

La fórmula de sumación de Poisson y parientes cercanos

Fernando Chamizo Lorente
Dulcinea Raboso Paniagua

1. ¿Quién teme a las series que no convergen?

¿Recuerdas cómo te metían miedo en Cálculo I con ese teorema de Riemann que afirmaba que las series condicionalmente convergentes se podían reordenar para que la suma fuera cualquier número? ¿Y qué decir de las no convergentes? ¿Te acuerdas del vértigo que te produjo $1 = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$? ¿No dejaste de confiar en el profe de Física I cuando te dijo que la delta de Dirac δ era una función que valía cero en todos los puntos e infinito en el cero pero que integraba uno? Pues, agárrate, la fórmula que resume la sumación de Poisson es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n x}. \quad (1.1)$$



Los lectores que hayan superado el susto¹ merecen una explicación, primero intuitiva y después con una prueba matemática de esas que nos dejan satisfechos.

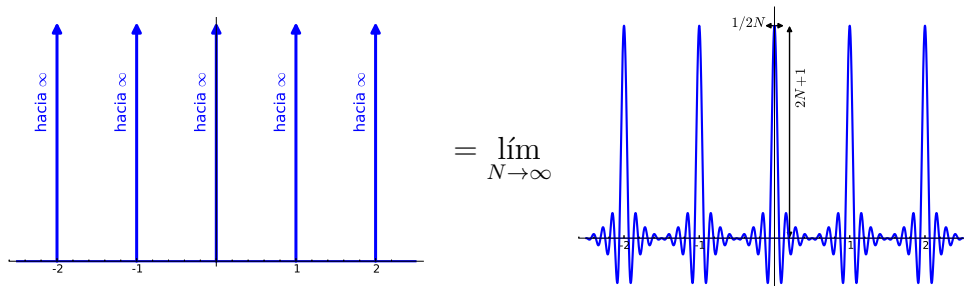
¹Si esto te parecen niñerías y te gustan las emociones fuertes, abre un libro de teoría cuántica de campos, allí verás pocas cantidades finitas distintas de los números de página (vale, es una exageración, pero si eres matemático nunca habrás visto tantas integrales divergentes juntas: la energía del vacío es mínima y ya vale infinito).

Si metemos el hacha de cortar infinitos en el segundo miembro de (1.1), queda una humilde serie geométrica que podemos sumar y hasta dibujar porque es real como la vida misma

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{-2\pi i n x} = \frac{e^{-2\pi i(N+1)x} - e^{2\pi i N x}}{e^{-2\pi i x} - 1}$$

$$= \frac{\sin(\pi(2N+1)x)}{\sin(\pi x)} = \dots \text{ (gráfico de la función) } \dots \quad (1.2)$$

El bulto grande que aparece en los enteros es de altura $2N+1$ y de anchura media más o menos $1/2N$, entonces (1.1) luce bien visualmente:



Y si integramos $D_N(x)$ contra una función que decaiga bien, el resultado se aproxima por la suma de los valores de f en los enteros que es donde están los bultos. Si confiamos en que $N \rightarrow \infty$ no nos hace ninguna jugarreta, tenemos la forma habitual de la *fórmula de sumación de Poisson*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \quad \text{con} \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx. \quad (1.3)$$

Esto es equivalente a (1.1) o lo que le da sentido. La \hat{f} es la famosa *transformada de Fourier* de f .

Vale, la deducción de (1.3) como broma está bien, pero ¿cuál es la demostración sin chapuzas? Muy fácil: se define la función 1-periódica $F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)$, que bajo condiciones adecuadas de regularidad debe ser igual a su serie de Fourier, por tanto

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 F(t) e^{-2\pi i n t} dt \right) e^{2\pi i n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i n t} dt \right) e^{2\pi i n x} \quad (1.4)$$

y basta tomar $x = 0$.

2. Identidades a tutiplén

Una vez que tenemos el martillo, busquemos los clavos. La función más sencilla que sabemos integrar es la exponencial. Pongámosle un menos en el argumento para que decaiga, valor absoluto para que no se desmande en $-\infty$ y una pizca positiva de $2\pi\alpha$ para decorar. Esto es, tomemos $f(x) = e^{-2\pi\alpha|x|}$. El lado izquierdo de (1.3) es una serie geométrica, bueno... dos, que sabemos sumar, lo que unido al cálculo de las integrales del lado derecho da lugar a

$$\frac{e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha}}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} = \frac{\alpha}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2}. \quad (2.1)$$

Una bella identidad que generaliza el bien conocido $\pi^2/6 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ del maestro sumador Euler. ¿Lo generaliza? Sí, se deja como ejercicio deducirlo de (2.1) haciendo la pizca $2\pi\alpha$ infinitesimal.

Nuestra prueba de (2.1) requiere $\alpha > 0$ pero Poisson nos ha dado más de lo esperado: por extensión analítica se cumple para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\alpha i \notin \mathbb{Z}$. Para α imaginario puro, (2.1) es el conocido desarrollo de la cotangente, también del maestro, y su desarrollo de Laurent permite calcular $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}$ cuando k es par.

Los valores absolutos tienen mala fama en el cálculo infinitesimal por eso de que los pobrecillos no son derivables. Teniendo en cuenta que los cuadrados son positivos a más no poder, cambiamos de variable y consideramos $f(x) = e^{-2\pi\alpha x^2}$. Jugando con variaciones² de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, la fórmula (1.3) produce la identidad válida para $\Re(\alpha) > 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\alpha n^2} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{2\alpha}}. \quad (2.2)$$

Tomando $\alpha = \frac{1}{8\pi}$ la segunda suma tiene términos minúsculos para $n \neq 0$, eso da pie a que te burles de tus amigos más crédulos con la fórmula falsa $\pi = \left(\frac{1}{2} \sum_{n=-15}^{15} e^{-n^2/4}\right)^2$ cuyo error, de tamaño menor que 10^{-16} , es indetectable con una calculadora.

²Según se recoge en [Spi65, 3-41], Lord Kelvin afirmó que esta evaluación de la integral es tan evidente para un matemático como que dos y dos son cuatro. No te preocupes, aparte de despoblar las facultades de matemáticas lo habría hecho con las escuelas de ingenieros aeronáuticos por su desconfianza en la navegación aérea.

Tomemos ahora el intervalo $I = [-t, t]$ con $t > 0$ no entero. Si f_t vale uno en I y 0 fuera, (1.3) aplicado a f_t nos da

$$2[t] + 1 = 2t + \sum_{n \neq 0} \frac{\text{sen}(2\pi n t)}{\pi n} \quad (2.3)$$

con $[t]$ la parte entera de t . Pero ¡un momento! si t es entero está claro que esto es falso porque la serie se anula ¿Por qué 1.999 es tan diferente de 2 a efectos de esta fórmula? Una manera de explicarlo es que si t no es entero entonces se puede buscar una g muy regular que aproxime muy bien a f_t y tal que las sumas que aparecen en (1.3) sean muy parecidas para f_t y g . La regularidad permite aplicar el análisis de Fourier sin reparos en la demostración de (1.3). Por otro lado, si t es entero, la suma del primer miembro es muy sensible a tomar funciones parecidas, por ejemplo, para $f_{t+\epsilon}$ y $f_{t-\epsilon}$ con $\epsilon = 10^{-\text{mucho}}$ la diferencia es de dos unidades. Otra manera de verlo es notar que (2.3) no es más que el desarrollo en serie de Fourier de la onda triangular $2[t] - 2t + 1$ que, obedeciendo a la teoría, debe converger al punto medio en las discontinuidades de salto. La falta de regularidad está reflejada en la ausencia de convergencia absoluta en la serie (2.3) permitiendo que $t = 1.999$ y $t = 2$ den resultados dispares. En principio es posible (pero no saludable por las cuestiones de regularidad) considerar las series de Fourier como aplicaciones de la fórmula de sumación de Poisson porque a fin de cuentas son sumas sobre los enteros.

Una vez que hemos rozado el agrídulce sabor de la falta de convergencia absoluta, nos meteremos en el barrizal de la absoluta no convergencia.

La integral $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-s} \cos(2\pi x) dx$ tiene sentido para cualquier $0 < s < 1$ y se puede evaluar como $2(2\pi)^{s-1} \sin(\pi s/2) \Gamma(1-s)$ donde Γ es la función especial $\Gamma(u) = \int_0^{\infty} x^{u-1} e^{-x} dx$ introducida por Euler (¡otra vez!) [Art64] para generalizar el factorial: $\Gamma(n) = (n-1)!$ cuando $n \in \mathbb{Z}^+$. Tomando $f(x) = |x|^{-s}$ en (1.3) y cerrando los ojos se obtiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{-s} = 2(2\pi)^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{s-1}. \quad (2.4)$$

Esto tiene muy mal aspecto, si una suma existe la otra no y $n = 0$ da lugar a infinitos pero... había una cosa llamada función $\zeta(s)$ que extendía analíticamente $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ y servía para estudiar los primos. Si nos olvidamos de los $n = 0$ y de la convergencia, lo anterior se reescribe como

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s), \quad (2.5)$$

que es la ecuación funcional correcta en forma asimétrica. Para el que esté ansioso por justificar este misterio, está la bibliografía de (la vieja) guardia [Gui41] [Ing90, III.4]. Un ingrediente principal es que para $s > 0$, $s \neq 1$, se cumple

$$\zeta(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N n^{-s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} \right), \quad (2.6)$$

lo cual es obvio para $s > 1$ y permite cancelar infinitos en el caso $0 < s < 1$.

3. Más dimensiones y menos dimensiones

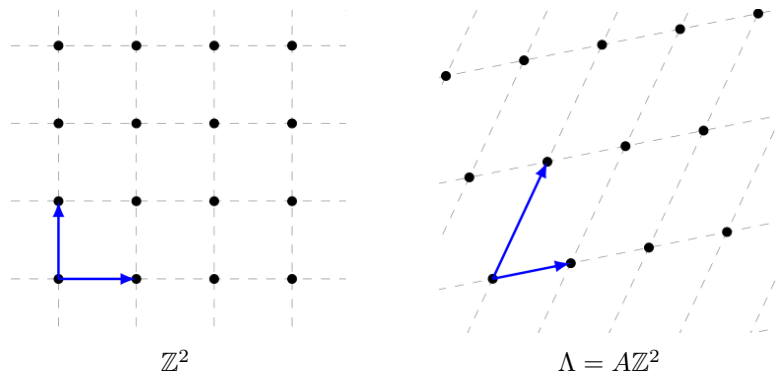
Extender (1.3) a más dimensiones es pura rutina: se suma en $\vec{n} \in \mathbb{Z}^d$ y en la definición de \hat{f} se escribe $\vec{\xi} \cdot \vec{x}$. Una vez que hemos subido la dimensión la podemos bajar. No es broma del todo. Si f tiene simetrías especiales, es posible agrupar valores iguales dando lugar a una fórmula en menos dimensiones aparentemente muy distinta.

Por ejemplo, si $d = 2$ y f es radial, $f(\vec{n}) = g(n_1^2 + n_2^2)$ y $g(n)$ aparecerá con multiplicidad $r(n)$, el número de representaciones como suma de dos cuadrados. Trabajando los detalles [IK04, §4.4], se tiene una impresionante fórmula con función de Bessel y todo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r(n) g(n) = \pi \int_0^{\infty} g(x) dx + \pi \sum_{n=1}^{\infty} r(n) \int_0^{\infty} g(x) J_0(2\pi \sqrt{nx}) dx \quad (3.1)$$

que es fundamental para estudiar el problema del círculo de Gauss [LWL24].

Por si eso sabe a poco, generalicemos \mathbb{Z}^d considerando un retículo en \mathbb{R}^d . Esto es el conjunto de combinaciones lineales enteras de d vectores linealmente independientes o simplemente $\Lambda = A\mathbb{Z}^d$ con A una matriz cuadrada no singular y se llama retículo dual a $\Lambda^* = (A^{-1})^t \mathbb{Z}^d$.



Con la fórmula de cambio de variable tenemos fácilmente la generalización d -dimensional en retículos

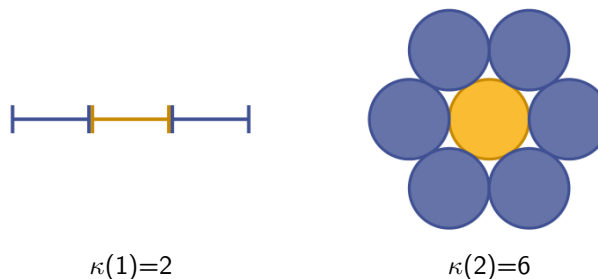
$$\sum_{\vec{n} \in \Lambda} f(\vec{n}) = |\Lambda|^{-1} \sum_{\vec{n} \in \Lambda^*} \widehat{f}(\vec{n}) \quad (3.2)$$

donde $|\Lambda| := \det(A)$. Por ejemplo, si elegimos $f(\vec{x}) = e^{-2\pi\alpha\|\vec{x}\|^2}$, (2.2) se generaliza a

$$\sum_{\vec{n} \in \Lambda} e^{-2\pi\alpha\|\vec{n}\|^2} = |\Lambda|^{-1} (2\alpha)^{-d/2} \sum_{\vec{n} \in \Lambda^*} e^{-\frac{\pi\|\vec{n}\|^2}{2\alpha}}. \quad (3.3)$$

Vamos a ver una bella y rápida aplicación [Sko02] de (3.3) al “kissing number problem” que pregunta cuál es el máximo número de esferas que pueden besar simultáneamente a otra, todas del mismo tamaño. Aquí “besar” significa “tocar”. Sí, está claro que besar no es lo mismo que tocar... mejor no seguir por ahí.

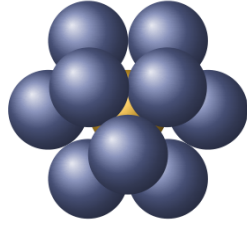
En dimensiones 1 y 2 es sencillo calcular el número de osculación o “kissing number” $\kappa(d)$. Gráficamente:



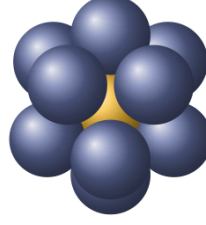
La dificultad aumenta en dimensión 3, y probar $\kappa(3) = 12$ no es nada fácil. El problema es famoso por el desacuerdo entre los matemáticos I. Newton (sí, también físico) y D. Gregory, polémica³ que no fue resuelta con rigor hasta mediados del siglo XX.

Situando siete esferas como en la figura anterior para $d = 2$, podemos colocar exactamente tres esferas más en la parte superior que estén en contacto con la esfera central. Si hacemos lo mismo en la parte inferior, tenemos doce esferas tocando la central que están simultáneamente en contacto con otras. Esta manera de acomodar las esferas es conocida como la configuración de Kepler.

³Mientras que para el primero el límite era 12, Gregory pensaba que se podría añadir una esfera más.



Config. de Kepler



Config. icosaedro

También podemos colocar las esferas besuqueadoras en los vértices de un icosaedro regular pero, a diferencia de lo que ocurre con la configuración de Kepler, ahora las esferas se pueden mover libremente sin llegar a tocar al resto. De hecho, el espacio “extra” entre cualesquiera dos de las doce esferas exteriores no es para nada despreciable y no está claro si cabe una decimotercera apretujándolas un poco.

Aquí nos restringimos al “lattice kissing number” $\ell(d)$, que es lo mismo pero suponiendo que los centros de las esferas están en un retículo. Uno tendería a pensar que $\kappa(d) = \ell(d)$ por eso de la elegancia y el orden en matemáticas, de hecho los seis valores conocidos⁴ de $\kappa(d)$ coinciden con $\ell(d)$ pero se sabe indirectamente que $\kappa(9) \neq \ell(9)$. Por otro lado, está claro que $\kappa(d) \geq \ell(d)$.

Llamemos $F(\alpha)$ al lado izquierdo de (3.3) multiplicado por $\alpha^{d/2}$. Si hemos logrado poner ℓ esferas de radio $1/2$ con centros en Λ besando una esfera en el origen, separando de la suma $\|\vec{n}\| = 0, 1$, mayor,

$$F(\alpha) = \alpha^{d/2} \left(1 + \ell e^{-2\pi\alpha} + \sum_{\|\vec{n}\|>1} e^{-2\pi\alpha\|\vec{n}\|^2} \right). \quad (3.4)$$

Lo crucial es que (3.3) asegura que $F(\alpha)$ es creciente. Si $\alpha > \frac{d}{4\pi}$,

$$0 \leq F'(\alpha) = \frac{d}{2} \alpha^{d/2-1} + \alpha^{d/2-1} \ell e^{-2\pi\alpha} \left(\frac{d}{2} - 2\pi\alpha \right) + \text{cosas negativas}. \quad (3.5)$$

Eligiendo de manera óptima $\alpha = \frac{d+2}{4\pi}$, se concluye

$$\ell(d) \leq \frac{d}{2} e^{d/2+1}. \quad (3.6)$$

Esto no está nada mal si se compara con los resultados conocidos cuando $d \rightarrow \infty$. Por cierto, un problema relacionado es el empaquetamiento de esferas en dimensiones altas y las mejores cotas superiores se obtienen con procedimientos parecidos [PZ04] [CE03].

⁴Son $\kappa(1) = 2$, $\kappa(2) = 6$, $\kappa(3) = 12$, $\kappa(4) = 24$, $\kappa(8) = 240$, $\kappa(24) = 196560$, como dijo J.H. Conway del último, es que hay un montón de espacio allí arriba. Fue Gauss el primero que probó $\ell(3) = 12$, dando un retículo sencillo que sustituye al icosaedro antes mencionado.

4. Sumas parciales con giros inesperados

En teoría analítica de números a menudo aparece el problema de conseguir acotaciones no triviales de sumas trigonométricas. Por ejemplo, al escribir una función como superposición de ondas, $g(x) e^{2\pi i f(x)}$ con g la amplitud y f la fase, si queremos estudiar el promedio de la función en los enteros $a, a+1, a+2, \dots, b$, tras sumar por partes (separando la amplitud no oscilatoria), nos enfrentamos a sumas del tipo

$$\sum_{n=a}^b e^{2\pi i f(n)}. \quad (4.1)$$

El método de van der Corput [GK91] se basa en que las sumas trigonométricas se pueden aproximar por integrales y que estas a su vez pueden ser estimadas. La acotación más básica permite obtener acotaciones no triviales en rangos en los que la derivada segunda de la fase es moderadamente pequeña y la sumación de Poisson es un arma fundamental para transformar cualquier suma suficientemente regular en una suma de integrales oscilatorias.

Si en (1.3) consideramos $e^{2\pi i f(x)}$ multiplicada por la función característica de $[a, b]$ se llegaría a

$$\sum_{n=a}^b e^{2\pi i f(n)} \ll \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_a^b e^{2\pi i (f(x) - nx)} dx. \quad (4.2)$$

Las comillas se deben a que se requiere cierta regularidad y la discontinuidad no gusta mucho, siempre puede llevar a complicaciones técnicas. Aunque tampoco estamos tan lejos de la “verdad” si tenemos cierto control sobre alguna derivada de f en $[a, b]$. Por ejemplo, si f' es monótona y $|f'| \leq 1/2$ tendríamos

$$\sum_{n=a}^b e^{2\pi i f(n)} = \int_a^b e^{2\pi i f(x)} dx + \text{error}, \quad (4.3)$$

donde error es menor que cierta constante absoluta, o si f satisface $f'' \geq \lambda > 0$, entonces

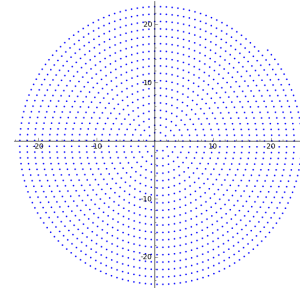
$$\left| \sum_{n=a}^b e^{2\pi i f(n)} \right| \leq C (f'(b) - f'(a) + 1) \lambda^{-1/2} \quad (4.4)$$

para cierta constante C .

Un ejemplo curioso es el que ocurre al dibujar los números complejos

$$z_N = \sum_{n=1}^N e^{\pi i \sqrt{n}}, \quad (4.5)$$

cuyo resultado revela una estructura de espiral que es inesperada si se desconoce el método de van der Corput.



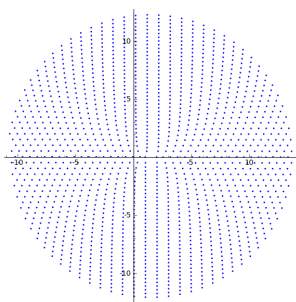
Escribiendo $S(N; \alpha) = \sum_{n=1}^N e^{2\pi i \alpha \sqrt{n}}$, con $\alpha > 0$, la derivada de $\alpha \sqrt{x}$ decrece, de hecho para α razonablemente pequeño después de algunos términos esta derivada es menor que uno, y según las ideas del método de van der Corput podemos esperar una buena aproximación mediante

$$\int_1^N e^{2\pi i \alpha \sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{N}}{\pi \alpha} e^{2\pi i \alpha \sqrt{N} - \pi i/2} + \text{error} \quad (4.6)$$

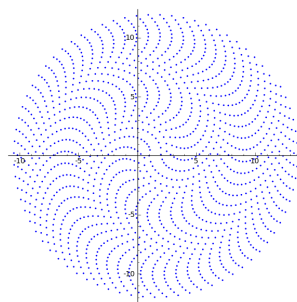
donde, como antes, el **error** es menor que una constante. Esto sugiere que al tener en cuenta únicamente el término principal, la sucesión finita $\{S(n; \alpha)\}_{n=1}^N$ se debería parecer a una espiral de Arquímedes

$$\frac{t}{2\pi^2 \alpha^2} (\sin t, -\cos t) \quad \text{con } t \in [1, 2\pi \alpha \sqrt{N}].$$

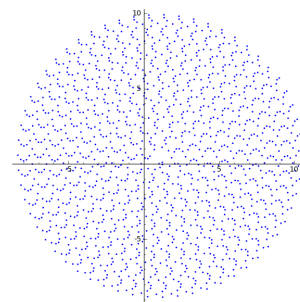
La sorpresa es que en los dibujos muy rara vez se observa la estructura de espiral. Por ejemplo, para $N = 1000$ se obtienen las siguientes figuras para los valores indicados de α ,



$\alpha = 1$



$\alpha = 65/64$



$\alpha = 1.3$

Esto es en cierto sentido una ilusión óptica, puesto que si conectamos puntos consecutivos en la sucesión con líneas, las espirales de Arquímedes reaparecen y, como predice (4.6), un valor mayor de α da una menor distancia entre giros sucesivos. Los patrones que se observan llevan a consideraciones aritméticas y se estudian con detalle para α^2 entero en [CR15b].

5. Bienvenido al mundo modular

La variable compleja es muy rígida, en cuanto pones muchas condiciones te quedas sin funciones, como las compañías teatrales mediocres. Por ejemplo, si uno busca las funciones F holomorfas en \mathbb{C} (enteras) que tengan dos periodos, digamos $F(z) = F(z+1)$ y $F(z) = F(z+i)$, sólo hay una muy aburrida una vez que se ha especificado $F(0)$, la función constante $F(z) = F(0)$.

Cuando uno considera funciones holomorfas en el semiplano superior $\mathbb{H} = \{z : \Im(z) > 0\}$ e impone condiciones relacionadas con ciertos grupos fuchsianos, la teoría adquiere una riqueza y profundidad increíbles. Es la teoría de las formas modulares y si no has oído mencionarla, no eres de este mundo (matemático).

Esencialmente una función modular⁵ es una función holomorfa en \mathbb{H} invariante por las transformaciones $z \mapsto z+1$, $z \mapsto -1/z$ y se dice forma modular si además es holomorfa en el infinito. La traslación y la inversión (negativa) generan el grupo $SL_2(\mathbb{Z})$ pero las necesidades aritméticas llevan a considerar distintos subgrupos, entre los que destacan los grupos de congruencias $\Gamma_0(N)$.

En este contexto, se puede probar por ejemplo que sólo hay una función holomorfa en \mathbb{H} que cumple

$$F(z) = F(z+1), \quad F(z) = \frac{-1}{4z^2} F\left(-\frac{1}{4z}\right), \quad (5.1)$$

una vez que especificamos el valor de $F(i\infty) := \lim_{\Im(z) \rightarrow +\infty} F(z)$, supuesto finito al igual que $\lim_{\Im(z) \rightarrow 0^+} \Im(z)^{2017} F(z)$, donde puedes cambiar 2017 por cualquier $N > 2$, siempre da cero.

Vamos a ver cómo deducir de ello un resultado clásico pero complicado de teoría de números gracias a (1.3). Definamos $F(z)$ como el lado izquierdo de (2.2) elevado a la cuarta potencia con $\alpha = -iz$. Esto es,

$$F(z) := \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n^2 z} \right)^4 = \sum_{n=0}^{\infty} r_4(n) e^{2\pi i n z}, \quad (5.2)$$

donde $r_4(n)$ es el número de representaciones como suma de cuatro cuadrados. Gracias a (2.2), la función F satisface (5.1) y proclamamos, según lo anterior, que es la única con $F(i\infty) = 1$. El alumno genial y desconfiado de la última fila, un tal Eisenstein sin escalinata y con “s” y “e”, podría dar un

⁵Las funciones modulares de peso k responden a la misma definición pero exigiendo $f(z) = z^{-k} f(-1/z)$.

ejemplo desconcertante

$$G(z) = \frac{1}{\pi^2} \sum_m \sum_{\substack{n \\ (m,n) \neq (0,0)}} \left(\frac{4}{(m+4nz)^2} - \frac{1}{(m+nz)^2} \right). \quad (5.3)$$

A pesar de lo aparatoso de la fórmula es muy sencillo (sí, de verdad) comprobar que G verifica (5.1) si no te distraes preocupándote con la convergencia. Por otro lado, hallar $G(i\infty)$ se reduce a considerar la contribución de $n=0$ que es $\pi^{-2} \sum_{m \neq 0} 3m^{-2} = 1$. Hay que admitir entonces la identidad delirante

$F(z) = G(z)$ por la unicidad de las funciones que cumplen (5.1).

Todavía hay más, con (1.3) aplicado a $f(n) = (n+w)^{-2}$ y un poco de pericia con las integrales (de Cauchy, si puede ser), se tiene

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+w)^2} = -4\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m e^{2\pi i m w}, \quad (5.4)$$

que es válida para $w \in \mathbb{H}$ tal como está y extensible a $-w \in \mathbb{H}$ cambiando $e^{2\pi i m w}$ por $e^{-2\pi i m w}$. Es posible también obtener esta fórmula como consecuencia indirecta de (2.1). Sustituyendo en G y haciendo los cálculos, separando enes positivas negativas y nulas, la identidad delirante se convierte en

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_4(n) e^{2\pi i n z} = 1 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (m e^{2\pi i m n z} - 4 m e^{2\pi i 4 m n z}). \quad (5.5)$$

Si ahora comparamos los coeficientes de $e^{2\pi i n z}$ en ambos miembros, se tiene el golpe final, la fórmula apabullante:

$$r_4(n) = 8 \sum_{4 \nmid d, d|n} d. \quad (5.6)$$

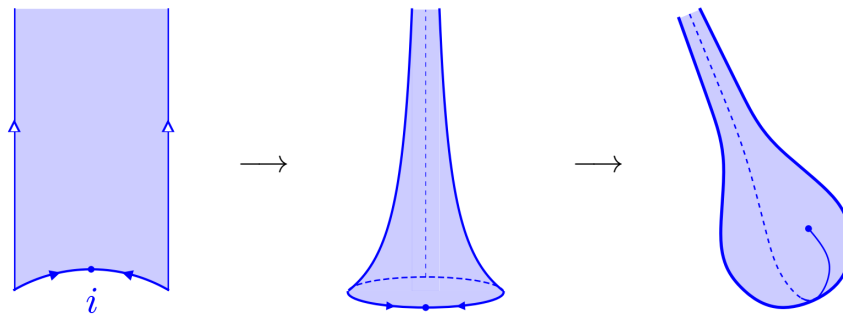
Una identidad limpia, breve y profunda. Por ejemplo, sin escribir ni una cuaterna de cuadrados, se deduce

$$r_4(2017) = 8(1 + 2017) = 16144. \quad (5.7)$$

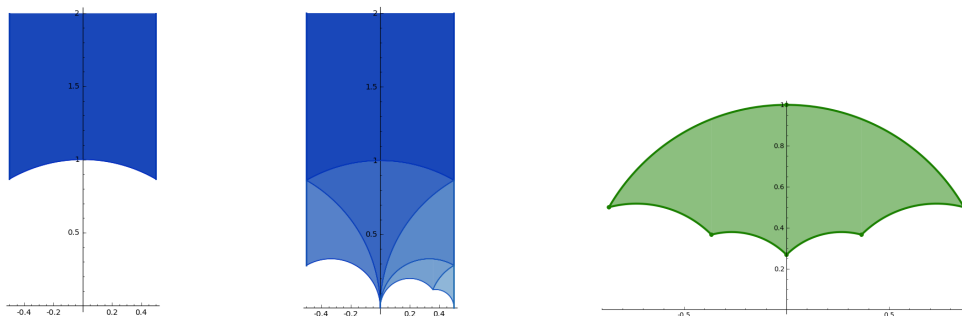
¿Y qué ocurre para otro número de cuadrados? ¿Hay fórmulas tan limpias? Sólo en algunos casos y eso está relacionado con las propiedades de las formas modulares [Gro85] [Har20] [Ran77] [Iwa97]. El lector abrumado encontrará en [Ven70] una prueba elemental de (5.6) y de otras fórmulas relacionadas.

Las formas modulares han estado tradicionalmente ligadas a la variable compleja. Algunas de ellas aparecen naturalmente al aplicar (1.3) para probar la ecuación funcional de ciertos objetos relevantes en aritmética, como la función ζ . En este contexto, H. Maass se percató de que al tratar cuerpos algebraicos reales era natural introducir funciones con simetrías similares pero no holomorfas⁶. Si perdemos la variable compleja ¿qué se salva? Una teoría endiabladamente complicada pero útil y bella.

El semiplano \mathbb{H} fue introducido por Poincaré como modelo de geometría hiperbólica (curvatura -1) dotado de la métrica $ds^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$. Esto significa que arriba las cosas están más cerca de lo que parecen y abajo lo están menos. Las formas modulares no holomorfas invariantes por la acción de un grupo Γ , se pueden entender como funciones en la superficie (de Riemann) obtenida al identificar los bordes de una región llamada dominio fundamental. Por ejemplo, para $SL_2(\mathbb{Z})$ se tiene una esfera en la que un punto se lleva a infinito.



De hecho siempre se puede elegir como dominio fundamental un polígono hiperbólico cuyos lados son arcos de semicircunferencias o rectas verticales (los dos tipos de geodésicas).



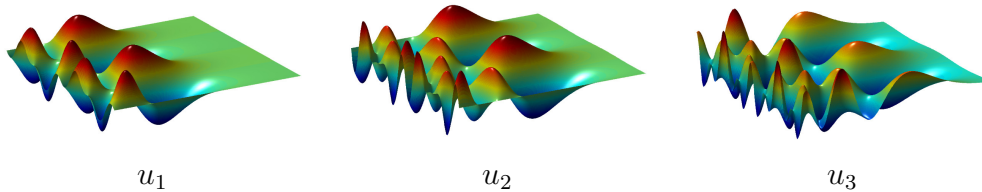
Una diferencia notable entre los dos primeros dominios, correspondientes a $SL_2(\mathbb{Z})$ y $\Gamma_0(4)$, y el tercero es que este último corresponde a un grupo

⁶En palabras de A. Weil [Wei79, p.463], fue necesario Maass para sacarnos del gueto de las funciones holomorfas.

compacto que no tiene cúspides (vértices en la recta real o en el infinito). Aunque el caso compacto es menos común en teoría de números desde el punto de vista de sus posibles aplicaciones aritméticas, tiene una importante ventaja en relación a un tema básico en el análisis armónico, la expresión de una función como superposición de “tonos puros”: autofunciones de un operador.

Un ejemplo familiar son las autofunciones $e^{2\pi i n x}$ del operador $f \mapsto f''$, efectivamente las series de Fourier en \mathbb{R}/\mathbb{Z} de toda la vida. En \mathbb{H} hay un operador natural que es invariante por las transformaciones del grupo, con autovalores $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ correspondientes⁷ a autofunciones normalizadas $\{u_j(z)\}_{j=0}^\infty$ (no holomorfas) llamadas formas de Maass.

La primera autofunción es la función constante $u_0(z) = |\Gamma \backslash \mathbb{H}|^{-1/2}$. Las imágenes representan las primeras formas de Maass no triviales para $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.



Aunque para obtener el desarrollo espectral de cualquier función automorfa, se deben considerar otras funciones que, a diferencia de las formas de Maass, no son de cuadrado integrable pero que siguen siendo autofunciones. Hablamos de las series de Eisenstein (el alumno listo de última fila reaparece) de las que se dice que pertenecen al espectro continuo y que están relacionadas con las cúspides de Γ , sus puntos del infinito. De este modo, al sustituir \mathbb{R} por \mathbb{H} , obtenemos

$$f(z) = \underbrace{\sum a_j u_j(z)}_{\text{espectro discreto}} + \left(\text{contribución del espectro continuo} \right). \quad (5.8)$$

¿Y la ventaja de trabajar con grupos compactos? pues en ese caso la parte continua (con aspecto realmente feo) desaparece por lo que nos quedamos únicamente con la parte discreta del desarrollo.

Aún más, si bien el mundo holomorfo nos ofrece identidades falsas (o aproximadas) ligadas al desarrollo de Fourier de formas modulares clásicas,

⁷Las formas modulares holomorfas de alguna manera se corresponden con $\lambda = 0$ ya que son funciones armónicas por las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

el no holomorfo no iba a ser menos. Por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} r(n) r(3n+2) \sqrt{n} e^{-(\log(n)/4)^2} \quad (5.9)$$

está muy cerca de $72 e^9 \sqrt{\pi}$. De hecho, su error relativo a pesar de que no es cero es menor que $3 \cdot 10^{-7}$ y, por increíble que parezca, la precisión del error en esta y otras aproximaciones similares depende del tamaño de ciertos autovalores.

Para no dejar de sorprendernos, también tenemos una fórmula de sumación de Poisson en este tipo de superficies con inmediatas consecuencias aritméticas: la fórmula de Kuznetsov [Kuz80] que da una interpretación en términos de autovalores de la distribución del inverso multiplicativo cuando variamos el módulo (publicidad poco subliminal: en [CR15a] dimos una prueba de la fórmula de Kuznetsov que hasta un niño⁸ podría seguir). Los últimos cuarenta años han mostrado que lo poco que sabemos de autovalores y autofunciones es suficiente para decir cosas que no sabíamos de la distribución de los inversos y la teoría espectral en este contexto se ha desarrollado de la mano de la teoría de números [Rab15].

Así podemos ver cómo distintas áreas de las matemáticas conviven en estrecha relación, aunque por supuesto lo anterior solo muestra la punta de un iceberg, e icebergs hay muchos (como veremos en la siguiente sección).

6. Análisis, aritmética y geometría

Comencemos respetando el orden alfabético por el análisis. La *ecuación de ondas* en la recta real es

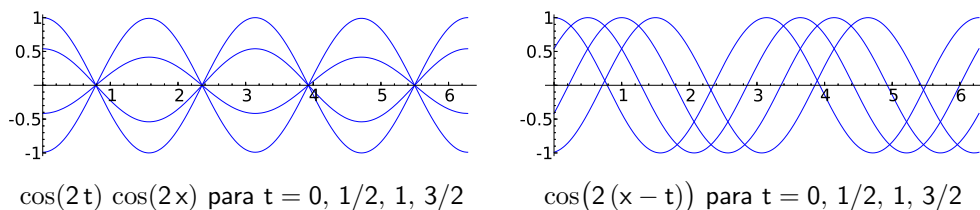
$$u_{tt} = u_{xx} \quad \text{con} \quad u = u(x, t) \quad (6.1)$$

donde los subíndices indican derivadas. ¿De dónde sale esta ecuación? ¿Por qué es una ecuación “de ondas”? La manera más rápida de responder usando solo conceptos físicos básicos y trampas, a partes iguales, es que viene de que la aceleración es derivar dos veces con respecto al tiempo y la fuerza por unidad de longitud que opone una cuerda elástica a ser deformada es proporcional a la curvatura que queramos imponerle con una constante de proporcionalidad dada por la tensión, y de aquí se saca $u_{tt} = u_{xx}$, escribiendo $a = F/m$ con unidades llamativas. ¿Y las trampas? Si a tu profe de geometría diferencial le dices que la curvatura de la gráfica de $y = f(x)$ es $f''(x)$, te

⁸(con un máster en matemáticas)

mirará con cara de -273.15°C (cero absoluto) pero si la gráfica es muy plana ($f' \approx 0$) entonces ambas cantidades son muy similares, además tampoco la tensión es muy constante sin esta hipótesis. Para los más exigentes, un siglo después, el electromagnetismo de J.C. Maxwell ofreció un contexto físico e importante (¿qué harías sin tu móvil, tu WiFi, tu TV...?) donde la ecuación de ondas es exacta [Max65]. En cualquier caso, piensa en (6.1) como un modelo para cosas que oscilan como una cuerda. La ecuación (6.1) en realidad tiene una solución general fácil⁹ dada por la fórmula $u(x, t) = f(x-t) + g(x+t)$ y por tanto toda onda solución se escribe como suma de una que viaja a la derecha y otra a la izquierda, ambas con velocidad uno.

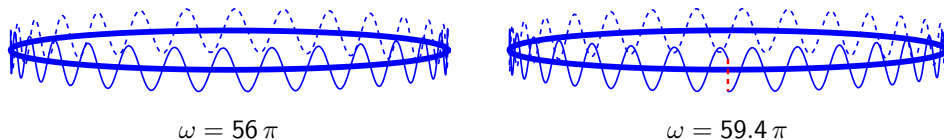
El gran mantra del análisis armónico es que *toda onda es superposición de ondas estacionarias*. Estas ondas especiales son, como su nombre indica, las que de algún modo no se mueven: para cada punto fijado solo vemos oscilaciones arriba y abajo en el tiempo de las de toda la vida, con un seno o un coseno. Si optamos por las segundas, matemáticamente son las soluciones de (6.1) de la forma $u(x, t) = \cos(\omega t) \phi(x)$ y podemos limitarnos a $\omega \geq 0$ por la simetría. Si no imponemos ninguna condición de contorno, (6.1) nos lleva a que $\phi(x)$ debe ser una combinación lineal de $\sin(\omega x)$ y $\cos(\omega x)$. El lector avisado notará la paradoja que plantea que las ondas estacionarias no se muevan y la velocidad uno, antes mencionada, de las soluciones de (6.1). Pensémoslo con un ejemplo: la onda estacionaria $u(x, t) = \cos(2t) \cos(2x)$ no se mueve, pero se descompone en la semisuma de $\cos(2(x-t))$ y $\cos(2(x+t))$ que se mueven con velocidad uno hacia la derecha e izquierda, respectivamente. Mientras se inventa el papel animado, aquí van unos pocos fotogramas superpuestos:



De alguna forma la interferencia entre las ondas que viajan a derecha y a izquierda es tan perfecta que el resultado es la inmovilidad.

Pensemos ahora que nuestras oscilaciones tienen lugar en un anillo muy fino representado por la circunferencia unidad, lo que equivale a poner condiciones 1-periódicas en la x en (6.1) identificando $2\pi x$ con el ángulo. Para que la oscilación no se rompa, se necesita que ω sea un múltiplo entero de 2π , la longitud de la circunferencia.

⁹Las complicaciones comienzan cuando uno pone condiciones de contorno en intervalos acotados o cuando se consideran dimensiones mayores donde en vez de dos direcciones, derecha e izquierda, hay infinitas.



Debe conceder el lector que $\omega \in 2\pi\mathbb{N}$ es una aparición modesta pero honesta de la aritmética. Antes de dar paso a la geometría, consideremos el siguiente monstruo no convergente

$$u(x, t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi n t) \cos(2\pi n (x - x_0)). \quad (6.2)$$

Formalmente resuelve (6.1) y según (1.1), con $x \mapsto x_0 - x$ y tomando partes reales, para $t = 0$ es una delta de Dirac en la circunferencia sobre el punto de ángulo $2\pi x_0$. Como las soluciones de la ecuación de ondas tienen velocidad uno, esta delta de Dirac reaparecerá en el mismo lugar para cada tiempo entero, la redondez de la circunferencia hace indiferente que las ondas viajen a derecha o izquierda. Si tomamos la traza, esto es, si integramos en $0 \leq x = x_0 \leq 1$ (sí, ya sabemos que bastaría tomar $x = x_0$), se concluye que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi n t)$ es una delta de Dirac en cada entero. Hemos hecho un negocio redondo, nunca mejor dicho: usando la ecuación de ondas hemos deducido (1.1) de (1.1). Es un buen momento para pasar a la geometría.

En general, la ecuación de ondas en una variedad riemanniana M (un objeto geométrico en que sepamos medir ángulos y distancias) es:

$$u_{tt} = \Delta u \quad \text{con} \quad u = u(x, t) \quad (6.3)$$

donde Δu , denota el *laplaciano* de u , para $M = \mathbb{R}^n$ es la suma de las derivadas segundas respecto a las coordenadas de x . El nombre no deriva de un santoral rural sino del insigne P. Laplace que lo usó con especial maestría en relación con la gravitación. Si queremos saber por ejemplo cómo oscila una membrana, debemos usar (6.3). Aquí nos centraremos en el caso en que M es compacta, para fijar ideas uno puede pensar en el caso de una superficie cerrada como una esfera o un toro.

Las ondas estacionarias $u(x, t) = \cos(\omega t) \phi(\vec{x})$ para ser solución de (6.3) deben satisfacer $-\Delta\phi = \omega^2 \phi$, esto es, que ω^2 sea un autovalor de $-\Delta$ con autofunción ϕ . Se sabe que tales autovalores forman un conjunto discreto $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$. El primo n dimensional del monstruo (6.2) es¹⁰

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \cos(t \sqrt{\lambda_k}) \sum_m \phi_{km}(x) \phi_{km}(x_0). \quad (6.4)$$

¹⁰En la literatura especializada no se le llama ni primo ni monstruo porque no sería serio, sino *solución fundamental de la ecuación de ondas*.

donde $\phi_{km}(x)$ son las autofunciones correspondientes al autovalor λ_k ortonormalizadas, esto significa $\int_M \phi_{km} \phi_{k'm'} = 0$ excepto si $(k, m) = (k', m')$, en cuyo caso da uno. ¿De dónde sale el parentesco entre (6.4) y (6.2)? Cuando Δ es la derivada segunda de Cálculo I, ya habíamos visto que las ϕ_{km} solo podían ser $\sin(2\pi kt)$ y $\cos(2\pi kt)$, que corresponden a $\sqrt{\lambda_k} = 2\pi k$, si las ortonormalizamos, adquieren unos factores de fantasía:

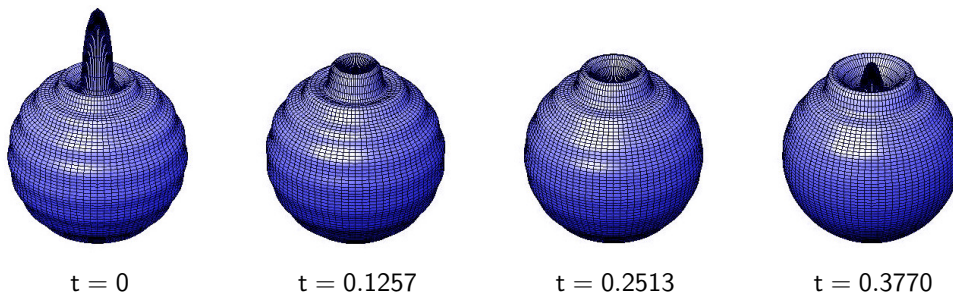
$$\phi_{k1}(x) = \sqrt{2} \sin(2\pi kt) \quad \text{y} \quad \phi_{k2}(x) = \sqrt{2} \cos(2\pi kt), \quad (6.5)$$

con la excepción $\phi_{02}(x) = 1$.

Haciendo las cuentas, con esta elección, (6.2) es (6.4) para la circunferencia.

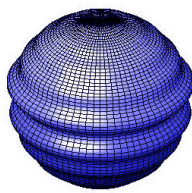
La similitud va más allá, el mantra *toda onda es superposición de ondas estacionarias* (llamado completitud espectral entre los expertos) asegura que (6.4) para $t = 0$, es una delta de Dirac en el punto x_0 .

Antes de dar el toque de gracia, dejaremos descansar al lector con un ejemplo. ¿Qué ocurre si tiramos un fuerte pellizco a una pelota elástica? En el primer instante el estiramiento rebotará violentamente y después se propagarán las oscilaciones a lo largo de la esfera. Una delta de Dirac es un pellizco superbestia y entonces suena bien que si nos quedamos solo con los primeros términos de (6.4) tendremos un pellizco solo bestia¹¹. En el caso de la esfera se conoce que $\lambda_k = k(k+1)$ y las ϕ_{km} son unas funciones raras pero importantes llamadas *armónicos esféricos*. Enseñándole a nuestro ordenador cómo calcularlas y limitando la suma a $k \leq 20$ se tienen las siguiente figuras, en las que se ha escalado el tamaño del pellizco por motivos estéticos:

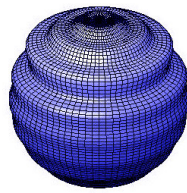


El rebote es, como preveíamos, muy rápido. Después de que las ondas se propagan hasta el polo sur y causan un chichón allí, vuelven. Veamos esos últimos instantes en que el pellizco vuelve a reproducirse:

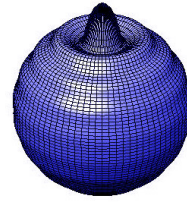
¹¹Si quieres algo intermedio pero mucho más violento busca en la red simulaciones de colisiones de un asteroide con la Tierra. Con un poco de imaginación se dan un aire a las figuras de más adelante, ¿verdad?



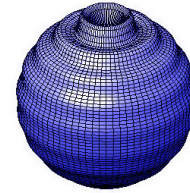
t = 4.7752



t = 5.2779



t = 6.0319



t = 6.2832

¡Visto y no visto! El pellizco asoma para $t = 6.0319$ con fuerza menor que al principio pero el rebote es tan rápido que no es fácil capturar numéricamente el momento de máxima altura. Más adelante le tendremos que pedir algunas disculpas a nuestro ordenador.

Volvamos a (6.4) en total generalidad pero conservando en mente las figuras anteriores. Si integramos como antes en $x = x_0$ (tomamos la traza), surge una conjetura natural y alucinante:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \cos(t \sqrt{\lambda_k}) \stackrel{?}{=} \sum \delta(t - \text{tiempos de retorno de las ondas}). \quad (6.6)$$

En el caso de la circunferencia, esto cuadra y en el de la esfera el valor $t = 6.0319$ para el que el pellizco reaparece con altura notable (aunque menor que la original) difiere solo en un 4% de 2π que es lo que se tarda en volver al polo norte caminando a velocidad uno por un meridiano, y ese 4% suena a error en la aproximación de pellizco por delta. ¿Por qué por un meridiano? Porque es localmente el camino más corto, el que se sigue por inercia sin hacer fuerza. Esto del camino más corto es lo que se llama geodésica en geometría. Así la conjetura se vuelve más alucinante todavía:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \cos(t \sqrt{\lambda_k}) \stackrel{?}{=} \sum \delta(t - \text{longitudes de geodésicas cerradas}) \quad (6.7)$$

donde se entiende que las geodésicas se pueden recorrer varias veces o en sentido contrario, lo que se indica con números negativos para conservar la paridad. ¡Increíble, una fórmula de sumación de Poisson que relaciona autovalores (objetos del análisis) con geodésicas (objetos de la geometría)! Demasiado increíble, tanto que la conjetura anterior, así escrita, es falsa. Sin embargo, en 1956 antes de que nadie considerase estos razonamientos A. Selberg consiguió una fórmula de este tipo para ciertas superficies de curvatura constante menos uno (no compactas en general). La fórmula, cuya prueba requiere la teoría de formas de Maass de la que hemos hablado, es

complicadísima y ocupa varias líneas en el original [Sel56]. Si acumulamos unos renglones en puntos suspensivos, su forma es:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(\sqrt{\lambda_k - 1/4}) = \frac{1}{2} \sum_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell_n \widehat{f}(k \ell_n)}{\sinh(k \ell_n/2)} + \dots \quad (6.8)$$

donde ℓ_n son las longitudes de las geodésicas cerradas recorridas solo una vez. Aunque parezca mentira, la fórmula tiene unas consecuencias aritméticas nada triviales, como la similitud formal entre el conjunto $\{e^{\ell_n}\}$ y el de los primos de toda la vida pero con una función ζ que satisface, casi trivialmente, la hipótesis de Riemann. Y por si eso fuera poco, en uno de los casos más simples las longitudes están relacionadas con las llamadas soluciones fundamentales de la ecuación de Pell y sus multiplicidades, con números de clases de cuerpos cuadráticos reales; dos objetos realmente elusivos sobre los que la fórmula de la traza da una información sorprendente [Sar82].

Comparando la complejidad de (6.8) con la simplicidad de (6.7) está claro que la conjetura fue demasiado optimista. De hecho ya en el caso de la esfera encontramos dificultades: los $\sqrt{\lambda_k}$ se parecen muchísimo a $k + 1/2$ y entonces para t muy cercano a 2π , el lado derecho de (6.7) debería parecerse más a $-\delta(t - 2\pi)$ que a $\delta(t - 2\pi)$, hay un signo que no cuadra. Esto se refleja en el numérico y la figura correspondiente a $t = 6.2832 \approx 2\pi$ oculta un pellizco muy similar al de $t = 0$ pero hacia dentro ¡el pico para $t = 6.0319$ no era tan importante como lo que no se ve después! Si vamos más allá de la esfera, en general una geometría complicada de las geodésicas causa interferencias mutuas difíciles de cuantificar.

¿Se puede salvar algo? Los trabajos más relevantes a este respecto por orden histórico son [CdV72] (hay también otros del mismo autor) [Cha74] y [DG75]. En resumen, lo que se puede afirmar con bastante generalidad es que $\sum_{k=0}^{\infty} \cos(t \sqrt{\lambda_k})$ no es singular fuera de los múltiplos enteros de las longitudes de las geodésicas cerradas. Esto implica que si f tiene soporte que no contiene estas longitudes prohibidas, $\sum_{k=0}^{\infty} \int f(t) \cos(t \sqrt{\lambda_k})$ no puede depender de valores sueltos de f . Es algo así como una versión un poco debilitada de que cuando en la fórmula de Poisson clásica tomamos f con soporte disjunto con \mathbb{Z} , entonces $\sum \widehat{f}(n)$ es nulo. Bajo hipótesis geométricas sobre las geodésicas cerradas se puede ser mucho más concreto y llegar a algo que sin ser una fórmula exacta como la original de Poisson o (6.8), se acerca a ella.

7. Abel, Meyer, Barcelona

El Universo, la persona amada, las fórmulas bonitas... siempre tendemos a pensar que todas las cosas importantes son únicas, excepcionales ¿si no por qué nos iban a gustar?

Bajo esta filosofía, consideremos dos ristra de números reales $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ que no se amontonen, en el sentido de que haya una cota inferior positiva para $x_{n+1} - x_n$ y $y_{n+1} - y_n$. Ahora imponemos que para funciones buenas se cumpla el análogo de (1.3)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(y_n). \quad (7.1)$$

En esta situación necesariamente $\{x_n\} = \{y_n\} = \mathbb{Z}$, no hay una fórmula de sumación de Poisson exótica. Este resultado se prueba en [Cór88] generalizado a \mathbb{R}^d , esto es, (3.2) es única.

Veamos la demostración completa en dimensión 1. Si escogemos $f(x) = e^{-2\pi\alpha x^2}$ se sigue (2.2) con x_n e y_n , lo que implica $0 \in \{x_n\}$ tomando $\alpha \rightarrow \infty$, digamos $x_0 = 0$. Consideremos $\mu = x_{j_0+1} - x_{j_0}$ la distancia mínima¹² entre elementos de $\{x_n\}$ y la función “tienda de campaña” $\phi(x) = \max(1 - |x|, 0)$. Su transformada de Fourier cumple $\hat{\phi}(0) = 1$ y $\hat{\phi} \geq 0$ (solo se anula en un conjunto discreto). Eligiendo $f(x) = e^{2\pi i t x} \phi((x - x_j)/\mu)$ en (7.1), el primer miembro únicamente tiene el sumando no nulo $f(x_j) = e^{2\pi i t x_j}$ y simplificando un poco se concluye

$$1 = \mu \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x_j y_n} \hat{\phi}(\mu(y_n - t)) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (7.2)$$

Recordando $\hat{\phi}(0) = 1$, $\hat{\phi} \geq 0$, la única posibilidad para que el caso $j = 0$, que da $1 = \mu \sum_n \hat{\phi}(\mu(y_n - t))$, sea coherente con $j \neq 0$ es que $e^{-2\pi i x_j y_n} = 1$. En particular $\mu y_n = (x_{j_0+1} - x_{j_0}) y_n$ es entero. Además $t = y_n$ en (7.2) implica $\mu \leq 1$. Integrando (7.2) sobre $-1/2 \leq t \leq 1/2$ se sigue

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{I_n} \hat{\phi} \quad \text{con } I_n = [\mu y_n - \frac{\mu}{2}, \mu y_n + \frac{\mu}{2}). \quad (7.3)$$

Los intervalos I_n son disjuntos pero por otra parte $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi} = \hat{\phi}(0) = 1$ fuerza a que $\bigcup I_n = \mathbb{R}$ y entonces necesariamente $\mu = 1$ y $\{\mu y_n\} = \mathbb{Z}$. Apelando a (1.3), $\{y_n\} = \mathbb{Z}$ implica $\{x_n\} = \mathbb{Z}$.

¹²Si solo hay ínfimo, el argumento también funciona (ejercicio fácil).

El caso d -dimensional es técnicamente más complicado pero sigue el mismo argumento. En [Cór89], A. Córdoba afirma que esto da “*confirmación a un importante paradigma cristalográfico: cuando se ven picos de Bragg en el espectro de Fourier, se debe tener una estructura periódica, esto es, un cristal*” y aborda la situación más complicada en que se admiten coeficientes de cierto tipo en la versión d -dimensional de (7.1). Bajo ciertas condiciones, se deduce que la única posibilidad es sumar las fórmulas (3.2) para varios retículos. Varios autores han contribuido a este problema pero su solución completa en dimensión 1, debida a N. Lev y A. Olevskii [LO15], es muy reciente. En pocas palabras, siempre que se respete la condición de que haya una distancia mínima positiva, las únicas posibilidades para una variante (7.1) con coeficientes multiplicando a $f(x_n)$ y $\hat{f}(y_n)$, son combinaciones lineales finitas de (1.3) escalando o trasladando los enteros. En términos cristalográficos, los picos aislados siempre representan superposiciones finitas de estructuras periódicas.

Para \mathbb{R}^d , $d > 1$, en [LO15] se requiere cierta positividad de los coeficientes, por lo cual todavía queda algún hueco para la investigación pero aparte de eso, una vez que con mucha generalidad se conoce que (1.3) es única ¿qué hacer ahora? El multiverso, los amantes, los contraejemplos... todo ello también tiene su público, igual que atreverse con la no unicidad de (1.3). ¿Por qué no jugar a las dos cosas? Lev y Olevskii demuestran en [LO16] (ver también [Kol16]) que hay dos conjuntos discretos $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ que no contienen ninguna copia escalada de los enteros tales que (7.1) se cumple con ciertos coeficientes. ¿Dónde está el truco? Un conjunto discreto es el que solo consta de puntos aislados y en contra de lo que parece intuitivo eso no implica que sus elementos guarden una distancia de seguridad. Por ejemplo, las sumas parciales de la serie armónica [Gas17] forman un conjunto discreto pero no hay una distancia mínima positiva.

Seguramente no hay que informar mucho a ningún lector sobre el premio Abel. Después de la Medalla Fields, es el premio más prestigioso en matemáticas, otorgado anualmente por el gobierno de Noruega desde 2003 a un reconocido matemático. Para el que no se deje llevar por las veleidades sociales del prestigio y el reconocimiento, también está una dotación económica que da miedo escribir. Unas semanas antes de escribir este artículo se ha anunciado que el galardonado en 2017 es Y. Meyer, un matemático bien conocido particularmente por su pionera contribución a las *wavelets*.

Poco antes de emocionarse por recibir el premio, estaba muy emocionado por un resultado que había obtenido en relación con el problema que nos ocupa. No es broma, leemos en [Mey16]: “*En este artículo se resuelve un problema importante de análisis armónico: ¿Es única la fórmula de sumación de*

Poisson o pertenece a una clase más amplia? Lo segundo es cierto. El método que se usa para probar esta afirmación es sorprendente. Nuestras nuevas fórmulas de Poisson estaban ocultas en un antiguo y casi olvidado artículo de 1959 de A.P. Guinand. El papel desempeñado por la teoría de números en este tema es fascinante". En otro lugar, escribe "Estos patrones eran totalmente inesperados y podrían abrir nuevas puertas en cristalografía". Quizá es pertinente recordar la temprana contribución de Meyer a los cuasicristales, estructuras con gran sabor aritmético que tienen una periodicidad solo aproximada.

La base de esta "nueva" fórmula radica en el análogo de (3.1) cuando uno generaliza el problema del círculo de Gauss a esferas. En ese caso, en vez de funciones de Bessel, se vuelven a obtener senos y cosenos y con ello una relación con la transformada de Fourier unidimensional [IK04, Cor. 4.8]. Aplicando una traslación, Meyer deduce la fórmula

$$\sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \frac{e^{2\pi i \vec{\beta} \cdot \vec{n}}}{\|\vec{n} + \vec{\alpha}\|} f(\|\vec{n} + \vec{\alpha}\|) = -i e^{-2\pi i \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \frac{e^{-2\pi i \vec{\alpha} \cdot \vec{n}}}{\|\vec{n} + \vec{\beta}\|} \widehat{f}(\|\vec{n} + \vec{\beta}\|)$$

con $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \notin \mathbb{Z}^3$ (7.4)

válida para f impar, si eso molesta, basta cambiar las $f(x)$ por $f(x) - f(-x)$, que es la forma que aparece en [Mey16]. A pesar del sumatorio triple, es una fórmula unidimensional, los $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ anteriores son los valores tomados por $\|\vec{n} + \vec{\alpha}\|$ y por $\|\vec{n} + \vec{\beta}\|$, que son números reales. Lo que Meyer resalta en su resultado principal es que, eligiendo $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$, se consigue que cualquier subconjunto finito de $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sea linealmente independiente sobre los racionales. Esto significa que $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son radicalmente distintos de los enteros o de una unión de copias escaladas de ellos.

Muy bien, con esto tenemos a Meyer y a Abel ¿y Barcelona? En enero de 2017, el Institut d'Estudis Catalans albergó el evento "Abel in Barcelona" bajo los auspicios de la Societat Catalana de Matemàtiques. Es allí donde tuvo lugar la última reunión del comité cuya tarea fue seleccionar el galardonado con el premio Abel 2017. Un gran premio desde una bella ciudad.

8. Historias e historietas

Siméon Denis Poisson (1781–1840) es ese señor de la imagen de la primera página. Algunas de sus contribuciones que aparecen en los grados de física o

matemáticas son:

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}, \quad -\Delta F = 4\pi\rho,$$

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q^i} \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Fue un investigador y profesor infatigable que vivió los turbulentos años de la restauración monárquica tras la revolución francesa. En la vida de Galois desempeña un papel, posiblemente injusto, del lado de los malos de la película por no haber apreciado su famosa memoria y recomendar a la Academia de Ciencias que no fuera admitida¹³. El nombre de Poisson es uno de los 72 de ilustres franceses que aparece en la torre Eiffel. No es para menos, sus contribuciones a la física y a las matemáticas son ciertamente notables. Su producción es inmensa, se estima que escribió entre 300 y 400 trabajos.

En su trabajo *Sur les intégrales définies et sur la sommation des séries*, en la página 451 del volumen de 1823 del Journal de l'École Royale Polytechnique, encontramos

$$\frac{1}{2} F(0) + \sum F(2nl) = \frac{1}{2} A_0 + \sum A_n,$$

$$\int_0^\infty \cos \frac{n\pi z}{l} Fz \frac{dz}{l} = A_n.$$

En caligrafía moderna L^AT_EXiana,

$$\frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(2ln) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \quad (8.1)$$

$$\text{con } A_n = \frac{1}{l} \int_0^\infty \cos\left(\frac{n\pi z}{l}\right) F(z) dz.$$

Para deducir (1.3) tomamos $l = 1/2$ y f la extensión par de F , $f(x) = F(|x|)$. El primer miembro de (8.1) es

$$\frac{1}{2} f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n). \quad (8.2)$$

¹³Provisionalmente: “Se puede pues esperar a que el autor haya publicado su trabajo completo para formarse una opinión definitiva” [Cor00].

Mientras que el segundo miembro es

$$\int_0^{\infty} f(x) dx + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \cos(2\pi n x) f(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \cos(2\pi n x) f(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \hat{f}(n). \quad (8.3)$$

Con esto queda probado (1.3) a partir de la fórmula original (8.1) para funciones pares. ¿Y para las impares? Muy fácil: $0 = 0$. ¿Y para el resto? Todas las funciones son suma de una par y otra impar. Poisson no da referencias a trabajos anteriores, por lo cual es natural suponer que es en este trabajo donde obtuvo su fórmula originalmente.

¿Cómo deduce (8.1) Poisson? Esencialmente como dedujimos (1.3) de (1.4) pero de una manera más enrevesada, considera la serie de cosenos en lugar de la de Fourier, teniendo cuidado con las discontinuidades que induce en los extremos. Ya es tarde para que mande una fe de erratas pero de hecho hay un pequeño descuido en su expresión de partida justamente por la contribución de esos términos.

Para terminar, un reto para el lector. Unas páginas antes de llegar a su fórmula, Poisson da sentido a algunas series divergentes curiosas:

$$\begin{aligned} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots &= \frac{1}{2}, \\ 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + \dots &= \frac{2}{3}, \\ 1 + 0 + 0 - 1 + 1 + 0 + 0 - 1 + 1 + 0 + 0 - 1 + \dots &= \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

¿Qué estaba usando para llegar a tan estafalarias identidades? Pista: empieza por “núcleo de”.

Agradecimientos. Este artículo tiene como base un coloquio impartido el 14 de diciembre de 2016 en la Universitat Autònoma de Barcelona por el primer autor quien aprovecha la oportunidad para agradecer a Manuel Castellet, Xavier Xarles y al resto de los miembros del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona atenderle tan inmerecidamente bien durante su visita. Agradecemos también a Carlos Pastor sus finas observaciones relativas a una versión preliminar de este trabajo.

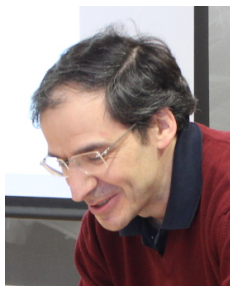
Fernando Chamizo está parcialmente financiado por el proyecto MTM2014-56350-P y por el Programa Centro de Excelencia Severo Ochoa SEV-2015-0554 del MINECO.

Referencias

- [Art64] E. Artin. *The Gamma Function*. Translated by Michael Butler. Athena Series: Selected Topics in Mathematics. Holt, Rinehart and Winston, New York-Toronto-London, 1964.
- [CdV72] Y. Colin de Verdière. Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 275:A805–A808, 1972.
- [CE03] H. Cohn and N. Elkies. New upper bounds on sphere packings. I. *Ann. of Math. (2)*, 157(2):689–714, 2003.
- [Cha74] J. Chazarain. Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes. *Invent. Math.*, 24:65–82, 1974.
- [Cór88] A. Córdoba. La formule sommatoire de Poisson. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 306(8):373–376, 1988.
- [Cór89] A. Córdoba. Dirac combs. *Lett. Math. Phys.*, 17(3):191–196, 1989.
- [Cor00] F. Corbalán. *Galois. Revolución y matemáticas*. Nivola libros y ediciones, S.L., 2000.
- [CR15a] F. Chamizo and D. Raboso. On the Kuznetsov formula. *J. Funct. Anal.*, 268(4):869–886, 2015.
- [CR15b] F. Chamizo and D. Raboso. Van der Corput method and optical illusions. *Indag. Math. (N.S.)*, 26(5):723–735, 2015.
- [DG75] J. J. Duistermaat and V. W. Guillemin. The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. *Invent. Math.*, 29(1):39–79, 1975.
- [Gas17] A. Gasull. Sumes harmónicas. *Mat. Mat.*, 12017(1), 2017.
- [GK91] S. W. Graham and G. Kolesnik. *van der Corput's method of exponential sums*, volume 126 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [Gro85] E. Grosswald. *Representations of integers as sums of squares*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [Gui41] A. P. Guinand. On Poisson's summation formula. *Ann. of Math. (2)*, 42:591–603, 1941.

- [Har20] G. H. Hardy. On the representation of a number as the sum of any number of squares, and in particular of five. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 21(3):255–284, 1920.
- [IK04] H. Iwaniec and E. Kowalski. *Analytic number theory*, volume 53 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [Ing90] A. E. Ingham. *The distribution of prime numbers*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. Reprint of the 1932 original, With a foreword by R. C. Vaughan.
- [Iwa97] H. Iwaniec. *Topics in classical automorphic forms*, volume 17 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [Kol16] M. N. Kolountzakis. Fourier pairs of discrete support with little structure. *J. Fourier Anal. Appl.*, 22(1):1–5, 2016.
- [Kuz80] N. V. Kuznecov. The Petersson conjecture for cusp forms of weight zero and the Linnik conjecture. Sums of Kloosterman sums. *Mat. Sb. (N.S.)*, 111(153)(3):334–383, 479, 1980.
- [LO15] N. Lev and A. Olevskii. Quasicrystals and Poisson’s summation formula. *Invent. Math.*, 200(2):585–606, 2015.
- [LO16] N. Lev and A. Olevskii. Quasicrystals with discrete support and spectrum. *Rev. Mat. Iberoam.*, 32(4):1341–1352, 2016.
- [LWL24] J. E. Littlewood, A. Walfisz, and E. Landau. The lattice points of a circle. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.*, 106(739):478–488, 1924.
- [Max65] J. C. Maxwell. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 155:459–513, 1865.
- [Mey16] Y. F. Meyer. Measures with locally finite support and spectrum. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 113(12):3152–3158, 2016.
- [PZ04] F. Pfender and G. M. Ziegler. Kissing numbers, sphere packings, and some unexpected proofs. *Notices Amer. Math. Soc.*, 51(8):873–883, 2004.
- [Rab15] D. Raboso. When the modular world becomes non-holomorphic. In *Trends in number theory*, volume 649 of *Contemp. Math.*, pages 221–244. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

- [Ran77] R. A. Rankin. *Modular forms and functions*. Cambridge University Press, Cambridge-New York-Melbourne, 1977.
- [Sar82] P. Sarnak. Class numbers of indefinite binary quadratic forms. *J. Number Theory*, 15(2):229–247, 1982.
- [Sel56] A. Selberg. Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, 20:47–87, 1956.
- [Sko02] N.-P. Skoruppa. Quick asymptotic upper bounds for lattice kissing numbers. *Mathematika*, 49(1-2):51–57 (2004), 2002.
- [Spi65] M. Spivak. *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1965.
- [Ven70] B. A. Venkov. *Elementary number theory*. Translated from the Russian and edited by Helen Alderson. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1970.
- [Wei79] A. Weil. *Scientific works. Collected papers. Vol. III (1964–1978)*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1979.



Fernando Chamizo Lorente
Departamento de Matemáticas e ICMAT
Universidad Autónoma de Madrid
fernando.chamizo@uam.es



Dulcinea Raboso Paniagua
Doctora por la
Universidad Autónoma de Madrid

Publicat el 9 de juny de 2017