MAT^2
MATerials MATemàtics
Volum 2017, treball no. 5, 21 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

L'equació del trànsit i quant de temps perdem quan entra un tractor a la carretera

Àngel Calsina

Les lleis de conservació formen una família important d'equacions en derivades parcials que descriuen l'evolució temporal de l'estat dels medis continus. El cas més senzill es dona quan aquest estat es pot descriure usant una sola variable dependent, per exemple la densitat de la magnitud observada, i a més la distribució d'aquesta és unidimensional. Aquest és el cas del model que veurem a continuació sobre el flux del transit de vehicles en una carretera. Malgrat la senzillesa del model, la seva no linealitat i el caràcter hiperbòlic de l'equació fan que ens trobem amb problemes molt interessants sobre el concepte de solució generalitzada d'una equació en derivades parcials i el problema de la falta de unicitat de solució. A més és un bon començament per a l'estudi del moviment dels fluids compressibles. Sobre aquest problema es poden consultar els llibres [1], [2] i [8]. En particular el llibre de Richard Haberman és una introducció molt completa a un nivell assequible.

La secció 1 d'aquest treball és un breu resum del tema, que es pot trobar més extens en els textos citats. La secció 2 presenta una demostració d'un fet que a primera vista sembla poc intuïtiu. Això és que els vehicles que queden aturats per un semàfor o que veuen disminuïda la seva velocitat per un vehicle que es mou a velocitat inferior a la determinada per la densitat, suposada homogènia en temps anteriors, recuperen, quan l'obstacle desapareix, el temps perdut sempre que el seu objectiu fos viatjar fins a un punt prou allunyat d'on comença la pertorbació.

1 L'equació del trànsit

Imaginem una carretera amb un sol carril i sense avançaments, al llarg de la qual mesurem posicions segons la variable x, i en la qual els cotxes es mouen cap a la dreta i suposem l'existència de dues funcions:

a) La densitat de vehicles $\rho(x,t)$ o quantitat de cotxes per unitat de longitud en el punt x i a temps t de forma que

$$\int_a^b \rho(x,t)\,dx = \text{quantitat de cotxes a l'interval } [a,b] \text{ a l'instant } t\,.$$

b) El flux de vehicles $Q(x,t)$ o quantitat de cotxes per unitat de temps que travessen el punt x a temps t de forma que

$$\int_{t_1}^{t_2} Q(x,t)\,dt = \begin{array}{l}\text{quantitat de cotxes que travessen el punt } x\\ \text{entre els instants } t_1 \text{ i } t_2\,.\end{array}$$

La *conservació de la quantitat de cotxes* (de la massa parlant més en general) fa que el canvi en la quantitat de cotxes en un interval $[a,b]$ qualsevol entre dos instants de temps t_1 i t_2 sigui igual a la diferència entre la quantitat de cotxes que entren a l'interval i la quantitat dels que en surten. Així:

$$\int_a^b \rho(x,t_2)\,dx - \int_a^b \rho(x,t_1)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} Q(a,t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} Q(b,t)\,dt$$

Dividint la igualtat precedent per $t_2 - t_1$, considerant t_1 fix i fent tendir t_2 a t_1 tindrem, si Q és *contínua*,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)\,dx\bigg|_{t=t_1} &= \lim_{t_2\to t_1}\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_1} Q(a,t)\,dt - \lim_{t_2\to t_1}\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} Q(b,t)\,dt\\ &= Q(a,t_1) - Q(b,t_1)\end{aligned}$$

Posant ara t per t_1 i suposant que ρ i Q *són de classe* C^1,

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)\,dx = \int_a^b \frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t)\,dx = Q(a,t) - Q(b,t) = -\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}(x,t)\,dx$$

És a dir, $\displaystyle\int_a^b \Big(\frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x,t)\Big)\,dx = 0$ i, com $[a,b]$ era qualsevol,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x,t) = 0 \tag{1}$$

Aquesta equació s'anomena de continuïtat i no és suficient per ella sola per descriure el fenomen que ens interessa perquè conté dues variables dependents.

Per resoldre aquest problema relacionarem, de forma que sovint es diu *fenomenològica*, les dues variables dependents per obtenir una equació en derivades parcials quasi-lineal de primer ordre per a la densitat $\rho(x,t)$. Comencem dient $V(x,t) = Q(x,t)/\rho(x,t)$ i observem que $V(x,t)$ s'interpreta com la velocitat dels cotxes. En efecte, els vehicles que travessen el punt x entre els instants t i $t+\Delta t$ si Δt és petit són, aproximadament i si les funcions involucrades són contínues, els que ocupen a temps t l'interval

$$[x - V(x,t)\,\Delta t, x]$$

on $V(x,t)$ és la velocitat. Llavors,

$$Q(x,t)\,\Delta t \cong \rho(x,t)\,V(x,t)\,\Delta t\,,$$

d'on la igualtat. A continuació admetrem que hi ha una relació directe entre la densitat de vehicles i la velocitat a la què circulen. Per a això suposem que el transit és prou dens perquè cada cotxe circuli a la velocitat que determina la densitat en aquell moment i que aquesta determina la velocitat perquè cada cotxe guarda una distancia respecte del que el precedeix que és funció creixent de la velocitat. Aquest hipòtesi però, implica admetre la possibilitat d'acceleracions infinites.

Així podem escriure $V(x,t) = v(\rho(x,t))$ o simplement $V = v(\rho)$ on v és una funció decreixent que es fa 0 per a una certa densitat màxima o de col·lapse $\rho = \rho_m$ en la que els cotxes estan gairebé tocant-se.

Per exemple, $v(\rho) = \begin{cases} v_m\,(1 - \frac{\rho}{\rho_m}) & \text{si } \rho \le \rho_m\,, \\ 0 & \text{si } \rho > \rho_m\,. \end{cases}$

Així Q també resulta funció de ρ en la forma $Q(x,t) = \rho(x,t)\,v(\rho(x,t)) =: q(\rho(x,t))$, és a dir, $q(\rho) = \rho v(\rho)$, i l'equació (1) es pot escriure, per a $\rho < \rho_m$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q(\rho)}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + q'(\rho)\,\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \big(v(\rho) + \rho\,v'(\rho)\big)\,\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \qquad (2)$$

Aquesta equació complementada per una condició inicial que doni la densitat inicial de vehicles s'anomena model de Lighthill-Whitham ([4]). A més, les solucions de l'equació diferencial ordinària

$$x'(t) = v\,(\rho(x(t),t))$$

corresponen a les trajectòries dels vehicles. Tornant al comentari sobre l'acceleració, si derivem aquesta relació tindrem que l'acceleració d'un vehicle ve donada per

$$\begin{aligned} x''(t) &= v'(\rho(x(t),t)) \cdot \big(\rho_x(x(t),t)x'(t) + \rho_t(x(t),t)\big) \\ &= v'(\rho(x(t),t)) \cdot \big(\rho_x(x(t),t)\, v(\rho(x(t),t)) + \rho_t(x(t),t)\big) \\ &= -\rho(x(t),t)\, \big(v'(\rho(x(t),t))\big)^2 \rho_x(x(t),t) \end{aligned}$$

on hem usat l'equació (2) per obtenir la darrera igualtat:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v(\rho)\, \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho\, v'(\rho)\, \frac{\partial \rho}{\partial x}\,.$$

D'això es dedueix que l'acceleració és finita (i positiva si la densitat decreix al llarg de la característica, negativa si augmenta), contradient aparentment l'afirmació precedent que el model permet acceleracions infinites. Però hem suposat aquí que $\rho(x,t)$ és una solució *clàssica* de l'equació (2) (en particular que té derivades parcials). Relaxarem immediatament aquesta suposició. En particular la derivada parcial de $\rho(x,t)$ pot no existir. Això implica que les trajectòries poden formar angles quan travessen determinades fronteres com es pot veure a les figures del final del treball.

Si, a més, v fos la de l'exemple tindríem que

$$q(\rho) = v_m\, \big(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\big)\, \rho \quad \text{i} \quad q'(\rho) = v_m\, \big(1 - 2\, \frac{\rho}{\rho_m}\big)$$

per a $\rho < \rho_m$, i l'equació resultaria

$$\rho_t + v_m\, \big(1 - 2\, \frac{\rho}{\rho_m}\big)\, \rho_x = 0\,.$$

Suposarem també, sempre, que $q''(\rho) < 0$ per a tota $\rho \in [0, \rho_m]$. Així, $q'(\rho)$ és estrictament decreixent i per tant invertible en el seu conjunt imatge de forma que $q(\rho)$ serà una funció positiva a $(0, \rho_m)$ i nul·la a 0 i a ρ_m amb un únic punt de màxim que separa la zona de trànsit (relativament) fluid (amb $q'(\rho) > 0$) de la de trànsit (més) dens (amb $q'(\rho) < 0$).

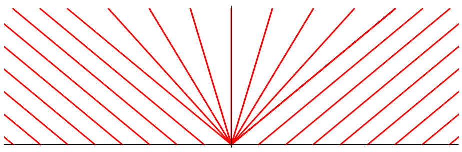
1.1 Solucions poc regulars

Com dèiem més amunt, entendríem per solució clàssica de (2) una funció amb derivades parcials satisfent l'equació (2). De seguida veurem que la situació física que ens interessa fa molt necessari ampliar el concepte de solució com, de fet, ocorre molt sovint en l'estudi de les equacions en derivades parcials.

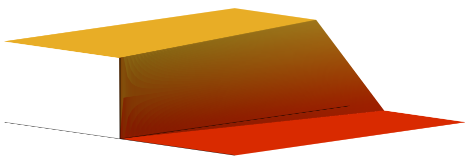
Una primera idea és entendre per solució de (2) tota funció contínua $\rho(x,t)$ tal que, en cada punt, té derivada direccional nul·la en la direcció del *vector* *característic* $(q'(\rho), 1)$ (vegi's (2)). Per tant, tal que, per a cada punt (x_0, t_0) és constant sobre la *recta característica* $x = q'(\rho(x_0, t_0))\,(t - t_0) + x_0$. Així, si coneixem la densitat en un punt d'una d'aquestes rectes, la coneixem en tota la recta (es diu que la informació es propaga al llarg de característiques). Per exemple podem suposar conegut el valor inicial (per a $t = 0$) de la densitat, $\rho(s, 0) = \rho_0(s)$. Llavors resultarà que valdrà també $\rho_0(s)$ en els punts (x, t) de la recta $x = q'(\rho_0(s))\,t + s$.

Aquesta construcció determina la solució en els punts (x, t) pels quals passa una recta característica i només una, però deixa obert el problema de com definir una solució en els punts per on no passa cap recta característica amb densitat determinada per una *condició inicial o de frontera*, i també en els punts pels quals passen diverses rectes característiques (corresponents a valors de s diferents i a valors de $\rho_0(s)$ diferents). En principi, en el primer cas no tindríem solució i en el segon la tindríem multivaluada.

El primer problema es presenta si la condició inicial té una discontinuïtat de salt decreixent. Per exemple, si un obstacle desapareix a temps 0 d'una carretera (s'obre un semàfor) es tindrà densitat inicial màxima ρ_m a l'esquerra de l'obstacle (que suposem al punt $x = 0$) i densitat nul·la a la dreta. Com estem suposant que $q'(\rho)$ és una funció decreixent, les rectes característiques que passen pels punts $(s, 0)$, $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, eviten un sector amb focus a l'origen de coordenades on l'única solució contínua per a $t > 0$ ve donada per $\rho(x, t) = (q')^{-1}(x/t)$, només depenent de l'angle polar i amb característiques passant per l'origen.



Un ventall apareixent com a solució per a una condició inicial constant a trossos i decreixent.



El gràfic de la densitat.

És el que es coneix com a zona d'enrariment (la densitat decreix al disminuir l'angle polar) o simplement ventall (*fan* en anglès).

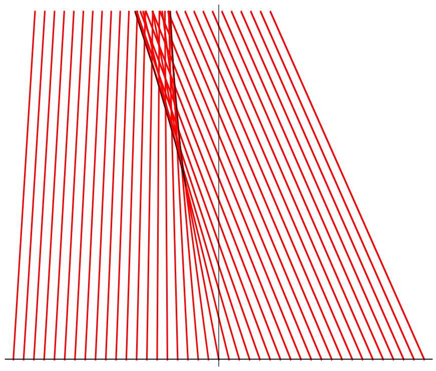
Comproveu directament que, en general i per a constants qualssevol X i T,

$$\rho(x, t) = (q')^{-1}\left(\frac{x - X}{t - T}\right)$$

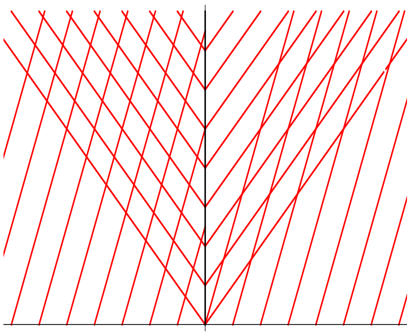
és una solució de l'equació a la regió $\{(x, t) : t > T, \frac{x-X}{t-T} \in [q'(\rho_m), q'(0)]\}$, amb forma de ventall amb focus al punt de coordenades (X, T).

1.2 Solucions discontínues

El segon problema (que per un punt passi més d'una recta característica) es presenta sempre que la densitat inicial és una funció de x creixent, encara que típicament, per a un temps estrictament positiu si la densitat és regular. També si de sobte un obstacle apareix al punt $x = 0$, per exemple perquè s'hi tanca un semàfor o bé hi entra un vehicle més lent que els que circulaven per aquell punt.



Superposició de característiques deguda a una densitat inicial creixent.



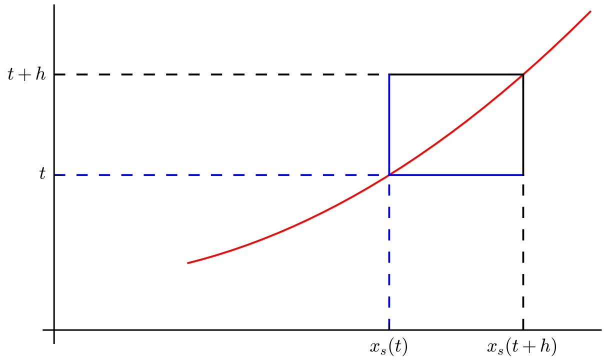
Superposició de característiques deguda a l'aparició d'un obstacle aturat al punt $x = 0$.

En aquest cas, les característiques intersequen immediatament per a temps positiu perquè les que passen per punts de coordenades (s, 0) amb $s < 0$ tenen *velocitat* $q'(\rho)$, més gran que les que venen de punts sobre (a l'esquerra) la trajectòria del vehicle lent, la velocitat del qual (menor que la dels vehicles que circulaven sense obstacle) correspon a densitat més gran i per tant a un valor menor de q'.

També les característiques que venen de punts sobre la trajectòria del vehicle lent o sobre la posició de l'obstacle aturat (a la dreta d'aquesta) intersequen immediatament amb les que passen per punts $(s, 0)$ amb $s > 0$ perquè les primeres tenen la màxima *velocitat* $q'(0)$ (no hi ha cotxes immediatament davant del vehicle lent).

Per donar una solució univaluada a aquests problemes s'abandona la pretensió de continuïtat i s'admeten discontinuïtats de salt (de forma que la densitat té límit en el sentit de dues variables tant per la dreta com per l'esquerra) en corbes $x = x_s(t)$, anomenades ones de xoc o simplement xocs. El valors de la densitat a cada banda del xoc queden determinats per les característiques que es troben "en el passat" completament a la mateixa banda del xoc. Notem que la discontinuïtat es desenvolupa al llarg del temps a velocitat finita. Això és, en el pla (x, t) el gràfic de $x_s(t)$ no té tangents horitzontals i per tant té sentit parlar dels costats esquerra i dret del xoc.

La direcció (o *velocitat*) del xoc, és a dir, el valor de $x_s'(t)$, es determina per l'anomenada condició de *Rankine-Hugoniot* que es deriva de la llei de conservació en forma integral com segueix (vegi's la figura).



El canvi en la quantitat de cotxes continguts a l'interval $[x_s(t), x_s(t+h)]$ entre els instants t i $t+h$ és igual al flux que travessa el punt $x_s(t)$ menys el que travessa el punt $x_s(t+h)$. Això ens dona la igualtat:

$$\int_{x_s(t)}^{x_s(t+h)} \rho(x, t+h)\, dx - \int_{x_s(t)}^{x_s(t+h)} \rho(x,t)\, dx$$
$$= \int_t^{t+h} Q(x_s(t), \tau)\, d\tau - \int_t^{t+h} Q(x_s(t+h), \tau)\, d\tau$$

que, dividint per h, és equivalent a

$$\frac{x_s(t+h) - x_s(t)}{h} \Big(\frac{1}{x_s(t+h) - x_s(t)} \int_{x_s(t)}^{x_s(t+h)} \rho(x, t+h)\, dx - \frac{1}{x_s(t+h) - x_s(t)} \int_{x_s(t)}^{x_s(t+h)} \rho(x,t)\, dx \Big)$$
$$= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} Q(x_s(t), \tau) d\tau - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} Q(x_s(t+h), \tau)\, d\tau\,. \tag{3}$$

Ara introduïm notació: diem $\rho^+ = \rho^+(x_s(t), t)$ al límit de la densitat *per la dreta* en el punt (del xoc) $(x_s(t), t)$ i $\rho^- = \rho^-(x_s(t), t)$ al límit de la densitat *per l'esquerra* en el mateix punt i anàlogament definim q^+ i q^- (recordem que $Q(x,t) = q(\rho(x,t))$ i que per tant la discontinuïtat de Q és del mateix tipus que la de ρ). D'altra banda, utilitzarem que

$$\lim_{b \to a} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(s)\, ds = \lim_{s \to a^+} f(s)$$

si el límit de la dreta existeix.

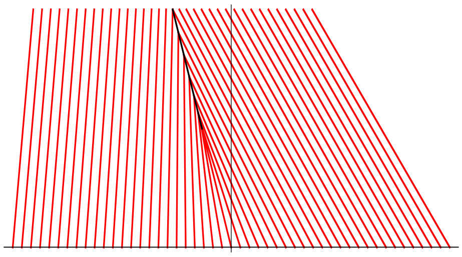
Fent tendir h a 0 a (3) obtenim (de manera directa en les integrals sobre els segments de color blau a la figura, treballant una mica en el cas de les altres)

$$x_s'(t)\big(\rho^-(x_s(t),t) - \rho^+(x_s(t),t)\big) = q^-\big(\rho(x_s(t),t)\big) - q^+\big(\rho(x_s(t),t)\big)\,,$$

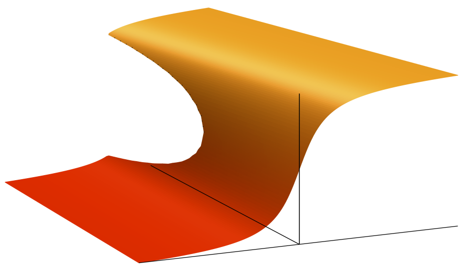
en particular demostrant que l'ona de xoc és una corba derivable. Finalment aquesta condició de *Rankine-Hugoniot* se sol escriure

$$x_s'(t) = \frac{q^+ - q^-}{\rho^+ - \rho^-} = \frac{[q]}{[\rho]}\,,$$

és a dir, la *velocitat del xoc és igual al salt en el flux dividit pel salt en la densitat.*



Les característiques corresponents a una densitat inicial creixent però suau i l'ona de xoc que elimina la superposició.



Una densitat inicial creixent desenvolupa una discontinuïtat anomenada ona de xoc.

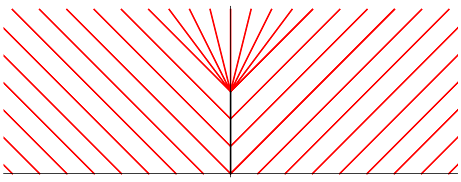
Diem de passada que admetre solucions discontínues de les equacions de transport no va ser fàcil històricament i que, en el context de la dinàmica de gasos, aquest problema va aixecar forta controvèrsia durant bona part del segle XIX. Per saber més sobre aquest assumpte, es pot llegir a la referència [7] sobre l'article de George Stokes titulat *On a difficulty in the theory of sound* (1848) on ja apareix la condició de salt, però que el mateix Stokes eliminaria quan feu un recull de les seves obres completes el 1883(!), i sobre els treballs de William Rankine (1870) i de Pierre-Henry Hugoniot (1889). Sembla que a la dificultat matemàtica de l'acceptació i de la manipulació de les funcions discontínues s'hi afegia una manca de comprensió del problema termodinàmic (Stokes al 1883 pensava que un salt en la densitat no conservaria l'energia) i, també, una aversió *filosòfica* que venia de l'antiguitat clàssica recollida en l'aforisme llatí *Natura non facit saltus.*

1.3 Manca d'unicitat

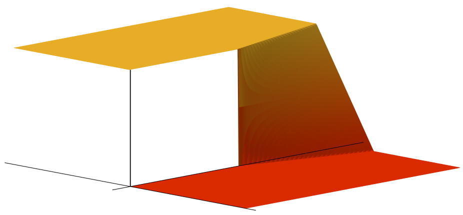
Recapitulem ara el que hem estat fent des del punt de vista del concepte de solució. Hem admès primer funcions que, encara que no tinguessin les dues derivades parcials, fossin constants sobre les característiques i *contínues*. Això ens ha permès construir zones d'enrariment allà on no passaven característiques procedents de la condició inicial o de frontera. Però després hem relaxat la condició de continuïtat per admetre funcions constants sobre les característiques que (potser) presentessin discontinuïtats de salt sobre un nombre finit de corbes que havien de complir, això sí, la condició de salt de Rankine-Hugoniot.

Però ampliar la definició de solució té en general l'inconvenient que en dificulta la unicitat. Això passa efectivament en el problema del trànsit i, més en general, en l'estudi d'equacions de transport no lineals quan es desenvolupen discontinuïtats. Per exemple, considerem un semàfor que es posa verd després d'estar molta estona tancat. Ja hem descrit una solució per a aquest problema, en forma de ventall amb focus al punt de l'espai-temps on s'obre el semàfor. Però resulta que hi ha una infinitat de solucions discontínues d'aquest problema (per descomptat satisfent totes la condició de Rankine Hugoniot).

Aquest fet aparentment antiintuïtiu (que faria impossible predir el futur a partir de la condició inicial) no ho és tant quan reconeixem que cap de les solucions discontínues viola la conservació de la quantitat de cotxes, donat que satisfan totes la condició de salt de Rankine-Hugoniot i recordem que el model s'ha derivat *només* d'aquesta llei de conservació. Fixem-nos per altra banda que en realitat, quan observem que un semàfor es posa verd, no sempre veiem el mateix comportament de la densitat de cotxes: basta que el conductor que es troba just en el punt on hi ha el semàfor estigui distret una estona (fins que els del darrera l'espavilin fent sonar els clàxons) perquè observem la solució que es veu a la figura de sota.



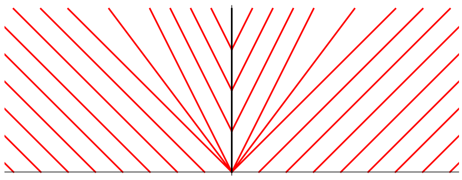
Característiques en el problema del semàfor que s'obre si "el conductor està distret".

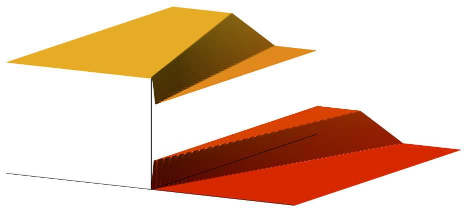


El gràfic de la densitat.

En termes del model no podem incorporar el fet que "el conductor està distret" però recordem que la velocitat dels vehicles és funció de la densitat d'aquests i podem interpretar la "distracció" dient que el conductor del primer vehicle es mou segons la densitat que observa darrera seu (la densitat màxima) i per això segueix parat, i no la del seu davant que és 0 i li permetria viatjar a la velocitat màxima, com farà immediatament que l'avisin.

Una altra solució del mateix problema de valor inicial es pot veure a la figura de sota, on es combinen zones de densitat constant amb zones d'enrariment.





En el punt $x = 0$ hi ha un xoc aturat perquè les densitats a banda i banda produeixen el mateix flux, encara que aquest no és 0 com passa en l'exemple anterior.

Notem però que totes aquestes solucions diferents de la donada per un ventall pur i densitat contínua tenen discontinuïtats decreixents (la densitat és més gran a l'esquerra que a la dreta del xoc). Aquesta possibilitat queda prohibida si s'exigeix l'anomenada *condició d'entropia*:

$$\rho^- \leq \rho^+ \,,$$

que correspondria a suposar que els conductors "veuen" la densitat del davant. Per tant no "permeten" discontinuïtats decreixents. Però s'ha de fer èmfasi en que això és un element nou, no contingut en el model inicial derivat només de la conservació de la quantitat de vehicles, i per tant que la manca d'unicitat no és un artefacte sinó una característica de la llei de conservació. En el món de la dinàmica de gasos, on per comptes d'una equació escalar tindríem un sistema d'equacions expressant no només la conservació de la matèria sinó també la del moment i la de l'energia, la unicitat de solució (o manca d'aquesta) i la condició d'entropia en relació amb el significat termodinàmic de la paraula foren ja considerades en treballs molt coneguts d'Olga Oleinik [5] i Peter Lax [3] a partir de mitjans del segle passat.

D'altra banda, la hipòtesi de concavitat estricta de la funció $q(\rho)$ implica, per la condició de Rankine-Hugoniot, que la condició d'entropia és equivalent a que la velocitat del xoc satisfaci les desigualtats

$$q'(\rho^+) \leq x_s' \leq q'(\rho^-) \,,$$

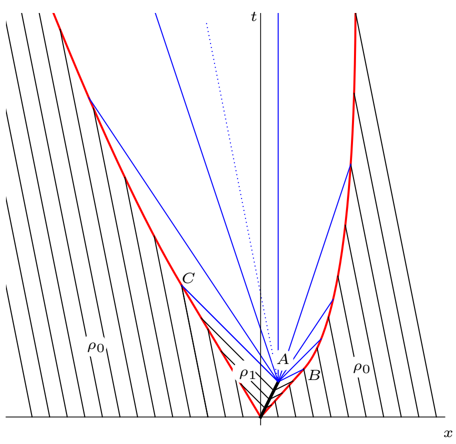
(el pendent de la recta secant que passa pels punts $(\rho^-, q(\rho^-))$ i $(\rho^+, q(\rho^+))$ es troba entre els de les rectes tangents) i com a conseqüència a que les característiques arribin al xoc des del passat i no en neixin d'aquest cap al futur. Això s'interpreta com una pèrdua de la informació (sobre la densitat) transportada per les característiques que moren en arribar a un xoc, és a dir, en un augment de l'entropia del sistema, que és irreversible quan es produeixen xocs. Observeu en les figures que, en solucions del problema del semàfor que es posa verd diferents de la del ventall pur, hi ha característiques que neixen en el xoc. La referencia [6] conté una reflexió acurada sobre el significat de la condició d'entropia en el model del flux de transit.

2 Xocs i trajectòries en zones d'enrariment. No es perd temps en un semàfor!

Il·lustrarem com els mètodes descrits en la secció anterior són útils per predir l'evolució temporal de la densitat de vehicles a la carretera amb un exemple i, en particular, calcularem quin és el retard causat en els altres cotxes per la irrupció temporal d'un vehicle lent en una carretera inicialment homogènia o bé per l'aparició d'un obstacle temporal aturat. El resultat sorprenent i poc intuïtiu (potser) serà que si l'objectiu al qual es dirigeix un vehicle es troba prou lluny de la zona on es produeix la pertorbació, el retard sofert resulta nul.

2.1 La densitat

Suposem doncs que a una carretera amb, inicialment, densitat homogènia ρ_0 i velocitat $v_0 = v(\rho_0)$, entra, a l'instant $t = 0$ i en el punt $x = 0$, un vehicle lent que es desplaça a una velocitat $v_1 < v_0$ fins a l'instant T en que abandona la carretera. L'obstacle temporal provoca una pertorbació en la densitat: una zona on els cotxes avancen a la velocitat del vehicle lent i la densitat és constant ρ_1 (tal que $v(\rho_1) = v_1$), una de densitat nul·la davant de l'obstacle (sense cotxes) i una zona d'enrariment (en blau, amb "focus" al punt A de coordenades $(v_1 T, T)$, on el vehicle lent



Característiques i xocs en el problema de l'obstacle mòbil abandona la carretera), separades totes elles de la zona de densitat ρ_0 per dos xocs (discontinuïtats de salt) la velocitat dels quals satisfà la condició de salt de Rankine-Hugoniot. En particular, la frontera de la zona d'enrariment (o ventall, on $t > T$) satisfà l'equació diferencial

$$x'(t) = \frac{[q]}{[\rho]} = \frac{q(\rho_0) - q(\rho(x(t),t))}{\rho_0 - \rho(x(t),t)} = \frac{q(\rho_0) - q\left((q')^{-1}(\frac{x(t)-v_1 T}{t-T})\right)}{\rho_0 - (q')^{-1}(\frac{x(t)-v_1 T}{t-T})} \tag{4}$$

Anomenem

$$R(t) = (q')^{-1}\left(\frac{x(t) - v_1 T}{t - T}\right) \tag{5}$$

al límit de la densitat dins la zona d'enrariment quan ens acostem als xocs $x(t)$ (a l'instant t), i tindrem

$$\frac{x(t) - v_1 T}{t - T} = q'(R(t)) \tag{6}$$

i per tant, $x(t) - v_1 T = (t - T)\, q'(R(t))$.

Derivant i usant l'equació (4) podrem escriure

$$(x'(t) =)\; q'(R(t)) + (t - T)\, q''(R(t))\, R'(t) = \frac{q(\rho_0) - q(R(t))}{\rho_0 - R(t)}\,. \tag{7}$$

La segona igualtat és una equació diferencial per a la densitat R que es pot resoldre explícitament. Efectivament, és equivalent a

$$\frac{(\rho_0 - R(t))\, q''(R(t))\, R'(t)}{q(\rho_0) - q(R(t)) - q'(R(t))\,(\rho_0 - R(t))} = \frac{1}{t - T}\,.$$

i per tant a

$$-\frac{d}{dt}\ln\bigl(q'(R(t))\,(\rho_0 - R(t)) - (q(\rho_0) - q(R(t)))\bigr) = \frac{d}{dt}\ln(t - T)\,,$$

on l'argument del primer logaritme és positiu per la hipòtesi $q''(\rho) < 0$.

Així obtenim la solució general de l'equació (7) en la forma

$$(t - T)\,\bigl(q'(R(t))\,(\rho_0 - R(t)) - (q(\rho_0) - q(R(t)))\bigr) = C_1\,. \tag{8}$$

Notem que, desfent el canvi de variable (5), aquesta relació ens dona també la solució general de (4) i per tant els xocs $x(t)$, encara que de forma implícita:

$$\begin{aligned}(x(t) - v_1 T)\,\Bigl(\rho_0 - (q')^{-1}\bigl(\frac{x(t) - v_1 T}{t - T}\bigr)\Bigr)&\\ - (t - T)\,\Bigl(q(\rho_0) - q\bigl((q')^{-1}\bigl(\frac{x(t) - v_1 T}{t - T}\bigr)\bigr)\Bigr) &= C_1\,.\end{aligned}$$

D'altra banda, resulta que els dos xocs curvilinis (a dreta i esquerra de la zona d'enrariment), encara que solucions diferents de l'equació diferencial (4), corresponen al mateix valor de la constant C_1. En efecte, per al de la dreta tenim una condició inicial que correspon al punt B on el xoc rectilini, d'equació

$$x_d(t) = \frac{[q]}{[\rho]}t = \frac{q(\rho_0)}{\rho_0}t = v_0\, t\,,$$

interseca la "darrera" característica de la zona amb densitat nul·la, que ve del punt de coordenades $(v_1 T, T)$, és a dir,

$$x(t) - v_1\, T = q'(0)\,(t-T) = v_m\,(t-T)\,,$$

que de fet coincideix amb la trajectòria que recorre el cotxe que es trobava exactament darrera del vehicle lent quan aquest abandona la carretera.

Igualant els valors de x en les dues darreres equacions s'obté que la intersecció es produeix a l'instant

$$t_B := \frac{v_m - v_1}{v_m - v_0}\,T = T + \frac{v_0 - v_1}{v_m - v_0}\,T$$

i la densitat $R(t_B)$ és, en aquest punt, i dins de la zona de ventall, igual a 0. Substituint aquests valors a (8), tindrem que per al xoc de la dreta,

$$C_1 = (t_B - T)\,(q'(0)\,\rho_0 - q(\rho_0)) = \frac{v_0 - v_1}{v_m - v_0}\,T\,(v_m\,\rho_0 - v_0\,\rho_0) = \rho_0\,(v_0 - v_1)\,T$$

D'altra banda per al xoc curvilini de l'esquerra, la condició inicial C ve determinada per la intersecció del xoc rectilini

$$x_e(t) = \frac{[q]}{[\rho]}\,t = \frac{q(\rho_1) - q(\rho_0)}{\rho_1 - \rho_0}\,t$$

i la característica $x(t) - v_1\,T = q'(\rho_1)\,(t-T)$, la "darrera" procedent de la zona de densitat ρ_1.

Això dona un instant inicial

$$t_C = \frac{(v_1 - q'(\rho_1))\,(\rho_1 - \rho_0)}{q(\rho_1) - q(\rho_0) - q'(\rho_1)\,(\rho_1 - \rho_0)}\,T = T + \frac{\rho_0(v_0 - v_1)}{q(\rho_1) - q(\rho_0) - q'(\rho_1)\,(\rho_1 - \rho_0)}T$$

i una densitat $R(t_C)$ dins la zona del ventall igual a ρ_1. Substituint aquests valors a (8), tindrem per al xoc de l'esquerra,

$$\begin{aligned} C_1 &= (t_C - T)\,(q'(\rho_1)\,(\rho_0 - \rho_1) - q(\rho_0) + q(\rho_1)) \\ &= \frac{\rho_0(v_0 - v_1)}{q(\rho_1) - q(\rho_0) - q'(\rho_1)\,(\rho_1 - \rho_0)}\,T\,(q'(\rho_1)\,(\rho_0 - \rho_1) - q(\rho_0) + q(\rho_1)) \\ &= \rho_0\,(v_0 - v_1)\,T\,. \end{aligned}$$

Així doncs de (8), tant per al xoc de l'esquerra com per al de la dreta,

$$t - T = \frac{\rho_0\,(v_0 - v_1)\,T}{q'(R(t))\,(\rho_0 - R(t)) - (q(\rho_0) - q(R(t)))} = \frac{\rho_0(v_0 - v_1)\,T}{(\rho_0 - R(t))\left(q'(R(t)) - \frac{q(\rho_0)-q(R(t))}{\rho_0 - R(t)}\right)}\,. \tag{9}$$

Però és clar, amb dues densitats diferents $R(t)$, corresponents als límits de la densitat quan ens acostem als dos xocs dins la zona de ventall, a temps t. Aquesta fórmula ens dona el temps que triga la densitat en els xocs i dins la zona de ventall en fer-se $R(t)$. Notem que els dos factors del denominador de la darrera expressió tenen el mateix signe, negatiu per al xoc de l'esquerra i positiu per al de la dreta i que només per a t tendint a infinit la densitat $R(t)$ tendeix a ρ_0. Dit d'una altra manera, els xocs van trobant característiques a la zona de ventall, el de l'esquerra de densitats decreixents i creixents el de la dreta, però no arriben a travessar la de densitat ρ_0 (de traç puntejat a la figura), donada per $x - v_1\,T = q'(\rho_0)\,(t - T)\,.$

Exemple. En el cas de dependència lineal de la velocitat respecte la densitat i usant unitats adequades es té $v(\rho) = 1 - \rho$ i per tant $q(\rho) = (1 - \rho)\,\rho$, $q'(\rho) = 1 - 2\rho$ i $(q')^{-1}(z) = \frac{1}{2} - \frac{z}{2}$.

Si a més suposem que $v_1 = 0$ (que correspon al fet que, per comptes d'un obstacle mòbil en tenim un de parat, per exemple un semàfor), (9) esdevé

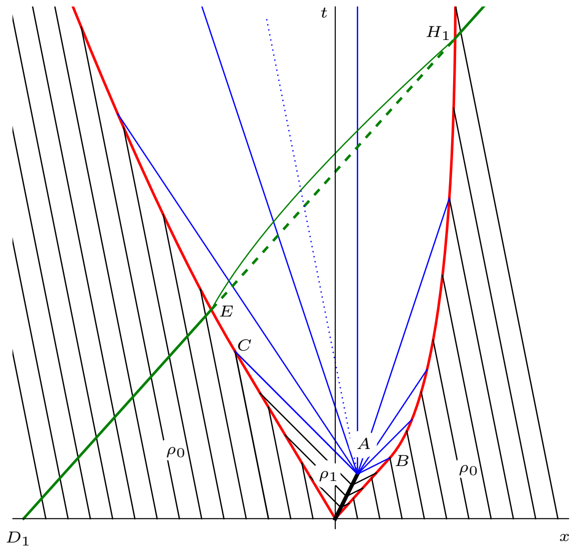
$$(t - T)\,(\rho_0 - R(t))^2 = \rho_0(1 - \rho_0)\,T\ ,\ \text{i usant } R(t) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\,(t - T)}\,,$$

els xocs resulten dos arcs de la paràbola $((2\rho_0 - 1)(t - T) + x)^2 - 4\,\rho_0\,(1 - \rho_0)\,T\,(t - T) = 0$, que passa pel punt $(0, T)$ i l'eix de la qual és paral·lel a la característica de densitat ρ_0, $x = (1 - 2\,\rho_0)\,(t - T)\,.$

2.2 La trajectòria d'un cotxe inicialment lluny de l'obstacle

Suposem ara un vehicle que entra a la zona pertorbada a l'instant t_E al punt x_E de manera que no ha de disminuir la seva velocitat tant com per posar-se a la velocitat v_1 (en el cas d'un obstacle parat, no arriba a aturar-se). Això passarà, com veurem més endavant, si inicialment es troba en un punt D_1 de coordenades $(a, 0)$ prou allunyat del lloc on comença la pertorbació. Més precisament si es satisfà

$$a < -(v_0 - v_1)\,T\frac{q(\rho_1) - q'(\rho_1)\,\rho_1}{q(\rho_1) - q(\rho_0) - q'(\rho_1)\,(\rho_1 - \rho_0)} < 0\,.$$



En verd i traç continu la trajectòria del vehicle pertorbat. En traç discontinu la d'un vehicle que no es veiés pertorbat.

Demostrarem a continuació que el punt H_1 on la trajectòria del vehicle abandona la zona "pertorbada" (travessant el xoc de la dreta) és el mateix punt on ho faria una trajectòria a velocitat constant v_0 passant pel punt D_1 a temps $t = 0$, implicant que en aquest punt d'intersecció el vehicle afectat per l'obstacle "atraparia" un vehicle "virtual" que s'hagués mogut, des del mateix punt inicial, sense veure's afectat per l'obstacle.

Per fer això provarem que el cotxe "no pertorbat" experimentaria la densitat corresponent al punt on el cotxe "pertorbat" abandona la zona pertorbada en el mateix instant en que ho fa el cotxe pertorbat. A la figura això correspon al fet que pel punt H_1 passen les dues trajectòries i, també, el xoc.

En efecte, la trajectòria del vehicle a partir de l'instant t_E i fins al punt H_1, complira l'equació diferencial

$$x'(t) = \frac{q(\rho(x(t),t))}{\rho(x(t),t)} = v(\rho(x(t),t) = v\left((q')^{-1}\big(\frac{x(t)-v_1 t}{t-T}\big)\right). \tag{10}$$

D'una forma semblant a com hem fet abans, el canvi de variable (5) (però ara $R(t)$ és la densitat sobre la trajectòria) transforma (10) en l'equació diferencial següent per a la nova variable dependent $R(t)$

$$(x'(t) =)\; q'(R(t)) + (t-T)\, q''(R(t))R'(t) = \frac{q(R(t))}{R(t)}\,. \tag{11}$$

Equivalentment,

$$\frac{R(t)\, q''(R(t))\, R'(t)}{q(R(t)) - q'(R(t))\, R(t)} = \frac{1}{t-T}\,.$$

També de manera similar a com hem fet abans, obtindrem la solució general de (11) en la forma

$$(t-T)\,\left(q(R(t)) - q'(R(t))\, R(t)\right) = C_2\,. \tag{12}$$

També aquí, desfent el canvi (5) obtindríem, en forma implícita, la trajectòria del vehicle mentre es troba a la zona pertorbada.

Exemple. En el cas d'abans en que suposàvem $v(\rho) = 1-\rho$, i $v_1 = 0$ (obstacle parat), (12) es pot escriure $(t-T)\, R(t)^2 = C_2$ i, usant $R(t) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\,(t-T)}$, resulta que la trajectòria és un arc de la paràbola $(t-T-x)^2 - 4\, C_2\,(t-T) = 0\,.$

D'altra banda, avaluant (12) al punt E d'entrada a la zona pertorbada, (x_E, t_E), tindrem que sobre la trajectòria es compleix

$$t - T = \frac{(t_E - T)\,\left(q'(R(t_E))\, R(t_E) - q(R(t_E))\right)}{q'(R(t))\, R(t) - q(R(t))} \tag{13}$$

A l'instant $\hat{t}$ en el que el vehicle abandona la zona pertorbada (en el punt H_1 d'intersecció de la trajectòria i el xoc) la densitat "mesurada" sobre la trajectòria és la mateixa que "mesurada" sobre (a l'esquerra) del xoc. Diem a aquesta $\hat{R}$, és a dir, posem $\hat{R} = R(\hat{t})$.

Ara usem la igualtat (9) per al xoc de l'esquerra, avaluant-la en el punt (x_E, t_E), i obtenim

$$(t_E - T)\,\left(q'(R(t_E))\,(\rho_0 - R(t_E)) - (q(\rho_0) - q(R(t_E)))\right) = \rho_0\,(v_0 - v_1)\,T$$

Substituint a (9) per al xoc de la dreta i usant (13) per a la trajectòria, com $\hat{t}$ és l'instant en el que intersequen aquestes dues corbes, tindrem la relació

$$\begin{aligned}
\hat{t} - T &= \frac{(t_E - T)\,\left(q'(R(t_E))\,(\rho_0 - R(t_E)) - (q(\rho_0) - q(R(t_E)))\right)}{q'(\hat{R})\,(\rho_0 - \hat{R}) - (q(\rho_0) - q(\hat{R}))} \\
&= \frac{(t_E - T)\,\left(q'(R(t_E))\, R(t_E) - q(R(t_E))\right)}{q'(\hat{R})\,\hat{R} - q(\hat{R})} \\
&= \frac{(t_E - T)\,\left(q'(R(t_E))\,\rho_0 - q(\rho_0)\right)}{q'(\hat{R})\,\rho_0 - q(\rho_0)} = \frac{(t_E - T)\,\left(q'(R(t_E)) - v_0\right)}{q'(\hat{R}) - v_0}
\end{aligned} \tag{14}$$

on la penúltima igualtat es deriva del fet que $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ implica $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ (suposant $\beta + \delta$ diferent de 0; si és igual a 0, també s'anul·la $\alpha + \gamma$). Notem però que, com $R(t_E) > \rho_0$, $q'(R(t_E)) < q'(\rho_0) = v(\rho_0) + \rho_0\, v'(\rho_0) < v(\rho_0)$ de forma que el numerador de la darrera expressió de (14) no és mai 0.

D'altra banda, si no s'hagués tancat el semàfor, el vehicle hauria seguit la trajectòria rectilínia

$$x = v_0\, t + x_E - v_0\, t_E$$

(recordem que passa pel punt (x_E, t_E) i es mou a velocitat constant $v_0 = v(\rho_0)$). La densitat sobre aquesta recta, a la zona d'enrariment, és, per tant,

$$\rho(x,t) = (q')^{-1}\left(\frac{v_0\, t + x_E - v_0\, t_E - v_1\, T}{t - T}\right).$$

Aïllant t en aquesta igualtat s'obté que l'instant de temps $t(\hat{R})$ en què s'experimenta la densitat $\hat{R}$ sobre aquesta recta ve donat per

$$t(\hat{R}) - T = \frac{x_E - v_0\,(t_E - T) - v_1\, T}{q'(\hat{R}) - v_0}\,. \tag{15}$$

Fixem-nos que si hi hagués un retard en la trajectòria per culpa de l'obstacle, l'instant $t(\hat{R})$ hauria de ser anterior a l'instant $\hat{t}$. Però obtenim, restant (15) de (14),

$$\hat{t} - t(\hat{R}) = \frac{(t_E - T)\, q'(R(t_E)) - (x_E - v_1\, T)}{q'(\hat{R}) - v_0} = 0$$

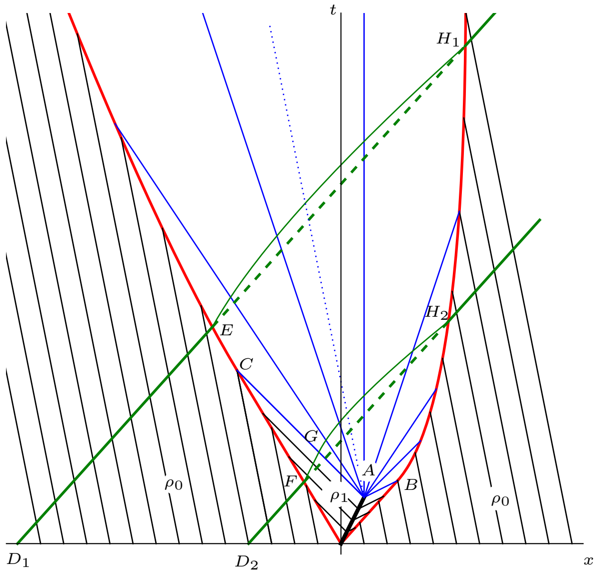
perquè precisament, $R(t_E) = (q')^{-1}\left(\frac{x_E - v_1\, T}{t_E - T}\right)$. Finalment doncs, el retard és nul.

2.3 La trajectòria d'un cotxe inicialment a prop de l'obstacle

Veurem ara que també és nul el retard si considerem un cotxe que inicialment es troba a prop de l'obstacle, de forma que sí arriba a posar-se durant una estona a la velocitat d'aquest (a aturar-se si es tracta d'un obstacle aturat).

Comprovem primer que si un vehicle es troba a l'instant $t = 0$ en el punt D_2 de coordenades $(a, 0)$ amb

$$-(v_0 - v_1)\, T\, \frac{q(\rho_1) - q'(\rho_1)\, \rho_1}{q(\rho_1) - q(\rho_0) - q'(\rho_1)\,(\rho_1 - \rho_0)} \le a < 0\,,$$



llavors entrarà a la zona pertorbada (amb densitat ρ_1) a l'instant $t_F = \frac{-a\,(\rho_1-\rho_0)}{\rho_1\,(v_0-v_1)}$. En efecte, basta igualar les x donades per la trajectòria $x = v_0\,t + a$ i el xoc $x_e(t) = \frac{q(\rho_1)-q(\rho_0)}{\rho_1-\rho_0}\,t$. A més, ho farà en el punt $x_F = a\,\frac{\rho_0\,v_0-\rho_1\,v_1}{\rho_1\,(v_0-v_1)}$, i entrarà a la zona de ventall a l'instant

$$t_G = T + \frac{a\,\rho_0}{\rho_1\,q'(\rho_1) - q(\rho_1)}\,, \tag{16}$$

que és la segona coordenada del punt G d'intersecció de la trajectòria $x = x_F + v_1\,(t - t_F)$ i la característica $x - v_1\,T = q'(\rho_1)\,(t - T)$.

És fàcil veure que la condició sobre a garanteix que $t_F \le t_C$ i per tant que efectivament el cotxe disminuirà la marxa fins a la velocitat v_1 del vehicle lent (s'aturarà si l'obstacle està parat) en trobar una zona de densitat ρ_1. La condició contraria, com ja s'ha dit, implica que el cotxe no arriba a posar-se a la velocitat v_1 i ha estat estudiada abans.

La densitat que "veu" el vehicle en el moment que entra a la zona de ventall (en el cas d'un obstacle aturat —un semàfor— és quan comença a moure's), és ρ_1. Per tant, de (12) i utilitzant també (16), tindrem, per a la densitat $R(t)$ que observa el cotxe dins de la zona de ventall (per a t més gran o igual que t_G),

$$(t-T)\,\left(-q(R(t)) + q'(R(t))\,R(t)\right) = (t_G-T)\,\left(\rho_1\,q'(\rho_1) - q(\rho_1)\right) = a\,\rho_0 \tag{17}$$

Com abans, a l'instant $\hat{t}$ en el que el vehicle abandona la zona pertorbada (en el punt H_2 d'intersecció de la trajectòria i el xoc de la dreta) la densitat "observada" sobre la trajectòria és la mateixa que "l'observada" sobre (a l'esquerra) del xoc. Per tant, en aquell punt, posant també com abans, $\hat{R} := R(\hat{t})$, i usant (17) i (9), tindrem la relació

$$\hat{t} - T = \frac{a\,\rho_0}{-q(\hat{R}) + q'(\hat{R})\,\hat{R}} = \frac{\rho_0\,(v_0 - v_1)\,T}{-q(\rho_0) + q(\hat{R}) + q'(\hat{R})\,(\rho_0 - \hat{R})} = \frac{a + (v_0 - v_1)\,T}{q'(\hat{R}) - v_0} \tag{18}$$

on usem altre cop que $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ implica $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$. En el nostre cas, el primer denominador és negatiu però també ho és el numerador (recordem que $a < 0$). Per això $\hat{t}$ és més gran que T. En canvi són positius el numerador i el denominador de la segona fracció. Per això no és descartable que s'anul·lin numerador i denominador de la tercera fracció. En aquest cas la densitat $\hat{R} := R(\hat{t})$ val $(q')^{-1}(v_0)$.

D'altra banda, si no s'hagués tancat el semàfor, el vehicle hauria seguit la trajectòria rectilínia (virtual) $x(t) = v_0\,t + a$. La densitat sobre aquesta recta, a la zona d'enrariment, és

$$R(t) = \rho(x(t), t) = (q')^{-1}\left(\frac{v_0\,t + a - v_1 T}{t - T}\right). \tag{19}$$

Aïllant t en aquesta igualtat s'obté que, equivalentment, l'instant de temps en que s'experimenta una densitat R sobre aquesta recta ve donat per

$$t(R) = T + \frac{a + (v_0 - v_1)\,T}{q'(R) - v_0},$$

altre cop suposant que no s'anul·len numerador ni denominador. La densitat és per tant igual a $\hat{R}$ a l'instant

$$t(\hat{R}) = T + \frac{a + (v_0 - v_1)\,T}{q'(\hat{R}) - v_0}$$

que, per (18), és igual a l'instant en que la trajectòria del vehicle afectat per l'obstacle abandona la zona pertorbada.

Per això, l'obstacle temporal (mòbil) no provoca retard als vehicles en cap cas en aquest model si es vol viatjar més enllà del punt x on intersequen les dues trajectòries i el xoc.

Finalment notem que el cas particular de numerador (i denominador) nuls a (18) ($a = -(v_0 - v_1)\,T$) implica per (19) que la densitat observada a la trajectòria no pertorbada dins la zona de ventall seria constantment igual a $(q')^{-1}(v_0)$ (és a dir, la trajectòria virtual travessa el punt A i transcorre sobre una característica), coincidint amb la que hem trobat en aquest cas per al punt de sortida de la zona pertorbada del vehicle que sí s'ha vist afectat per la pertorbació. Per tant també el vehicle pertorbat atraparia el no pertorbat en aquest cas especial.

Referències

[1] M. Braun; C. S. Coleman and D. A. Drew. *Differential equation models*. New York [etc.] Springer-Verlag, 1983.

[2] R. Haberman. *Mathematical models: mechanical vibrations, population dynamics and traffic flow (an introduction to applied mathematics)*. Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1977.

[3] P. Lax. Shock waves and entropy. In: Zarantonello E. (ed.): *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*. New York, Academic Press, 1971.

[4] M. J. Lighthill and G. B. Whitham. A theory of traffic flow on long crowded roads. *Proc. Roy. Soc.* A 229 (1955), 317-345.

[5] O. Oleinik. Discontinuous solutions of nonlinear differential equations. *Usp. Math. Nauk.* (N.S.) 12 (1957), 3-73 (traducció anglesa: *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 26, 95-172*).

[6] R. Ansorge. What does the entropy condition mean in traffic flow theory? *Transportation Research Part B: Methodological.* Vol. 24B (1990), No. 2, 133-143.

[7] M. D. Salas. The curious events leading to the theory of shock waves. *Shock waves* Volume 16 (2007), Issue 6, 477-487.

[8] G. Strang. *Introduction to applied mathematics*. Wellesley-Cambridge Press, 1986.

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
calsina@mat.uab.cat

Publicat el 16 d'abril de 2018