit, el primer bloc d'algoritmes es basa en la integració de funcionals racionals. A [19] es mostra un procediment sistemàtic per a construir-ne més, sempre basant-se en la idea amb la que construïm els dos primers. El segon bloc conté quatre algoritmes més, considerats avui en dia clàssics i ja recollits a [18, 27]. Cada un és millor que l'anterior, en el sentit que amb menys operacions s'obtenen més decimals correctes. En podeu trobar d'altres als llibres [1, 4, 16, 17, 27, 28, 37] o als treballs [5, 7, 9, 11, 21, 22, 24, 32]. En particular, l'interessant llibre [4] conté la republicació de 25 articles recents sobre el número π, entre els que es troben les referències [6, 7, 9, 10, 26].

3.1 Algoritmes basats en el càlcul de primitives de funcions racionals

Algoritme 1

Aquest primer algoritme, tot i que no és gaire ràpid, és fàcil de deduir. Està inspirat en altres algoritmes similars, més complicats però més ràpids, desenvolupats a [14, 26, 30]. En veurem un d'aquests a la secció següent.

La fracció que apareix a la primera fórmula de (1) es pot escriure com

$$\frac{(3\,x^2-1)^2}{1+x^2} = 9\,x^2 - 15 + \frac{16}{1+x^2},$$

o, equivalentment,

$$\frac{16-(3\,x^2-1)^2}{1+x^2} = 15 - 9\,x^2.$$

Per tant, per $0 \le x \le 1$,

$$\frac{4}{1+x^2} = \frac{15-9\,x^2}{4-\frac{(3\,x^2-1)^2}{4}} = \frac{\frac{15-9\,x^2}{4}}{1-\left(\frac{3\,x^2-1}{4}\right)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{15-9\,x^2}{4}\left(\frac{3\,x^2-1}{4}\right)^{2\,k},$$

ja que $|(3x^2-1)/4| \le 1/2$, i podem usar que per $|u|<1$, $1/(1-u) = \sum\limits_{k\ge 0} u^k$. A més, com que la convergència és uniforme,

$$\begin{aligned}\pi &= \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{15-9\,x^2}{4}\left(\frac{3\,x^2-1}{4}\right)^{2\,k}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{(15-9\,x^2)\,(3\,x^2-1)^{2\,k}}{4^{2\,k+1}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Per tant, si definim

$$J_n := \int_0^1 \frac{(15-9\,x^2)\,(3\,x^2-1)^{n}}{4^{n+1}}\,\mathrm{d}x, \qquad \pi = \sum_{k=0}^{\infty} J_{2\,k}.$$

Veurem més endavant que

$$J_n = I_n - I_{n+1}, \quad \text{on} \quad I_n = 3\int_0^1 \left(\frac{3\,x^2-1}{4}\right)^n \mathrm{d}x, \tag{11}$$

i

$$I_n = \frac{3}{2^n\,(2\,n+1)} - \frac{n}{2\,(2\,n+1)} I_{n-1}, \quad I_0 = 3. \tag{12}$$

Com a conseqüència de les expressions anteriors

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} J_{2\,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \bigl(I_{2\,k} - I_{2\,k+1}\bigr) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_n,$$

on I_n ve donat de manera recurrent per (12). En particular,

$$\pi = 3 - 0 + \frac{3}{20} - \frac{3}{140} + \frac{9}{560} - \frac{3}{616} + \frac{159}{64064} - \cdots.$$

L'algorisme associat consisteix en prendre com aproximacions de π les sumes parcials n-èssimes de la sèrie alternada anterior, que van encaixant a π. Així, si definim $s_m = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n I_n$,, tenim que $s_0 = s_1 = \underline{3}$, $s_2 = \frac{63}{20} = \underline{3.1}5$, $s_3 = \frac{219}{70} = \underline{3.1}2\ldots$, $s_4 = \frac{1761}{560} = \underline{3.14}4\ldots$ Si continuem, $s_{10} = \underline{3.141}6\ldots$, $s_{20} = \underline{3.1415926}6\ldots$, $s_{30} = \underline{3.1415926535}9\ldots$. Una idea de la velocitat amb la que aquesta successió aproxima π ens la dóna la desigualtat següent

$$I_n \le 3\int_0^1 \left|\frac{3x^2-1}{4}\right|^n \mathrm{d}x \le 3\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{d}x = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Demostrem per acabar (11) i (12). La primera d'aquestes fórmules és deguda a que

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^1 \frac{(15-9\,x^2)\,(3\,x^2-1)^n}{4^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{3\bigl(4-(3\,x^2-1)\bigr)\,(3\,x^2-1)^n}{4^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\frac{3\,(3\,x^2-1)^n}{4^n} - \frac{3\,(3\,x^2-1)^{n+1}}{4^{n+1}}\right) \mathrm{d}x = I_n - I_{n+1}. \end{aligned}$$

Per a demostrar la segona, comencem integrant per parts,

$$\begin{aligned} I_n &= 3\int_0^1 \left(\frac{3\,x^2-1}{4}\right)^n \mathrm{d}x \\ &= 3\,x\left(\frac{3\,x^2-1}{4}\right)^n\Bigg|_0^1 - \frac{18\,n}{4}\int_0^1 x^2\left(\frac{3\,x^2-1}{4}\right)^{n-1} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

És a dir,

$$I_n = \frac{3}{2^n} - 6\,n\,K_n, \text{ on } K_n = \frac{3}{4}\int_0^1 x^2 \left(\frac{3\,x^2-1}{4}\right)^{n-1} \mathrm{d}x.$$

Per altra banda

$$\begin{aligned} I_n &= 3\int_0^1 \left(\frac{3\,x^2-1}{4}\right)^{n} \mathrm{d}x \\ &= 3\int_0^1 \frac{3\,x^2-1}{4}\left(\frac{3x^2-1}{4}\right)^{n-1} \mathrm{d}x = 3K_n - \frac{1}{3}I_{n-1}. \end{aligned}$$

Eliminant K_n de les dues relacions obtingudes obtenim que

$$(2\,n+1)I_n = \frac{3}{2^n} - \frac{n}{2}I_{n-1},$$

i per tant la recurrència (12) queda provada.

Algoritme 2

Com ja hem comentat, seguint les mateixes idees que per a deduir l'Algoritme 1, se n'han trobat de millors. Això succeeix, per exemple, si prenem com a inici la funció racional de la igualtat dreta de (1), en lloc de començar per la de l'esquerra com en l'Algoritme 1, vegeu [14, 26, 30]. Així, a partir de (6) tenim que

$$\frac{4+x^4\,(1-x)^4}{1+x^2} = x^6 - 4\,x^5 + 5\,x^4 - 4\,x^2 + 4 =: r(x),$$

o equivalentment, per $0 \le x \le 1$,

$$\frac{4}{1+x^2} = \frac{r(x)}{1+\frac{x^4(1-x)^4}{4}} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k r(x)\left(\frac{x^4\,(1-x)^4}{4}\right)^k,$$

ja que $0 \le x(1-x)/2 \le 1/8$ i per $|u|<1$, $1/(1+u) = \sum_{k\ge 0}(-u)^k$. Integrant entre $x=0$ i $x=1$ obtenim

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^k T_k \quad \text{on} \quad T_k = \int_0^1 r(x)\,x^{4\,k}\,(1-x)^{4\,k}\,\mathrm{d}x. \tag{13}$$

És ben conegut que per a tot m i n enter positius,

$$\int_0^1 x^m\,(1-x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!},$$

resultat que es pot provar sense massa dificultats usant inducció i integració per parts. Així,

$$\begin{aligned} T_k &= (4k)!\left(\frac{(4k+6)!}{(8k+7)!} - 4\frac{(4k+5)!}{(8k+6)!} + 5\frac{(4k+4)!}{(8k+7)!} - 4\frac{(4k+2)!}{(8k+3)!} + 4\frac{(4k)!}{(8k+1)!}\right) \\ &= \frac{16(4k)!(4k+3)!}{(8k+7)!}(820\,k^3 + 1533\,k^2 + 902\,k + 165), \end{aligned}$$

on s'arriba a aquesta segona igualtat després d'un quants càlculs. Així,

$$\pi = \frac{22}{7} - \frac{19}{15015} + \frac{543}{594914320} - \frac{77}{104187267600} + \cdots$$

i si definim $t_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{-1}{4}\right)^k T_k$ tenim que $t_0 = \frac{22}{7} = \underline{3.142}\ldots$, $t_1 = \frac{47171}{15015} = \underline{3.141591}\ldots$, $t_2 = \underline{3.141592654}\ldots$, $|t_{10} - \pi| < 4 \times 10^{-34}$. Clarament, aquest algoritme és molt més ràpid que l'anterior. De fet, es veu als treballs esmentats que essencialment a cada pas proporciona 3 xifres decimals correctes noves.

Una relació famosa que recorda a (13) donada, sense demostració, pel famós matemàtic indi Srinivasa Ramanujan (1887-1920) als voltants de 1919 és

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390\,k)}{(k!)^4\, 396^{4\,k}}.$$

Consulteu [6, 9] per a tenir més informació sobre aquesta i altres fórmules semblants. L'algoritme associat que consisteix a prendre u_n com l'invers de la suma parcial n-èssima és extraordinàriament ràpid. Per exemple, $u_0 = \frac{9801}{4412}\sqrt{2} = \underline{3.1415927}\ldots$, $|u_1 - \pi| < 7 \times 10^{-16}, \ldots$ i $|u_6 - \pi| < 5 \times 10^{-56}$.

Pel que sembla Ramanujan també gaudia trobant aproximacions no racionals de π com la donada per u_0. Algunes d'aquestes són

$$\frac{9}{5} + \sqrt{\frac{9}{5}} = \underline{3.1416}\ldots, \qquad \sqrt[4]{102 - \frac{2222}{22^2}} = \sqrt[4]{\frac{2143}{22}} = \underline{3.141592652}\ldots.$$

La igualtat de Ramanujan ens proporciona una de las millors sèries hipergeomètriques per a aproximar π i un algoritme molt més eficient que l'Algoritme 2. De fet, aquesta sèrie és superada per la donada pels germans Chudnovsky [6, 13],

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)!\,(13591409 + 545140134\,k)}{(k!)^3\,(3k)!\,640320^{3\,k+3/2}},$$

en la que se basa un altre algoritme molt eficient per a calcular π. Per aquest, els primers inversos de les sumes parcials w_n, són: $w_0 = \frac{53360}{13591409}\sqrt{640320}$, amb $|w_0 - \pi| < 6 \times 10^{-14}$, $|w_1 - \pi| < 4 \times 10^{-28}, \ldots$ i $|w_6 - \pi| < 3 \times 10^{-99}$.

Algoritme 3: la fórmula de Bailey, Borwein, i Plouffe

L'any 1997, Bailey, P. Borwein i Plouffe ([1, 5, 16, 17]) van demostrar la fórmula següent

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\Big(\frac{4}{8\,n+1} - \frac{2}{8\,n+4} - \frac{1}{8\,n+5} - \frac{1}{8\,n+6}\Big). \tag{14}$$

Clarament aquesta fórmula ens proporciona un nou algoritme basat en calcular les seves sumes parcials n-èssimes, v_n. Així,

$$\pi = \frac{47}{15} + \frac{53}{6552} + \frac{829}{5026560} + \frac{79}{15590400} + \cdots,$$

i $v_0 = \frac{47}{15} = \underline{3.1}3\ldots$, $v_1 = \underline{3.141}4\ldots$, $v_2 = \underline{3.1415}8\ldots$, $v_4 = \underline{3.141592}4\ldots$, $|v_{10} - \pi| < 2 \times 10^{-16}$. Aquest algoritme és una mica pitjor que l'anterior, però té un gran avantatge: es pot demostrar que el 16^{-n} que apareix permet calcular dígits de π, en base 16 o en base 2, sense necessitat de conèixer els dígits anteriors. Com ja comenten els autors del treball, malauradament no es coneix cap fórmula semblant, però amb un 10^{-n}, que permetria calcular dígits isolats de π en base 10. Aquest tipus de fórmula si que hi és per a altres números. Per exemple, com que per $|u| < 1$, $-\log(1-u) = \sum\limits_{n\geq 1} u^n/n$, substituint amb $u = \frac{1}{10}$ tenim

$$\log\Big(\frac{10}{9}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}\,\frac{1}{n}.$$

Anem a veure la prova de (14), que de nou es basa en la integració de funcions racionals. Observem en primer lloc que per a tot $m < 8$,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^{m-1}}{1-x^8}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} x^{m-1+8\,n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{m-1+8\,n}\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{m+8\,n}}{m+8\,n}\bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\big(\sqrt{2}\,\big)^m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n\,(8\,n+m)},\end{aligned}$$

on hem usat de nou que per $|u| < 1$, $1/(1-u) = \sum\limits_{k\geq 0} u^k$. Per tant

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\Big(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8\,n+4} - \frac{1}{8\,n+5} - \frac{1}{8\,n+6}\Big)$$
$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{4\sqrt{2} - 8\,x^3 - 4\sqrt{2}\,x^4 - 8\,x^5}{1-x^8}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{16(y-1)}{(y^2-2)(y^2-2\,y+2)}\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^1 \frac{4\,y}{y^2-2}\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \frac{4\,y-8}{y^2-2\,y+2}\,\mathrm{d}y = -2\log(2) - (-2\log(2) - \pi) = \pi.$$

Observi's que s'ha usat el canvi de variable $y = \sqrt{2}\,x$ i que

$$\left.\frac{4\sqrt{2} - 8\,x^3 - 4\sqrt{2}\,x^4 - 8\,x^5}{1-x^8}\right|_{x=y/\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}\,(y^5+y^4-2\,y^3-4)}{y^8-16}$$
$$= \frac{16\sqrt{2}(y-1)(y^2+2)(y^2+2\,y+2)}{(y^2-2)(y^2+2)(y^2+2\,y+2)(y^2-2\,y+2)} = \frac{16\sqrt{2}\,(y-1)}{(y^2-2)(y^2-2\,y+2)}.$$

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494
45923078164062862089986280348253421170679821480865132823066470
93844609550582231725359408128481117450284102701938521105559644
6229489549303819644288109756659334461284756482337867831652712
019091456485669234603486104543266482133936072602491412737245
870066063155881748815209209628292540917153643678925903600113
305305488204665213841469519415116094330572703657595919530921
861173819326117931051185480744623799627495673518857527248912
279381830119491298336733624406566430860213949463952247371907
021798609437027705392171762931767523846748184676694051320005
681271452635608277857713427577896091736371787214684409012249
534301465495853710507922796892589235420199561121290219608640
344181598136297747713099605187072113499999983729780499510597
317328160963185950244594553469083026425223082533446850352619
311881710100031378387528865875332083814206171776691473035982
534904287554687311595628638823537875937519577818577805321712
268066130019278766111959092164201989...

Mil xifres decimals de π.

3.2 Algoritmes clàssics

Part d'aquesta secció s'ha extret de [18] i està inspirada en [27].

Algoritme 4: l'aproximació d'Arquimedes

El mètode ideat per Arquimedes consisteix a aproximar π pels perímetres dels polígons regulars de $6 \cdot 2^n$ costats, circumscrits i inscrits a una circumferència de diàmetre 1, que denotarem per q_n i p_n, respectivament. Aleshores, $p_n < \pi < q_n$ i $\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} p_n = \pi$.

Començarem calculant p_n. El perímetre de l'hexàgon inscrit és $p_0 = 3$. Si anomenen x el costat d'un polígon regular, volem saber quin serà el costat y del polígon regular que té el doble de costats. Per a calcular y en funció de x usarem la Figura 1.

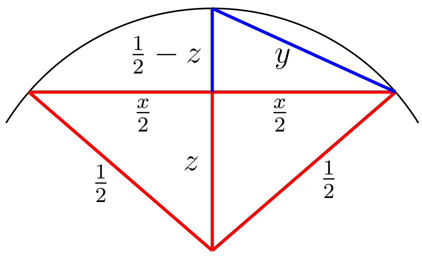


Figura 1: Càlcul dels costats del polígon

L'aplicació del teorema de Pitàgores dos cops ens diu que

$$\frac{x^2}{4} + z^2 = \frac{1}{4}, \qquad \frac{x^2}{4} + \left(\frac{1}{2} - z\right)^2 = y^2.$$

Operant a la segona fórmula, $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} + z^2 - z = y^2$, i usant la primera, $\frac{1}{2} - z = y^2$. Com que $z = \sqrt{\frac{1-x^2}{4}}$, concloem que $y = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-x^2}\,\right)}$.

Per tant, si anomenem ℓ_n el costat del polígon amb $6 \cdot 2^n$ costats, tenim que $\ell_0 = \frac{1}{2}$, $p_0 = 3$, i

$$\ell_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \ell_n^2}\right)}, \quad p_{n+1} = 6 \cdot 2^{n+1} \cdot \ell_{n+1},$$

i $\lim_{n\to\infty} p_n = \pi$.

El càlcul efectiu de ℓ_{n+1} a partir de ℓ_n produeix errors de càlcul, ja que en fer l'operació $\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \ell_n^2}\right)}$, amb ℓ_n cada cop més petit, s'han de restar nombres molt propers. Per tant, és convenient desracionalitzar l'última expressió usant la igualtat:

$$\left(1-\sqrt{1-\ell_n^2}\right)\frac{1+\sqrt{1-\ell_n^2}}{1+\sqrt{1-\ell_n^2}}=\frac{\ell_n^2}{1+\sqrt{1-\ell_n^2}}.$$

L'algoritme final és

$$\ell_0=\frac{1}{2}, \qquad p_0=3,$$
$$\ell_{n+1}=\frac{\ell_n}{\sqrt{2\left(1+\sqrt{1-\ell_n^2}\right)}}, \qquad p_{n+1}=6\cdot 2^{n+1}\cdot \ell_{n+1}.$$

Tenim que $p_0=\underline{3}$, $p_1=\underline{3.1}0\ldots$, $p_2=\underline{3.1}30\ldots$, $p_3=\underline{3.1}39\ldots$, $p_4=\underline{3.141}0\ldots$, $p_{15}=\underline{3.1415926534},\ldots$

Hi ha una expressió diferent pels càlculs d'Arquimedes, veure [17, Chp. 1] pels detalls, que calcula simultanément q_n i p_n. Es verifica que

$$q_{n+1}=\frac{2\,q_n\,p_n}{q_n+p_n}, \quad p_{n+1}=\sqrt{q_{n+1}\,p_n}\,, \qquad q_0=2\sqrt{3}\,, \quad p_0=3.$$

A més, $q_{n+1}-p_{n+1}<(q_n-p_n)/3$. Per exemple, prenent el polígon amb 96 costats ($n=4$) obtenim $p_4=\underline{3.141}0\ldots=p_4<\pi<q_4=\underline{3.14}27\ldots$ i recuperem les fites clàssiques d'Arquimedes

$$3+\frac{10}{71}<p_4<\pi<q_4<3+\frac{10}{70}.$$

Algoritme 5: la fórmula dels trapezis

Una de les fórmules més conegudes per aproximar l'àrea sota una funció $f(x)$ és l'anomenada fórmula dels trapezis composta ([36]). S'obté considerant que

$$\int_a^b f(x)\,dx=T(f,h)-\frac{b-a}{12}h^2f''(s_n),$$

on $s_n\in(a,b)$ és un valor desconegut, i per a cada $n\in\mathbb{N}$, es pren $h=\frac{b-a}{n}$, i es calcula

$$T(f,h)=h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{j=1}^{n-1}f(a+jh)\right).$$

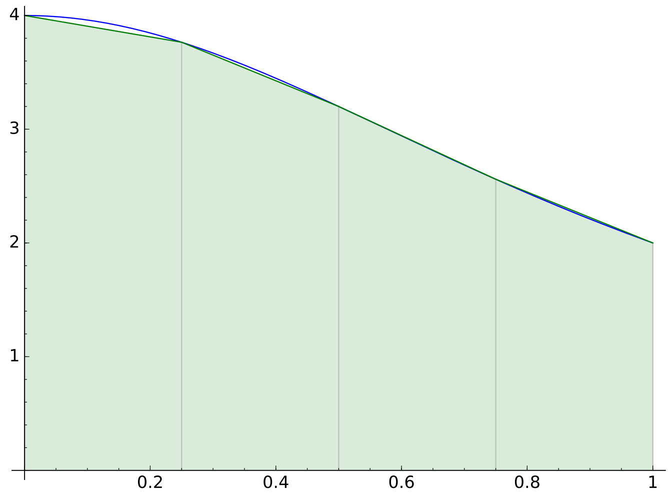


Figura 2: Fórmula dels trapezis per a $n = 4$.

El seu nom està justificat pel fet que el terme $T(f, h)$ correspon a la suma de les àrees de n trapezis que aproximen l'àrea sota el gràfic de la funció. Vegeu per exemple la Figura 2, que correspon a $n = 4$. A més,

$$\lim_{n\to\infty} T\left(f, \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Així, si prenem $[a, b] = [0, 1]$, $f(x) = 4/(1 + x^2)$, i $t_n \doteq T\left(\frac{4}{1+x^2}, \frac{1}{n}\right)$ obtindrem la igualtat

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{4n}{n^2+j^2}\right).$$

Les aproximacions aconseguides així no són gaire bones: $t_1 = 3, t_2 = \frac{31}{10}$, $t_3 = \frac{203}{65} = \underline{3.1}23\ldots, \ldots, t_{10} = \underline{3.1}399\ldots, \ldots, t_{100} = \underline{3.1415}759\ldots$ Això es degut a que tal que com diu la fórmula de l'error, $\pi - t_n$ és de l'ordre de $1/n^2$. De fet,

$$|\pi - t_{10}| < 2 \times 10^{-3}, \quad |\pi - t_{100}| < 2 \times 10^{-5}, \quad |\pi - t_{1000}| < 2 \times 10^{-7}.$$

Hi ha un refinament de la fórmula dels trapezis composta, conegut com fórmula d'Euler-Maclaurin, vegeu [2, 36], que permet obtenir a partir de modificacions dels valors t_n successions que tendeixen molt més ràpid cap a π. En concret, la fórmula d'Euler-Maclaurin ens diu que

$$\pi = t_n + \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{504\,n^6} + \frac{1}{1056\,n^{10}} - \frac{1}{384\,n^{14}} + \frac{43867}{1838592\,n^{18}} - \frac{77683}{141312\,n^{22}} + \cdots, \tag{15}$$

on els coeficients de la sèrie asimptòtica es calculen a partir dels números de Bernoulli i les derivades de f al 0 i a l'1. Si prenem, per exemple, la successió $u_n = t_n + \frac{1}{6n^2}$, obtenim que $|\pi - u_{10}| < 2 \times 10^{-9}$ i si anomenem v_n a tota l'expressió de la part dreta de (15), sense els punts suspensius, $|\pi - v_{10}| < 3 \times 10^{-25}$.

Una segona millora, també a partir de (15), és el conegut com a mètode de Romberg que està basat en el procediment anomenat *extrapolació de Richardson*, que accelera successions similars a (15). Veiem com: se sap que

$$\pi = t_n + \frac{1}{6\,n^2} + O\left(\frac{1}{n^6}\right) \text{ i, com a conseqüencia, } \pi = t_{2n} + \frac{1}{24\,n^2} + O\left(\frac{1}{n^6}\right),$$

per tant, multiplicant per 4 la segona equació, restant-li la primera, i dividint per 3, s'obté

$$\pi = \frac{4t_{2n} - t_n}{3} + O\left(\frac{1}{n^6}\right),$$

aproximació molt millor de π que la donada per t_n. Així,

$$\pi = t_n^{(2)} + \frac{c_6}{n^6} + \cdots, \quad \text{on} \quad t_n^{(2)} \doteq \frac{2^2 t_{2n} - t_n}{2^2 - 1},$$

per a una certa constant $c_6 \in \mathbb{R}$. Aquesta nova successió $t_n^{(2)}$, correspon a la primera acceleració de Romberg. Raonant de manera semblant es van obtenint les igualtats

$$\pi = t_n^{(3)} + \frac{c_{10}}{n^{10}} + \cdots, \quad \text{on} \quad t_n^{(3)} \doteq \frac{2^6 t_{2n}^{(2)} - t_n^{(2)}}{2^6 - 1},$$
$$\pi = t_n^{(4)} + \frac{c_{14}}{n^{14}} + \cdots, \quad \text{on} \quad t_n^{(4)} \doteq \frac{2^{10} t_{2n}^{(3)} - t_n^{(3)}}{2^{10} - 1},$$

i aquest procés es pot repetir indefinidament. Per exemple, si comencem calculant t_8, t_{16}, t_{32} i t_{64} tindrem

$$|\pi - t_8| < 3 \times 10^{-3}, \quad \ldots, \quad |\pi - t_{64}| < 5 \times 10^{-5}. \tag{16}$$

A partir d'aquests valors,

$$|\pi - t_8^{(2)}| < 3 \times 10^{-9}, \quad \ldots, \quad |\pi - t_{32}^{(2)}| < 6 \times 10^{-13},$$

i de manera similar,

$$|\pi - t_8^{(3)}| < 5 \times 10^{-15}, \quad |\pi - t_{16}^{(3)}| < 5 \times 10^{-18},$$

i, finalment, $|\pi - t_8^{(4)}| < 3 \times 10^{-21}$. No deixà de ser sorprenent com, a partir de les aproximacions (16) de π, les quals només donen correctament les seves primeres quatre xifres decimals, s'obté una nova aproximació que en té 20 de correctes.

Algoritme 6: la funció arctangent

La segona via que descrivim en aquesta secció per a calcular π es basa en la fórmula de Taylor per a la funció arctangent

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2\,k+1} x^{2\,k+1},$$

i en certes relacions trigonomètriques. Un primer intent seria a partir de la igualtat per $x = 1$,

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2\,k+1}.$$

Ara bé, si denotem per

$$\arctan_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2\,k+1} x^{2\,k+1},$$

la sèrie truncada, i considerem la successió de números

$$x_n = \arctan_n(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2\,n+1},$$

després d'uns quants càlculs veiem que la successió x_n convergeix cap a $\pi/4$ més lentament que la que ens dóna el mètode proposat per Arquimedes. Per sort hi ha d'altres relacions entre π i la funció arctangent. Per exemple, tenim la fórmula $\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$. Una demostració gràfica d'aquesta darrera fórmula es pot deduir observant la Figura 3, on s'han marcat els angles rectes.

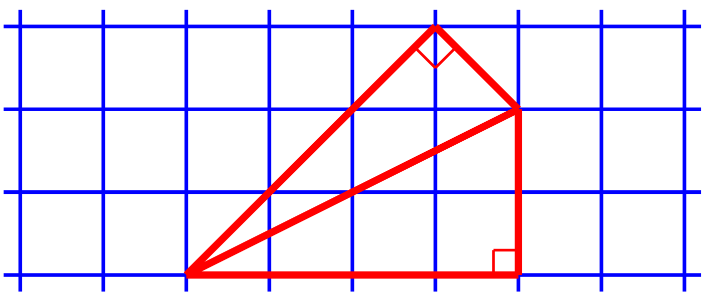


Figura 3: Suma d'arctangents

Donarem un algoritme de càlcul de π basat en una fórmula similar

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right),$$

deduïda (i usada per a calcular cents de decimals de π) per John Machin (1680-1752).

La demostració d'aquesta darrera fórmula es pot fer aplicant diverses vegades la fórmula de la tangent de la suma d'angles:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

Així,

$$\begin{aligned} \tan(2\arctan(x)) &= \frac{2\,x}{1-x^2}, \\ \tan(4\arctan(x)) &= \frac{\frac{4\,x}{1-x^2}}{1-\left(\frac{2\,x}{1-x^2}\right)^2} = \frac{4\,x\,(1-x^2)}{x^4 - 6\,x^2 + 1}, \end{aligned}$$

i, per tant, $\tan(4\arctan(1/5)) = 120/119$. Aleshores,

$$\tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)\right) = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119}\frac{1}{239}} = 1$$

i la fórmula de Machin queda demostrada.

Si considerem la successió

$$y_n = 16 \arctan_n\left(\frac{1}{5}\right) - 4\arctan_n\left(\frac{1}{239}\right),$$

s'obté $y_0 = \frac{3804}{1195} = \underline{3.18}\ldots$, $y_1 = \underline{3.140}\ldots$, $y_2 = \underline{3.1416}\ldots$, $y_3 = \underline{3.141591}\ldots$, $y_4 = \underline{3.14159268}\ldots$, $y_5 = \underline{3.141592652}\ldots$, $y_6 = \underline{3.1415926536}\ldots$

Algoritme 7: un mètode amb velocitat quadràtica

El 1973, i de manera independent, Salamin ([35]) i Brent ([12]) van trobar un mètode per a aproximar π amb gran velocitat. Aquest mètode és quadràtic ja que l'error en cada pas és aproximadament el quadrat de l'error comès en el pas anterior. Això fa que el nombre de xifres decimals exactes es dobli iteració per iteració. Així, per exemple, és tal que després de vint-i-cinc passos ens dóna uns 45 milions de xifres decimals exactes (suposant que tots els càlculs es fan amb aquest nombre de xifres decimals). Es basa en el càlcul iteratiu de la mitjana aritmètica-geomètrica, que ja apareix en els treballs de Gauss i Legendre del segle *XVIII*, complementat amb una implementació eficient dels algoritmes de multiplicar i fer arrels quadrades. La demostració de la seva convergència està basada en la teoria de les integrals el·líptiques, vegeu [8, 20, 32]. De fet, no és difícil demostrar que si prenem $a_0 > 0$ i $b_0 > 0$ i es construeixen les successions

$$a_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}, \qquad b_{k+1} = \sqrt{a_k\, b_k}\,,$$

aleshores $\lim\limits_{k\to\infty} a_k$ i $\lim\limits_{k\to\infty} b_k$ existeixen i coincideixen. A aquest valor comú se l'anomena mitjana aritmètica-geomètrica de a_0 i b_0 i en les fórmules següents el denotarem per $\mathrm{MAG}(a_0, b_0)$. La igualtat difícil de provar i remarcable és

$$\pi = \frac{4\,\mathrm{MAG}^2(1, 1/\sqrt{2}\,)}{1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{k+1}(a_k^2 - b_k^2)}.$$

Així, si es pren $a_0 = 1$ i $b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, l'algoritme de Brent-Salamin consisteix a calcular

$$z_n = \frac{(a_n + b_n)^2}{1 - \sum\limits_{k=1}^{n} 2^{k+1}(a_k^2 - b_k^2)},$$

on a_k i b_k s'obtenen a partir de la recurrència anterior. Observi's, que a part de truncar la sèrie, hem usat que per a n prou gran $\mathrm{MAG}(1, 1/\sqrt{2}\,) \approx a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$.

Tenim que $z_1 = \underline{3.14}0\ldots$, $z_2 = \underline{3.1415926}4\ldots$, $|z_3 - \pi| < 2 \times 10^{-19}$, $|z_4 - \pi| < 6 \times 10^{-41}$, $|z_5 - \pi| < 3 \times 10^{-84}$. Actualment es coneixen algoritmes de càlcul similars però molt més ràpids, vegeu per exemple [1, 9, 11, 16, 21, 22].

4 La irracionalitat de π

Reproduïm a continuació la demostració de que π no és racional deguda a Niven ([31]). Suposem, per tal d'arribar a contradicció, que $\pi = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Aleshores considerem el polinomi

$$f(x) = \frac{x^n\,(p - q\,x)^n}{n!} = \frac{F(x)}{n!} = \frac{\sum\limits_{j=n}^{2\,n} c_j\, x^j}{n!},$$

per un cert $n \in \mathbb{N}$ que fixarem més endavant i certs $c_j \in \mathbb{Z}$ que no cal especificar. També introduïm el polinomi

$$G(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^n f^{(2\,n)}(x). \tag{17}$$

Provem per començar les propietats següents:

P₁ : $\int_0^{\pi} f(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = G(0) + G(\pi)$,

P₂ : $G(0) + G(\pi) \in \mathbb{Z}$.

Prova de P₁ : Observem que $G''(x) + G(x) = f(x)$. Aleshores

$$\Big(G'(x)\sin(x) - G(x)\cos(x)\Big)' = G''(x)\sin(x) + G(x)\sin(x) = f(x)\sin(x),$$

i com a conseqüència,

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \Big(G'(x)\sin(x) - G(x)\cos(x)\Big)\Big|_0^{\pi} = G(0) + G(\pi),$$

tal i com volíem demostrar.

Prova de P₂ : Comencem veient que per a tot $j \in \mathbb{N}$, $f^{(j)}(0) \in \mathbb{Z}$ i $f^{(j)}(\pi) \in \mathbb{Z}$. És clar que per $j < n$ i $j > 2n$, $F^{(j)}(0) = f^{(j)}(0) = 0$. Per $n \le j \le 2n$, tenim que

$$f^{(j)}(0) = \frac{F^{(j)}(0)}{n!} = \frac{j!}{n!}c_j \in \mathbb{Z}.$$

Per simetria, és fàcil veure que $f(x) = f\big(\frac{p}{q} - x\big)$. Derivant successivament aquesta igualtat obtenim que $f^{(j)}(x) = (-1)^j f^{(j)}\big(\frac{p}{q} - x\big)$ i per tant

$$f^{(j)}(\pi) = f^{(j)}\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^j f^{(j)}(0) \in \mathbb{Z}.$$

Avaluant l'expressió (17) a $x = 0$ i a $x = \pi$, i utilitzant el que acabem de provar obtenim la propietat desitjada.

Usant les dues propietats tenim que

$$0 < I_n := \int_0^{\pi} f(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{Z}.$$

Demostrarem, per acabar, que per n prou gran I_n és menor que 1, obtenint la contradicció desitjada. Com que

$$0 < I_n = \int_0^{\pi} \frac{(x(p - q\,x))^n}{n!}\sin(x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^{\pi} \frac{1}{n!}\left(\frac{q^2}{4p}\right)^n \mathrm{d}x = \frac{\pi}{n!}\left(\frac{q^2}{4p}\right)^n,$$

el $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ i el resultat se segueix. □

Agraïments. L'autor està recolzat pel projecte MTM2016-77278-P FEDER i per la Generalitat de Catalunya, projecte 2017SGR1617.

Referències

[1] J. Arndt, C. Haenel, Pi−unleashed (traduït de la versió alemanya de 1998 per C. Lischka i D. Lischka). Second edition. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[2] T. M. Apostol, *An elementary view of Euler's summation formula.* Amer. Math. Monthly 106 (1999), 400–418.

[3] N. Backhouse, *Pancake functions and approximations to* π. Note 79.36, Math. Gazette 79 (1995), 371–374.

[4] D. H. Bailey, J. M. Borwein, Pi: the next generation. A sourcebook on the recent history of Pi and its computation. Springer, [Cham], 2016.

[5] D. H. Bailey, J. M. Borwein, P. B. Borwein, S. Plouffe, *The quest for pi.* Math. Intelligencer 19 (1997), 50–57.

[6] N. D. Baruah, B. C. Berndt, H. H. Chan, *Ramanujan's series for* $1/\pi$: *a survey.* Amer. Math. Monthly 116 (2009), 567–587.

[7] J. M. Borwein, *The life of Pi: from Archimedes to ENIAC and beyond.* Part III in: Surveys and studies in the ancient Greek and medieval Islamic mathematical sciences in honor of J. L. Berggren. Editat per Nathan Sidoli i Glen Van Brummelen. Springer, Heidelberg, 2014.

[8] J. M. Borwein, P. B. Borwein, Pi and the AGM. A study in analytic number theory and computational complexity. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1987.

[9] J. M. Borwein, P. B. Borwein, D. H. Bailey, *Ramanujan, modular equations, and approximations to pi, or How to compute one billion digits of pi.* Amer. Math. Monthly 96 (1989), 201–219.

[10] J. M. Borwein, S. T. Chapman, *I prefer Pi: a brief history and anthology of articles in the American Mathematical Monthly.* Amer. Math. Monthly 122 (2015), 195–216.

[11] J. M. Borwein, M. S. Macklem, *The (digital) life of Pi.* Austral. Math. Soc. Gaz. 33 (2006), 243–248.

[12] R. P. Brent, *Fast multiple-precision evaluation of elementary functions.* J. Assoc. Comput. Mach. 23 (1976), 242–251.

[13] D. V. Chudnovsky, G. V. Chudnovsky, *The computation of classical constants*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 86 (1989) 8178–8182.

[14] D. P. Dalzell, *On* 22/7. J. London Math. Soc. 19, (1944), 133–134.

[15] D. P. Dalzell, *On* 22/7 *and* 355/113. Eureka: the Archimedians Journal 34 (1971), 10–13.

[16] J.-P. Delahaye, Le fascinant nombre π. Bibliothèque Scientifique. Belin-Pour la Science, Paris, 1997.

[17] P. Eymard, J-P. Lafon, The number π. Traduït de la versió francesa de 1999 per S. S. Wilson. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[18] A. Gasull, *El número* π*. Diferents algorismes de càlcul.* Capítol 2.2 de "Fes Matemàtiques!" editat pel Dep. de Matemàtiques de la Univ. Autònoma de Barcelona 2001, 23–28.

[19] A. Gasull, *Algoritmos sencillos para calcular* π*,* Per aparèixer a la Gaceta de la RSME.

[20] A. Gasull, M. Llorens, *Càlcul d'integrals usant sistemes dinàmics discrets.* Butl. Soc. Catalana Mat., 32 (2017), 45–71.

[21] J. Guillera, *Historia de las fórmulas y algoritmos para* π. La Gaceta de la RSME 10 (2007) 159–178.

[22] J. Guillera, *History of the formulas and algorithms for* π. Gems in experimental mathematics, Contemp. Math., 517, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2010) 173–188.

[23] G. H. Hardy, E. M. Wright, An introduction to the theory of numbers. Fifth edition. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979.

[24] A. Joyal, *Le calcul du nombre* π. Materials Matemàtics 2008, treball 5, 17 pp.

[25] S. K. Lucas, *Integral proofs that* $355/113 > \pi$. Austral. Math. Soc. Gaz. 32 (2005), 263–266.

[26] S. K. Lucas, *Approximations to* π *derived from integrals with nonnegative integrands.* Amer. Math. Monthly 116 (2009), 166–172.

[27] A. Michel, *Algorithmique* a Dictionnaire de Mathématiques, fondements, probabilités, applications, Encyclopaedia Universalis, París, 1998

[28] J. Navarro, Los secretos del número π. Col·lecció El mundo es matemático, RBA Coleccionables, 2010.

[29] A. Nicolau, *Números Normals*, Materials Matemàtics 2016, treball 1, 13 pp.

[30] D. A. Nield (mal escrit Neild a l'article), *Rational approximations to pi.* New Zealand Math. Mag. 18 (1981/82), 99–100.

[31] I. Niven, *A simple proof that π is irrational.* Bull. Amer. Math. Soc. 53, (1947). 509.

[32] C. D. Offner, *Computing the Digits in π.* Preprint 2015. Accessible a https://www.cs.umb.edu/~offner/files/pi.pdf

[33] M. Ostrogradsky, *De l'intégration des fractions rationnelles* i *De l'intégration des fractions rationnelles(fin).* Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg 4 (1845), 145–167 i 286–300.

[34] K. H. Rosen, Elementary number theory and its applications. Fourth edition. Addison-Wesley, Reading, MA, 2000.

[35] E. Salamin, *Computation of π using arithmetic-geometric mean.* Math. Comp. 30 (1976), 565–570.

[36] J. Stoer, R. Bulirsch, Introduction to numerical analysis (traduït de la versió alemanya per R. Bartels, W. Gautschi i C. Witzgall). Third edition. Texts in Applied Mathematics, 12. Springer-Verlag, New York, 2002.

[37] A. V. Zhúkov, El omnipresente número π, Serie de divulgación científica: Matemática 11, Ed. URSS, Moscú 2004.

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
gasull@mat.uab.cat

Publicat el 20 de juny de 2018