MAT²

MATerials MATemàtics
Volum 2015, treball no. 2, 33 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

L'infinit i més enllà

Armengol Gasull

L'infinit apareix constantment tant en els treballs i escrits dels científics com en els dels escriptors i poetes. Així, per exemple, el prestigiós matemàtic alemany David Hilbert (1862-1943) va dir d'ell:

> *L'infinit! Cap altra qüestió ha mogut tan profundament l'esperit de l'home*

i l'escriptor txec, nacionalitzat francès, Milan Kundera (1929-   ) va escriure:

> *Si estàs buscant l'infinit, simplement tanca els ulls!*

Hi ha clarament dos usos diferents de la paraula infinit tant en el llenguatge col·loquial com en les matemàtiques. Pot ser un adjectiu o bé un substantiu:

- Si el pensem com un adjectiu seria una manera de qualificar o descriure quelcom que no té fi, que és sense límit.
- Per altra banda, com a substantiu, denotaria quelcom que té valor més gran que qualsevol altre que hom pugui donar.

Així en un llenguatge no científic tots hem sentit parlar de paciència infinita o amor infinit per una banda, en el seu ús com a adjectiu. Per altra banda, també diem que les càmeres de fotografiar professionals permeten enfocar l'infinit, o que un carrer es pot perdre per l'infinit o, com diu el meu fill, "si vols semblar interessant en una foto, mira l'infinit".

Son sinònims d'infinit: etern, il·limitat, perenne, perpetu, inacabable, immens, ... i antònims: finit, perible, limitat, ...

Uns exemples senzills i ben clarificadors d'aquest dos usos en el mon matemàtic podrien ser:

- ADJECTIU: Els nombres naturals $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$ són infinits.
- SUBSTANTIU: A quin valor s'acosta la funció $4/x$, quan x s'acosta cap a infinit?

Quan l'infinit es pensa com a substantiu se li associa el símbol "∞" que és el que apareix en el segell argentí emès l'any 2000 en ocasió de l'Any Mundial de les Matemàtiques.

Així, com molts dels lectors ben segur saben, la resposta a la qüestió anterior s'escriu com

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4}{x} = 0.$$

La raó és que quan x s'acosta cap a ∞, el valor $4/x$ es va fent cada cop més i més petit.

Fent un petit incís, incloc aquí la divertida resposta que va donar un alumne que no havia anat a classe el dia que es va explicar el que significava el símbol ∞, quan li van demanar calcular el límit anterior:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4}{x} = \frac{4}{\infty} = \frac{1}{\rotatebox{90}{2}}.$$

Ara bé, d'on prové el símbol de l'infinit? Sembla ser que va ser introduït en matemàtiques l'any 1655 pel matemàtic anglès John Wallis (1616-1703) en el seu treball "De sectionibus conicis". Malauradament, l'autor no explica el motiu que el va fer decidir per triar-lo. Seguint [1], es contemplen aquestes tres possibilitats:

- Tot i que es coneixien quantitats molt més grans, en aquella època s'usava com a exemple de nombre molt gran el 1000. En números romans, com tots deveu saber, normalment s'usa la notació D = 500, M = 1 000, però hi ha una notació romana diferent, no tan coneguda, en la que

  $$500 = \text{IↃ}, \quad 1\,000 = \text{CIↃ}.$$

  Aleshores, aquest darrer símbol, una mica comprimit (CIↃ), recorda el que avui en dia s'usa per a denotar l'infinit.

- També es diu que és senzillament l'evolució de la m, minúscula.

- Una tercera teoria argumenta que el símbol infinit podria ser una deformació de ω, l'última lletra de l'alfabet grec. Aquesta és la que més m'agrada a mi.

El notable matemàtic suís Leonhard Euler (1707-1783) va utilitzar l'any 1744 el símbol de la figura del costat d'aquest paràgraf, que ja no es fa servir, però que també recorda l'infinit actual.

Avui en dia el símbol de l'infinit s'associa al gràfic d'una lemniscata. Aquesta corba va ser introduïda l'any 1694 pel matemàtic suïs Jakob Bernoulli. Té un significat geomètric similar al d'una el·lipse. Recordeu que una el·lipse esta formada pels punts del pla tals que la suma de les distàncies a dos punts fixats, anomenats focus, és constant. En una lemniscata el que és constant no és la suma de les distàncies, sinó el seu producte. A més, aquest producte és la quarta part del quadrat de la distància entre els focus. Si prenem com a focus els punts $(\pm a, 0)$, l'equació que obtenim és

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2}\,\sqrt{(x-a)^2+y^2}=a^2.$$

Operant una mica arribem a l'equació $(x^2+y^2)^2-2\,a^2(x^2-y^2)=0$. Així, per exemple, si prenem $a=3/\sqrt{2}$ obtenim la lemniscata:

$$\mathcal{L}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,(x^2+y^2)^2-9\,(x^2-y^2)=0\}.$$

La corba $\mathcal{L}$ es mostra al gràfic de la Figura 1.

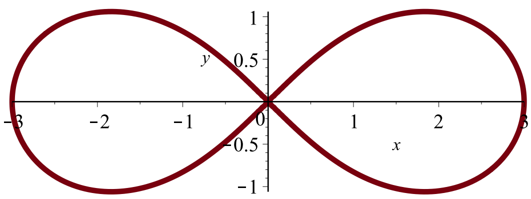


Figura 1: Lemniscata.

En la il·lustració podeu veure un ús totalment diferent del símbol de l'infinit en les cartes del tarot.

Aquest treball pretén donar una primera visió de l'ús de l'infinit en matemàtiques. Es pot considerar com una recopilació de resultats més o menys coneguts que apareixen en diversos textos matemàtics o per la xarxa. La major part del que s'exposa està contingut també a les referències [1, 2, 3, 5].

A la secció següent explicarem el que de vegades s'anomena "paradoxa de l'Hotel de Hilbert" tot i que de fet no és una paradoxa en si, sinó una bona manera d'entendre les diferències entre finit i infinit. La idea d'explicar l'infinit mitjançant aquest Hotel va ser introduïda per Hilbert en una conferència de l'any 1924, i va ser popularitzada pel físic teòric i cosmòleg George Gamow en el seu llibre [4] de l'any 1947.

1 L'hotel de Hilbert

L'hotel de Hilbert té una particularitat, i és que té infinites habitacions. Suposem que arriba una persona a l'hotel i troba el cartell de "complet". Pot fer alguna cosa per a allotjar-se? Doncs, si aquest nou client té clar el què és l'infinit, sí. Proposa que s'envii a tots els clients el missatge següent:

Si sou a l'habitació k, si us plau, passeu a l'habitació $k+1$.

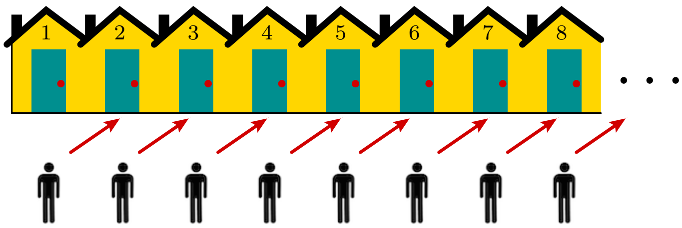


Figura 2: Un nou client per a l'hotel ja complet.

D'aquesta manera l'habitació 1 quedarà lliure per a ell! Aquest moviment d'hostes s'il·lustra a la Figura 2. Observeu que per a poder fer els canvis és imprescindible que les habitacions estiguin numerades.

I si arriba un autobús amb N passatgers? També hi ha una solució claríssima. L'únic que s'ha de fer en aquest cas és avisar als clients de les habitacions que facin el següent:

Si us plau, si sou a l'habitació k passeu a l'habitació $k+N$.

D'aquesta manera les habitacions $1, 2, 3, \ldots, N$ queden lliures per als passatgers de l'autobús.

I si ara arriba un autobús infinit com el de la Figura 3? Una solució ve suggerida per la mateixa figura. La instrucció que s'ha de donar als clients de les habitacions és:

Si us plau, si sou a l'habitació k passeu a l'habitació $2k$.

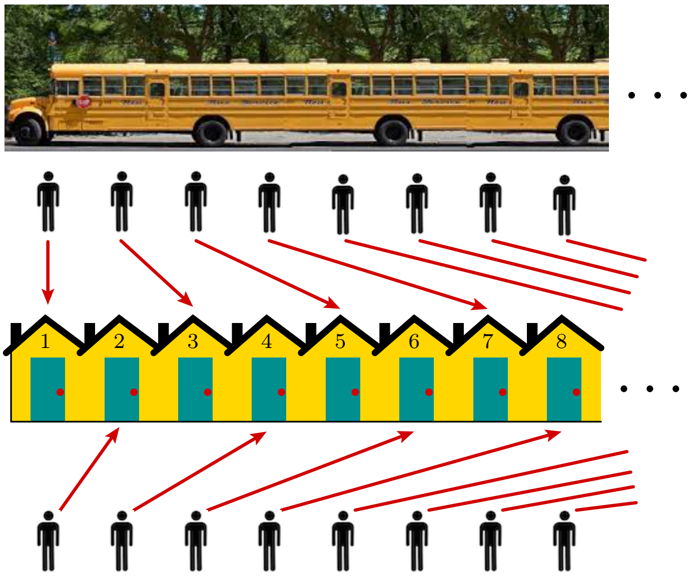


Figura 3: Infinits clients nous per a l'hotel complet.

D'aquesta manera les habitacions $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ queden lliures per als infinits passatgers de l'autobús.

I si ara arriben infinits autobusos infinits? En aquest cas la solució és una mica més complicada, però també hi caben! Amb el mètode de la Figura 4 assignem un número natural m a cadascun dels passatgers dels infinits autobusos. Als clients de l'hotel els hi diem que facin el mateix que el cas anterior. Així tenim les habitacions senars buides. Finalment li diem al senyor m-èssim de la llista que vagi a l'habitació $2m - 1$ i, un cop més, tot arreglat.

	Seient 1	Seient 2	Seient 3	Seient 4	Seient 5	$\cdots$
Autobús 1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	
Autobús 2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	
Autobús 3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	
Autobús 4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	
Autobús 5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	
$\vdots$						

Figura 4: Com numerar tots els passatgers dels infinits autobusos.

2 Nombres naturals, enters, racionals i reals

2.1 L'infinit numerable

A la secció sobre l'hotel de Hilbert, hem trobat maneres de gestionar quantitats infinites (de persones, d'habitacions o d'autobusos) suposant que es podien "numerar". Parlant amb més propietat direm que un conjunt X té cardinalitat *infinita numerable* o simplement que *és numerable* si existeix una aplicació bijectiva (també anomenada 1 a 1) entre el nombres naturals

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$$

i el conjunt X. Els resultats i les demostracions que s'exposen en aquesta secció i la següent es poden trobar, per exemple, a [6].

Recordem que les aplicacions entre dos conjunts X i Y, $f : X \longrightarrow Y$ poden ser:

(i) *Injectives*, si tot element y de Y o no té antiimatge o en té una única, és a dir,
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

(ii) *Exhaustiva*, si per a tot element y de Y hi ha, com a mínim, un element x de X tal que $f(x) = y$,

(iii) *Bijectiva (1 a 1)*, si és injectiva i exhaustiva a la vegada, o en altres paraules, si per a cada un dels elements y de Y hi ha exactament un x de X de manera que $f(x) = y$,

(iv) Cap de les anteriors.

A la Figura 5 s'il·lustren les definicions d'aplicacions exhaustives, injectives i bijectives.

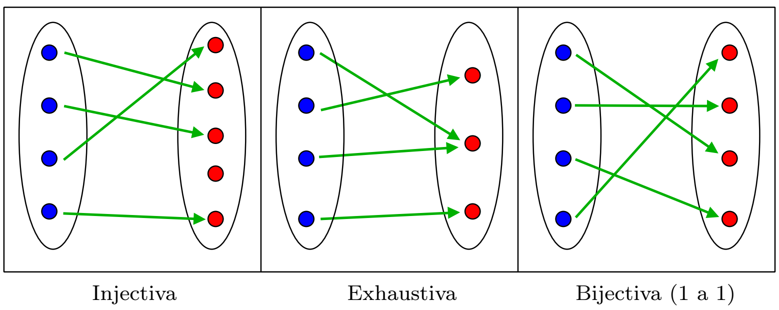


Figura 5: Diferents tipus d'aplicacions.

Anem a veure que els conjunts de nombres:

- Naturals, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$,
- Enters, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$,
- Racionals, $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$,
- Primers, $\mathbf{P} = \left\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\right\}$,
- Algebraics (que definirem més endavant),

són tots numerables.

Sobre els naturals no hi ha res a dir. Per a demostrar que els enters són numerables podem considerar l'aplicació bijectiva $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ determinada per

$$f(n) = \begin{cases} 2\,n, & n > 0, \\ 1, & n = 0, \\ -2\,n + 1, & n < 0. \end{cases}$$

Per exemple, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(-1) = 3$, $f(2) = 4$, $f(-2) = 5, \ldots$ La construcció de f és essencialment la mateixa que la manera com hem resolt l'allotjament dels infinits passatgers de l'autobús infinit quan arriben a l'hotel de Hilbert ple.

Per als racionals ja tenim quasi tota la feina feta. Primer comencem amb una aplicació bijectiva $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$, on $\mathbb{Q}^+$ són el racionals positius. Del cas d'infinits autobusos teníem la taula de la Figura 4. Ara construïm l'aplicació següent, basada en l'ordre donat a la taula:

$$\begin{aligned} &f(1/1) = 1, f(1/2) = 2, f(2/1) = 3, f(3/1) = 4, f(2/2) = 1, \\ &f(1/3) = 5, f(1/4) = 6, f(2/3) = 7, f(3/2) = 8, f(4/1) = 9, \ldots \end{aligned}$$

Observeu que en l'assignació d'imatges ens saltem els racionals que ja tenen imatge assignada. Així, per exemple, també considerarem $f(3/3) = f(4/4) = f(5/5) = 1, f(2/4) = 2, \ldots$

El pas final per a veure que tot $\mathbb{Q}$ és numerable es pot fer igual com hem fet el cas de $\mathbb{Z}$ ja que

$$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}, \quad \text{i} \quad \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+.$$

En aquestes alçades del treball ja ha quedat clar que, com que $\mathbf{P} \subset \mathbb{N}$, l'únic requisit que necessitem per a demostrar que el conjunt dels nombres primers és numerable consisteix a provar que hi ha infinits primers. Recordem que $1 < p \in \mathbb{N}$ és primer si els seus únics divisors són 1 i p.

Un cop sapiguem que hi ha infinits primers, podem prendre l'aplicació $f : \mathbb{N} \to \mathbf{P}$ definida com:

$$f(k) \text{ és el primer } k\text{-èssim,}$$

que clarament serà bijectiva. Així,

$$f(1) = 2,\ f(10) = 29,\ f(100) = 541,\ f(1000) = 7919,\ f(10000) = 104729\,.$$

La demostració de què hi ha infinits primers que ve a continuació és deguda a Euclides, que va viure sobre l'any 300 a.C.. Suposem que hi hagués només una quantitat finita de nombres primers, diguem $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Construïm a partir de tots ells un nou nombre $p = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$. Aleshores, p no pot ser primer, ja que hem suposat la llista ja els contenia tots. Per tant p ha de tenir algun divisor diferent de 1 i de p. Prenent, si cal, els divisors d'aquests divisors, podem suposar que p ha de tenir algun divisor que sigui primer. Però, cap dels primers $p_1, p_2, \ldots, p_n$ que hi ha divideix a p, ja que el residu quan dividim p entre qualsevol p_j és 1. Hem arribat, doncs, a un resultat absurd, i això és degut a què hem suposant que hi havia un nombre finit de primers. Per tant hi ha infinits primers, tal i com volíem demostrar.

Per acabar aquesta secció introduirem els *nombres algebraics*, denotant per $\mathcal{A}$ el conjunt de tots ells, i demostrarem que formen un subconjunt numerable dels nombres complexos $\mathbb{C}$. Concretament, direm que un nombre $x \in \mathbb{C}$ és *algebraic* si hi ha un polinomi no idènticament nul i amb coeficients enters P, tal que $P(x) = 0$. És a dir, si existeixen $n \in \mathbb{N}$ i $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, no tots nuls, tals que

$$P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0 = 0\,.$$

Així, per exemple, tots els nombres racionals $p/q \in \mathbb{Q}$ són algebraics ja que compleixen $q\,x - p = 0$. També ho són els de la forma $\sqrt[n]{p/q}$, $p/q \in \mathbb{Q}^+$, ja que són solució de $q\,x^n - p = 0$, o el nombre $i \in \mathbb{C}$ ja que compleix $i^2 + 1 = 0$. Un altre nombre algebraic és

$$\sqrt{1 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt{7} + 1\,,$$

ja que és arrel del polinomi

$$\begin{aligned} P(x) = {} & x^{12} - 12\,x^{11} + 18\,x^{10} + 260\,x^9 - 789\,x^8 - 2040\,x^7 + 7814\,x^6 \\ & + 7596\,x^5 - 30711\,x^4 - 16052\,x^3 + 28728\,x^2 + 46872\,x + 3684\,. \end{aligned}$$

Escrivim

$$\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k,$$

on cada $\mathcal{A}_k$ és el conjunt de tots els nombres algebraics que són arrels d'un polinomi $P(x)$ amb coeficients a $\mathbb{Z}$ de la forma

$$P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0, \text{ complint } n \le k \text{ i } \max_{j=0,1,\ldots,n} |a_j| < k\,.$$

Com que un polinomi de grau m té com a molt m arrels a $\mathbb{C}$, cada conjunt $\mathcal{A}_k$ és finit i té com a molt $(2\,k-1)^{k+1}\,k$ elements (aquesta fita no és optima, ja que per exemple es compte com si tots els polinomis tinguèssin exactament k arrels diferents). Així, per exemple, $\mathcal{A}_2$ esta format per les arrels de 27 polinomis, de grau com a molt 2 (de fet 26 si eliminen el polinomi idènticament zero). Els 27 polinomis serien

$$\{-1,0,1\}\,x^2 + \{-1,0,1\}\,x + \{-1,0,1\}\,,$$

on amb aquesta notació volem indicar que hem de triar un element de cada conjunt per a cada coeficient. Per a cada un d'ells es poden comptar dues arrels però caldrà tenir en compte que hi ha polinomis amb menys de 2 arrels com 1 o $x-1$ i polinomis diferents amb arrels comuns com $x+1$ i $-x-1$ o x^2-x i x^2+x.

En tot cas tenim $\mathcal{A}$ escrit com una unió numerable de conjunts finits. A més, clarament, els conjunts no són disjunts. Per exemple x^2+x+1 pertany a tots els $\mathcal{A}_k$ per $k \ge 2$. De fet tenim, per a qualsevol k, $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_{k+1}$. Aleshores, si definim $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}_1$ i per a $k \ge 2$, $\mathcal{B}_k = \mathcal{A}_k \setminus \mathcal{A}_{k-1}$, tenim

$$\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_k\,,$$

amb tots els $\mathcal{B}_k$ finits i disjunts dos a dos. Ara es pot fer una llista amb tots els elements de $\mathcal{A}$, ordenant-los primer a cada $\mathcal{B}_k$ i després fent una única llista, agafant primer els de $\mathcal{B}_1$, després els de $\mathcal{B}_2$, i així successivament. Aquesta ordenació ens dóna la numerabilitat buscada.

2.2 L'infinit no numerable

La secció anterior fa que ens preguntem si hi ha conjunts de nombres que no siguin numerables. La resposta és que sí. Anem a veure que el conjunt de tots els nombres reals $\mathbb{R}$ no és numerable.

Per a demostrar-ho, suposarem que sí que ho és, i arribarem a una contradicció. Sigui $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una aplicació bijectiva entre els dos conjunts. Aleshores tots el nombres reals es poden ordenar i serien:

$$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$$

Les imatges dels primers nombres reals podrien ser, per exemple, els de la Figura 6.

n	$f(n)$
1	0 . **4** 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0...
2	8 . 5 **0** 0 6 0 7 0 8 6 6 6 9 0 0...
3	7 . 5 0 **5** 0 0 9 4 0 0 4 4 1 0 1...
4	5 . 5 0 7 **0** 4 0 0 7 0 4 8 0 5 0...
5	6 . 9 0 0 2 **6** 0 0 0 0 0 0 5 0 6...
6	6 . 8 5 8 0 9 **5** 8 2 0 5 0 0 2 0...
7	6 . 5 0 5 0 5 5 **5** 0 6 5 5 8 0 8...
8	8 . 7 2 0 8 0 6 4 **0** 0 0 0 4 0 8...
9	0 . 5 5 0 0 0 0 8 8 **8** 8 0 0 7 7...
10	0 . 5 0 0 2 0 7 2 2 0 **7** 8 0 5 1...
11	2 . 9 0 0 0 0 8 8 0 0 0 **0** 9 0 0...
12	6 . 5 0 2 8 0 0 0 8 0 0 9 **6** 7 1...
13	8 . 8 9 0 0 8 0 2 4 0 0 8 0 **5** 0...
14	8 . 5 0 0 0 9 7 4 2 0 8 0 2 2 **6**...
⋮	⋮

Figura 6: Un intent de construcció d'una aplicació bijectiva entre $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$.

Ara fabriquem un nombre real y de manera que per a tot $k \in \mathbb{N}$:

La xifra decimal k-èssima de y és diferent de la de $f(k)$.

Per exemple, y podria començar com: $y = 0.3162977123333\ldots$ És clar que no hi ha cap $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = y$, ja que és diferent de tots els de la llista. Per tant hem arribat a una contradicció i $\mathbb{R}$ no és numerable.

La construcció d'aquest element y sense preimatge se sol designar com *procediment diagonal de Cantor*. De fet en Cantor va ser qui va desenvolupar inicialment totes les idees que estem exposant sobre l'infinit. Més endavant, parlarem d'ell amb més detall.

Observem que, finalment, hem vist que a l'Hotel de Hilbert no hi cap tothom. Si arriba un autobús amb tants passatgers com nombres reals no hi ha manera de què hi càpiguen!

Ara que ja sabem que els nombres reals són no numerables, volem remarcar que, tot i que avui en dia està totalment assimilat per la comunitat científica que els nombres algebraics són numerables, en el moment de la seva introducció aquest fet va ser molt difícil de digerir. En qualsevol cas, hi ha una qüestió que no deixa de ser xocant. Es pot veure, tot i que no entrarem aquí en detalls, que la mesura total de qualsevol conjunt numerable és zero. Així, tot i ser densos dins de $\mathbb{R}$ tant els nombres racionals com els algebraics tenen mesura total zero. En altres paraules, els nombres no algebraics, que de fet s'anomenen *nombres transcendents*, tenen mesura total. Ara bé la major part dels nombres que es fan servir en el càlculs quotidians o científics, excepte casos excepcionals com els famosos π i e, són algebraics. És a dir, la humanitat es capaç de modelar el món usant quasi exclusivament una quantitat negligible (de mesura zero) de nombres.

Parlant més en general, si existeix una aplicació bijectiva entre dos conjunts X i Y, direm que tenen la mateixa *cardinalitat* i escriurem

$$\operatorname{car}(X) = \operatorname{car}(Y).$$

La cardinalitat d'un conjunt finit és el seu nombre d'elements.

Anem a veure que el conjunts

(i) L'interval obert $(0,1)$,

(ii) Tot $\mathbb{R}^2$, els nombres complexos $\mathbb{C}$, i en general $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, per a qualsevol $n \in \mathbb{N}$, fixat,

(iii) L'interval tancat $[0,1]$,

(iv) El conjunt de Cantor K (que es definirà més endavant),

tenen la mateixa cardinalitat que $\mathbb{R}$.

Abans de començar, volem remarcar també que va costar bastant assimilar, a la comunitat matemàtica de l'època, que $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^n$ tinguessin "la mateixa quantitat" de punts.

(i) El primer és fàcil. S'ha de construir una aplicació bijectiva entre $(0,1)$ i $\mathbb{R}$. Una possible funció f és:

$$f(x) = \tan\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right).$$

Això es veu directament de la seva gràfica, que es mostra a la Figura 7.

(ii) La construcció d'una aplicació bijectiva entre $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}$ no és gaire més difícil:

En primer lloc, es canvia l'objectiu per la cerca d'una aplicació bijectiva $f : (0,1)^2 \to (0,1)$. L'aplicació pot ser essencialment la següent:

Si $x = (x_1, x_2) \in (0,1)^2$, aleshores

$$x_1 = 0.m_1m_2m_3m_4m_5\ldots \qquad x_2 = 0.n_1n_2n_3n_4n_5n_6n_7\ldots,$$

on n_i i m_i son nombres enters entre 0 i 9. Definim:

$$f(x) = f(x_1, x_2) = 0.m_1n_1m_2n_2m_3n_3\ldots \in (0,1).$$

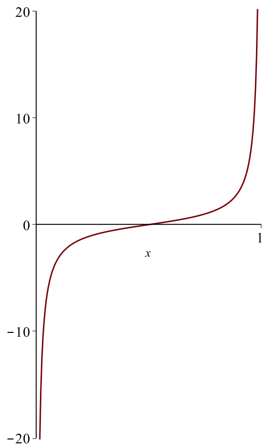


Figura 7: Bijecció entre $(0,1)$ i $\mathbb{R}$.

D'una manera similar es pot construir una aplicació bijectiva entre $(0,1)^n$ i $(0,1)$, i per tant una entre $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}$.

El resultat sobre els nombres complexos és clar ja que sempre es pot construir fàcilment una aplicació bijectiva entre $\mathbb{C}^n$ i $\mathbb{R}^{2n}$ identificant cada element de $\mathbb{C}$ amb un de $\mathbb{R}^2$.

Observem aquí que, per simplicitat, en aquest treball no em tingut en compte que l'expressió decimal d'un nombre real no és única. Recordeu que, per exemple, $0.3569999\ldots = 0.357$. El mateix succeeix quan expressem els nombres en altres bases, com farem més endavant. Aquesta petita dificultat tècnica es pot arreglat sense massa dificultats, veure [6]. Molts cops, també es pot evitar usant el Teorema de Cantor-Bernstein-Schröeder que enunciarem més endavant.

(iii) La cerca d'una aplicació bijectiva entre $[0,1]$ i $\mathbb{R}$ és més enginyosa. N'hi ha prou donant una aplicació bijectiva $f:[0,1]\to(0,1)$. Observeu que degut a propietats topològiques dels dos conjunts –un és un interval tancat i l'altre és un interval obert– l'aplicació f no pot ser contínua com en el cas de $\mathbb{R}$ i $(0,1)$. La Figura 8 resol la qüestió. En la mateixa, a part dels extrems, fixem una quantitat *numerable* de punts especials a l'interval $[0,1]$. Anomenem-los $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n, \ldots$. L'aplicació que considerem és la següent:

$$f(1) = x_1,\ f(0) = x_2,\ f(x_n) = x_{n+2}\,,$$

i per a la resta de punts, $f(x) = x$.

Com acabem de veure, no sempre és fàcil trobar aplicacions bijectives entre dos conjunts diferents amb la mateixa cardinalitat. Hi ha un resultat important, que il·lustrem a la Figura 9, que facilita molt aquesta feina.

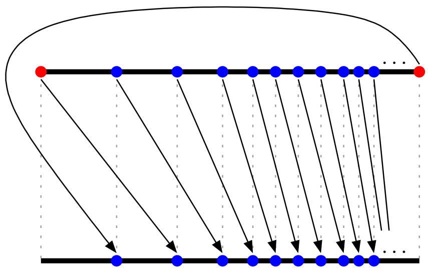


Figura 8: Bijecció entre $[0,1]$ i $(0,1)$.

Teorema de Cantor-Bernstein-Schröeder. *Siguin S i T dos conjunts. Si hi ha una aplicació injectiva de S a T i una aplicació injectiva de T a S, aleshores, també hi ha una aplicació bijectiva entre S i T.*

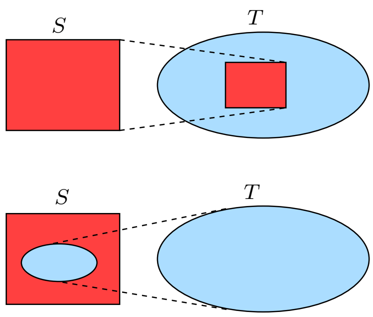


Figura 9: Il·lustració del Teorema de Cantor-Bernstein-Schröeder.

Usant aquest teorema podem considerar $g:(0,1)\longrightarrow[0,1]$, amb $g(x)=x$, i $h:[0,1]\longrightarrow(0,1)$ donada per $h(x)=1/2+x/4$, que són clarament injectives. El teorema anterior assegura l'existència d'una $f:[0,1]\to(0,1)$ bijectiva, tal i com volíem veure, tot i que no en tenim cap descripció explícita.

(iv) Hi ha un subconjunt de $\mathbb{R}$ molt interessant anomenat *conjunt de Cantor*, K, o també *pols de Cantor*, que té les dues propietats següents:

- Té longitud zero,
- Té la mateixa cardinalitat que $\mathbb{R}$.

La seva construcció és com segueix: Prenem l'interval $K_0=[0,1]$ i li traiem el seu interval obert central $(1/3,2/3)$. El conjunt obtingut $K_1=[0,1]\setminus(1/3,2/3)$ està format per dos intervals tancats. Ara fem el mateix amb els dos intervals de K_1 per tal d'obtenir el conjunt

$$K_2=\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right]\cup\left[\frac{6}{9},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right].$$

Repetint aquest procés infinits cops obtenim infinits K_n i el conjunt K és la seva intersecció. Els primers passos d'aquesta construcció s'il·lustren a la Figura 10.

Figura 10: Conjunt de Cantor.

Anem a veure les dues propietats de K que hem enunciat. El fet que tingui longitud zero és conseqüència del fet que a l'interval $[0,1]$ li anem fent forats amb suma de longituds

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} + 2\times\frac{1}{9} + 4\times\frac{1}{27} + 8\times\frac{1}{3^4} + \cdots \\ &\qquad = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots\right) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1\,. \end{aligned}$$

Per tant, al final del procés, la *pols* que queda és el conjunt de Cantor K, i té longitud 0.

La prova següent del fet que el conjunt de Cantor K té la mateixa cardinalitat que $\mathbb{R}$ (o que $[0,1]$) és una mica més complicada, però força divertida.

Estem acostumats a veure les expressions decimals dels nombres en base deu. Així: $\frac{4}{5} = 0.8_{(10)}$. Però també és cert que, en base 2,

$$\begin{aligned} 0.8_{(10)} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{0}{2^7} + \cdots \\ &= 0.110011001100\ldots_{(2)} = 0.\overgroup{1100}_{(2)}\,, \end{aligned}$$

i en base 3,

$$\begin{aligned} 0.8_{(10)} &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \frac{1}{3^6} + \frac{0}{3^7} + \cdots \\ &= 0.210121012101\ldots_{(3)} = 0.\overgroup{2101}_{(3)}\,, \end{aligned}$$

Per tant

$$0.8_{(10)} = 0.\overgroup{1100}_{(2)} = 0.\overgroup{2101}_{(3)}\,.$$

Així, per la seva construcció, el conjunt de Cantor K està format precisament pels nombres x de l'interval $[0,1]$ tals que *l'expressió de x en base*

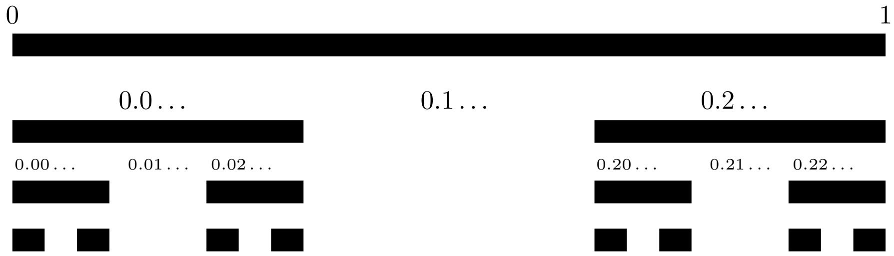


Figura 11: Conjunt de Cantor en base 3.

tres no té uns. Vegem-ho a la Figura 11, on es mostren els números en base 3 corresponents al conjunt de Cantor.

A partir d'un $x \in K$, expressat en base 3, en creem un altre, $\widetilde{x}$ que consisteix a canviar tots els 2 de la seva expressió en base 3 per 1's. Aleshores, *l'aplicació $f(x)$ consisteix a pensar aquest $\widetilde{x}$ com si estigués escrit en base 2.*

Per exemple, prenem $x = 3/4$. Aquest nombre és de K, ja que $0.75_{(10)} = 0.202020\ldots_{(3)} = 0.\overset{\frown}{20}_{(3)}$. Per tant

$$f(x) = \widetilde{x} = 0.\overset{\frown}{10}_{(2)} = 0.66666\ldots_{(10)} = 0.\overset{\frown}{6}_{(10)} = \frac{2}{3}.$$

No és difícil veure que $f : K \to [0,1]$ és bijectiva.

2.3 Georg Cantor

El matemàtic alemany (nascut a Rússia) Georg Cantor (1845-1918) va ser un dels fundadors de la teoria de conjunts, així com el precursor de l'estudi sistemàtic dels cardinals dels diferents tipus de conjunts infinits. Com hem dit, molts dels resultats exposats fins ara i dels de la secció següent són deguts a ell.

G. Cantor.

Cantor no va ser gaire afortunat. Per una banda va tenir molts problemes de salut. Per l'altra, va tenir com a opositor el conegut matemàtic alemany Leopold Kronecker (1823-1891), professor a la Universitat de Berlin, que no li va permetre obtenir una posició en aquesta prestigiosa universitat. Va dir d'en Cantor coses com: "corruptor de la joventut", "xarlatà científic", i també,

> *No sé què predomina més en la teoria de Cantor, la filosofia o la teologia, però estic segur que no hi ha matemàtiques dins d'ella.*

Per sort, l'influent matemàtic alemany D. Hilbert (1862-1943), va dir d'ell:

> *Ningú ens apartarà mai del paradís que Cantor ha creat per a nosaltres.*

Avui en dia és un matemàtic amb prestigi reconegut. A la secció següent ens començarem a passejar pel paradís que ell va crear.

3 El paradís de Cantor: infinits infinits

$\aleph_0$

Es defineix *alef sub zero* com la cardinalitat de $\mathbb{N}$, on alef es la primera lletra de l'alfabet hebreu, vegeu la figura, i s'escriu

$$\operatorname{car}(\mathbb{N}) = \aleph_0.$$

Ja hem vist que tenen cardinalitat $\aleph_0$, els conjunts $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, els nombres primers o els nombres algebraics. Per altra banda, no la tenen, els conjunts $\mathbb{R}$, $(0,1)$, $[0,1]$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ o el conjunt de Cantor K.

En general, donat un conjunt X qualsevol es denota per $\mathcal{P}(X)$ el nou conjunt format per tots els seus subconjunts i s'anomena *parts de* X. Així, per exemple, si $X = \{a,b,c\}$, aleshores

$$\mathcal{P}(X) = \Big\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\Big\}.$$

Observi's que X té 3 elements i $\mathcal{P}(X)$ en té $8 = 2^3$.

Més en general, és fàcil veure que si X té n elements, $\mathcal{P}(X)$ en té molts més, exactament 2^n. Per això, de vegades s'usa també la notació $2^X = \mathcal{P}(X)$.

Enunciem a continuació un resultat general molt interessant i potent, que com veurem és la clau per a descobrir una infinitud d'infinits.

Teorema. *Sigui X un conjunt qualsevol. Aleshores no hi ha cap aplicació bijectiva entre X i $\mathcal{P}(X)$. A més,* $\operatorname{car}(X) < \operatorname{car}(\mathcal{P}(X))$.

Remarquem que en el resultat anterior usem la definició següent: *es diu que* $\operatorname{car}(X) < \operatorname{car}(Y)$ *si hi ha una aplicació injectiva $f: X \to Y$, però no hi ha cap aplicació exhaustiva $g: X \to Y$.*

Ara podem introduir fàcilment infinits tipus de conjunts infinits, cada cop més grans.

- Els que tenen cardinalitat $\aleph_0$.
- Els que tenen la mateixa cardinalitat que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, que anomenem $2^{\aleph_0}$.

- Els que tenen la mateixa cardinalitat que $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\mathbb{N})\big)$, que anomenem $2^{2^{\aleph_0}}$.
- Els que tenen la mateixa cardinalitat que $\mathcal{P}\Big(\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\mathbb{N})\big)\Big)$, que anomenem $2^{2^{2^{\aleph_0}}}$.
- ...

A partir de la llista anterior sorgeixen un parell de preguntes importants:

- Entre tots els nous cardinals $2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}, 2^{2^{2^{\aleph_0}}}, \ldots$ hi ha el de $\mathbb{R}$?
- Hi ha més cardinals que els de $\mathbb{R}$ i $\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}, 2^{2^{2^{\aleph_0}}}, \ldots$?

Veurem a continuació que la resposta a la primera qüestió és que sí, i que de fet $\mathrm{car}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$. La segona pregunta és molt més difícil de respondre.

3.1 $\mathbb{R}$ te cardinalitat $2^{\aleph_0}$

Per a veure-ho s'ha de construir una aplicació bijectiva entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ i $\mathbb{R}$. Equivalentment, es pot construir una aplicació bijectiva f entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ i $[0,1]$. De nou l'expressió dels nombres en base 2 jugarà un paper important.

Agafem $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ i definim

$$f(X) = 0.n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 \ldots n_k \ldots_{(2)} \in [0,1],$$

on

$$n_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \in X \\ 0 & \text{si} \quad i \notin X, \end{cases}$$

on recordem que $0.n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 \ldots n_k \ldots_{(2)}$ és l'expressió en base 2 del número a l'interval $[0,1]$. Per exemple:

$$\begin{aligned} f(\varnothing) &= 0, \\ f(\mathbb{N}) &= 1, \\ f(\{1,5\}) &= 0.10001_{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^5} = \frac{17}{32}, \\ f\big(\{2,4,6,8,10,\ldots,2k,\ldots\}\big) &= 0.0101010101\ldots_{(2)} = 0.\widehat{01}_{(2)} = \frac{\frac14}{1-\frac14} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

De nou, no és complicat veure que aquesta aplicació és una bijecció.

3.2 La hipòtesi del continu

Ara que ja sabem que la cardinalitat de $\mathbb{N}$ és $\aleph_0$ i la de $\mathbb{R}$ és $2^{\aleph_0}$. Una pregunta molt natural és:

> *Hi ha algun conjunt amb una cardinalitat intermèdia entre* $\aleph_0$ *i* $2^{\aleph_0}$*?,*

o equivalentment,

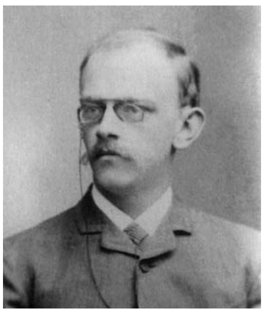
> *Existeix algun conjunt* Y *de manera que* $\aleph_0 < \mathrm{car}(Y) < 2^{\aleph_0}$*?*

De fet, aquesta pregunta va ser el *primer problema* d'una llista de 23 que va posar Hilbert a la comunitat matemàtica, l'any 1900 a París en el Congrés Mundial de Matemàtiques.

La NO existència de conjunts amb cardinalitat entre $\aleph_0$ i $2^{\aleph_0}$ s'anomena *hipòtesi del continu.* A molts llocs es formula aquesta hipòtesi dient que $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, on $\aleph_1$ és un cardinal que no hem introduït aquí i que ens indica el primer cardinal més gran que $\aleph_0$. La prova de l'existència d'aquest $\aleph_1$ és complicada i sobrepassa els objectius d'aquest treball.

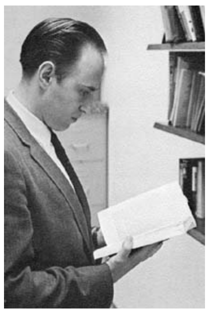
L'any 1939 el matemàtic, filòsof i especialista en lògica, austríac-americà, Kurt Gödel (1906-1978) va demostrar que la hipòtesi del continu és compatible amb tots els altres axiomes de la teoria de conjunts. Per tant, mai es podrà demostrar la seva falsedat.

L'any 1963 el matemàtic nord-americà Paul Cohen (1934-2007) va demostrar la *indecidibilitat* de la hipòtesi del continu. Això vol dir que tant suposar que la hipòtesi del continu és certa, com suposar que és falsa, no porta a cap contradicció amb els esmentats axiomes.



D. Hilbert

K. Gödel



P. Cohen

Sembla que l'infinit segueix guardant en secret els seus misteris!

4 L'infinit com a substantiu

Suposem que volem conèixer cap a on s'acosta la successió de valors $\sqrt[n]{n}$ quan n és fa arbitràriament gran. Per intuir la solució, primer calculem els valors per a uns quants valors de n.

n	2	5	10	10^2	10^3	10^6
$\sqrt[n]{n}$	1.414	1.380	1.259	1.047	1.007	1.000014

Per escriure més còmodament el que volem calcular, considerem una ampliació de $\mathbb{N}$, com

$$\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\} \cup \{\infty\}\,.$$

Aquest ∞ no és un nombre natural, sinó un objecte nou. Quan diem que n es fa arbitràriament gran, ho podem reinterpretar com n *tendeix a infinit*, i ho podem escriure en notació matemàtica com $n \to \infty$.

Així podem escriure de manera més compacta que el que ens interessa és calcular

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\,.$$

Amb aquest objectiu definim $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$, per a $n > 1$. Aleshores, aplicant el binomi de Newton per a $n \geq 4$,

$$\begin{aligned} n = (1 + x_n)^n = 1 + n\,x_n + \frac{n\,(n-1)}{2}\,x_n^2 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{6}\,x_n^3 + \cdots + x_n^n \\ > \frac{n\,(n-1)}{2}\,x_n^2\,, \end{aligned}$$

d'on obtenim que

$$0 < x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}\,.$$

Per tant, com que $\sqrt{2/(n-1)}$ tendeix a zero quan $n \to \infty$, tenim $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, i en conseqüència $L = 1$ tal i com volíem veure.

Quan considerem els nombres reals, es pot ampliar aquest conjunt afegint dos elements nous, que tenen un sentit similar a quan construíem $\overline{\mathbb{N}}$,

$$\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Amb aquests elements nous, tenen sentit les igualtats següents:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+x-1}{x^2+7x+100} = 3\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+x-1}{x^2+7x+100} = 3\,,$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^2} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to -1} \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^2} = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty\,.$$

Per tal de simplificar el càlcul de límits, s'introdueixen les operacions usuals a $\overline{\mathbb{R}}$. Això porta a relacions curioses com

$$\begin{array}{lll} +\infty + 3 = +\infty\,, & +\infty - \pi = +\infty\,, & +\infty + (+\infty) = +\infty\,, \\ \frac{1}{4} \times (+\infty) = +\infty\,, & -7.7 \times (+\infty) = -\infty\,, & -\ln(33) \times (-\infty) = +\infty\,, \\ \frac{2.9}{+\infty} = 0\,, & 2^{+\infty} = +\infty\,, & 0.1^{+\infty} = 0\,, \\ 100^{-\infty} = 0\,, & (+\infty)^{+\infty} = +\infty\,, & (+\infty)^{-3} = 0\,, \\ \dots & \dots & \dots\,, \end{array}$$

i també a les anomenades indeterminacions,

$$\begin{array}{lll} +\infty - (+\infty)\,, & \frac{+\infty}{+\infty}\,, & \frac{0}{0}\,, \\ 1^{+\infty}\,, & 0 \times (+\infty)\,, & +\infty^0\,, \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Recordem que, per exemple, $+\infty/+\infty$ és una indeterminació ja que el seu valor *depèn* de la velocitat en la que el numerador i el denominador de la fracció s'acosten cap a $+\infty$. Així són d'aquest tipus

$$\frac{x^2+1}{x}\,, \quad \frac{7x^2+x+3}{2x^2-1}\,, \quad \frac{5x^2-x-1}{x^3+x}$$

i tenim

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x} = +\infty\,, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{7x^2+x+3}{2x^2-1} = \frac{7}{2}\,, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2-x-1}{x^3+x} = 0\,.$$

De fet, una indeterminació de la forma $+\infty/+\infty$ pot donar qualsevol valor positiu o zero, i també $+\infty$.

En l'ampliació de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ per a tenir en compte l'infinit hi ha diversos camins.

Una primera manera és concentrar tot l'infinit en un punt. Aleshores

$$\overline{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}.$$

Observeu que aquesta manera s'unifica el $+\infty$ i el $-\infty$ del cas de l'ampliació de $\mathbb{R}$ de fa un moment en un sol infinit sense signe, ∞.

Per a un punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, estar prop de l'∞ vol dir que el seu mòdul $\sqrt{x^2 + y^2}$ és molt gran.

De fet, aquest espai ampliat $\overline{\mathbb{R}^2}$, sovint s'assimila a un subespai d'un de dimensió més gran, i s'anomena *compactificació* de l'espai original. Així

$$\overline{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

En la Figura 12 veiem, l'esfera $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$, com a compactificació de $\mathbb{R}^2$. En aquesta compactificació:

- El pol nord de l'esfera és l'∞.
- Els altres punts estan en correspondència bijectiva amb els de $\mathbb{R}^2$, mitjançant l'aplicació que envia cada punt $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ al punt de $\mathbb{S}^2$ obtingut tallant l'esfera amb la recta que passa per $\mathbf{p}$ i el seu pol nord. Aquesta aplicació s'anomena *projecció estereogràfica*.

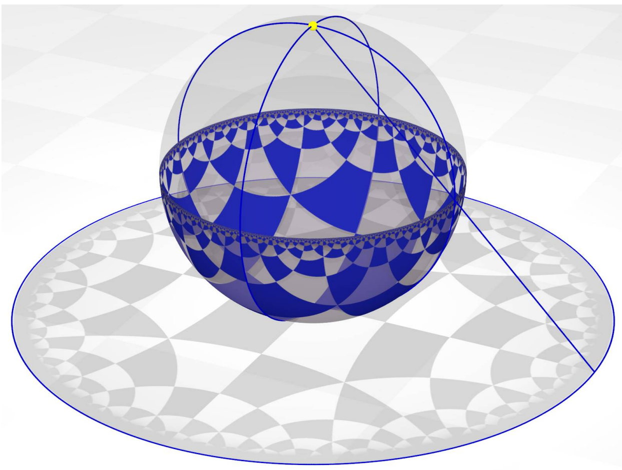


Figura 12: Compactificació de $\mathbb{R}^2$.

De manera similar

$$\overline{\mathbb{R}^3} = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{S}^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}.$$

Comentarem finalment una manera totalment diferent d'ampliar $\mathbb{R}^2$. L'infinit a geometria és molt més que un sol punt. Per exemple, a la *geometria projectiva al pla*, l'infinit està format per infinits punts, cadascun d'ells corresponent a la direcció determinada per totes les rectes paral·leles entre elles.

5 La velocitat de la llum i infinit

Si hi ha dos observadors, com a la Figura 13, els dos movent-se amb velocitat constant, i el que està a O' es mou amb velocitat v en la direcció de l'eix Ox^+ respecte al que esta a O, les seves posicions respectives a l'instant t, respecte a O, són

$$(0,0,0,t) \quad \text{i} \quad (v\,t,0,0,t)\,,$$

on posem conjuntament la posició a l'espai i el temps com $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

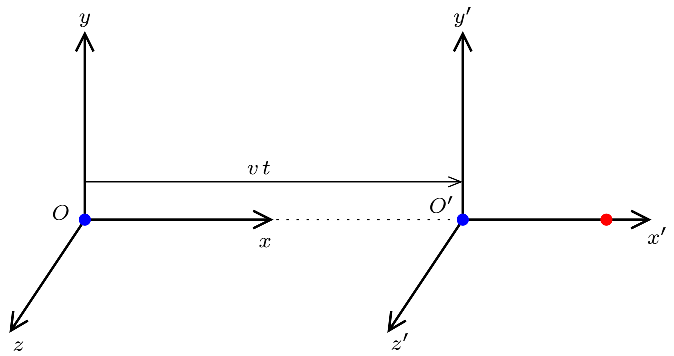


Figura 13: Dos observadors movent-se amb velocitats constants.

Si ara hi ha un objecte que es mou sobre l'eix Ox^+, que quan $t = 0$ és al punt x_0 i s'acosta cap a l'origen amb velocitat w, aleshores les seves coordenades des del l'observador O, són

$$(x_0 - w\,t, 0, 0, t).$$

La transformació de Galileo ens permet calcular les coordenades de l'objecte mirades des de l'observador O', a partir de les de l'observador O. Aquestes noves coordenades són:

$$\begin{cases} x' = x - v\,t, \quad y' = y, \quad z' = z, \\ t' = t. \end{cases}$$

Per tant

$$(x', y', z', t') = (x_0 - w\,t - v\,t, 0, 0, t) = (x_0 - (v + w)\,t, 0, 0, t).$$

Aleshores, mirat des de O' l'objecte s'acosta a O' amb velocitat $v+w$ tal i com diu el sentit comú.

La transformació de Lorentz ens permet calcular les noves coordenades $(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{t})$ des del punt de vista de l'observador O', complint els postulats de *la teoria de la relativitat restringida* següents:

- El mòdul de la velocitat de la llum c *és independent* de l'observador, si aquest es mou a velocitat constant (sistema inercial),
- Les lleis de la física són les mateixes en tot sistema inercial.

Aquesta transformació és:

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{x - v\,t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,, \ \overline{y} = y\,, \ \overline{z} = z\,, \\[2ex] \overline{t} = \dfrac{t - \frac{v\,x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,. \end{cases}$$

Anem a veure que es compleix el primer postulat. Per això, prenem com a objecte que s'acosta un fotó, és a dir les seves coordenades des de O són $(x_0 - c\,t, 0, 0, t)$. Aleshores, les noves coordenades d'aquesta partícula seran:

$$(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{t}) = \left(\frac{x_0 - c\,t - v\,t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, 0, 0, \frac{t - \frac{v\,(x_0 - c\,t)}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Simplificant

$$\overline{x} = \frac{x_0 - (c+v)\,t}{\gamma}\,, \quad \overline{t} = \frac{\frac{c+v}{c}\,t - \frac{v}{c^2}\,x_0}{\gamma}\,, \quad \gamma = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,.$$

Per tant, la partícula de llum s'acosta a O' amb velocitat

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{x}}{d\overline{t}} &= \frac{d\overline{x}}{dt}\cdot\frac{dt}{d\overline{t}} = \frac{d\overline{x}}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{d\overline{t}}{dt}} \\ &= -\frac{c+v}{\gamma}\cdot\frac{1}{\frac{c+v}{c\gamma}} = -\frac{c+v}{\gamma}\cdot\frac{c\gamma}{c+v} = -c\,, \end{aligned}$$

com volíem veure. Observem que la transformació de Lorentz només està ben definida si $|v| < c$. De fet, és una conseqüència dels postulats de la teoria de la relativitat que només es poden moure a la velocitat de la llum les partícules sense massa, com per exemple els fotons.

Les transformacions de Lorentz en un context més general també se solen anomenar *transformacions de Poincaré*, en honor de Henry Poincaré, matemàtic universal que també va jugar un paper ben destacat en el desenvolupament de la Teoria de la Relativitat restringida, tot i que sovint aquesta s'atribueix quasi exclusivament a Albert Einsten.

5.1 De Galileo a Lorentz

Si fem limit quan c tendeix a $+\infty$ en la transformació de Lorentz tenim

$$\overline{x} = \frac{x - v\,t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{+\infty}}}\,, \quad \overline{y} = y\,, \quad \overline{z} = z\,, \quad \overline{t} = \frac{t - \dfrac{v\,x}{+\infty}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{+\infty}}}\,,$$

és a dir,

$$\overline{x} = x - v\,t\,, \quad \overline{y} = y\,, \quad \overline{z} = z\,, \quad \overline{t} = t\,,$$

i per tant recuperem la transformació de Galileo.

Per tant, acabem de veure que el límit quan $c \to +\infty$ de la transformació de Lorentz és la transformació de Galileo, o en altres paraules: *Si la velocitat de la llum fos* $+\infty$ *la física relativista coincidiria amb la física clàssica, introduïda per Galileo i Newton.*

Per sort, per a velocitats "normals", el quocient v/c és tan petit que la física clàssica és un model prou bo del mon real.

Galileo Galilei
(1564 – 1642)

H.A. Lorentz
(1853 – 1928)

J.H. Poincaré
(1854 – 1912)

A. Einstein
(1879 – 1955)

6 Algunes paradoxes associades a l'infinit

Presentarem per acabar tres conegudes paradoxes que tenen a veure amb l'ús de l'infinit: la no commutativitat de la suma infinita, la que tracta de com pintar la trompa de Gabriel i la paradoxa dels micos escriptors.

6.1 La suma infinita no és commutativa

Per veure amb més detall tota la teoria sobre la suma de sèries de números reals podeu consultar per exemple [7]. Suposem que volem calcular l'àrea groga de la Figura 14, suposant que el costat té mida 1.

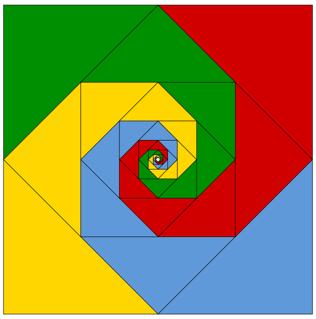


Figura 14: Una suma infinita convergent.

Del dibuix és clar que

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{1}{4}.$$

A més, l'àrea groga no depèn de l'ordre amb el que agafem els triangles.

Una primera sorpresa associada a sumar infinits nombres és que la suma de nombres cada cop més petits pot ser infinita. Probablement, l'exemple més conegut d'aquest fet és el de l'anomenada sèrie harmònica:

$$\begin{aligned} S &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} \\ &\qquad +\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}\cdots \\ &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) \\ &\qquad +\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{17}+\cdots \\ &> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty. \end{aligned}$$

Ara bé, tot i que la suma es divergent, es necessiten molts termes per a sumar un valor gran. Per exemple,

$$\sum_{k=1}^{1000}\frac{1}{k}=7.48\ldots \qquad \sum_{k=1}^{1\,000\,000}\frac{1}{k}=14.39\ldots \qquad \sum_{k=1}^{10^9}\frac{1}{k}=21.30\ldots$$

Un fet encara més interessant, ja demostrat per n'Euler en 1737, és que

$$\sum_{p \text{ primer}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} + \cdots = \infty.$$

Aquest resultat, a més de provar de nou l'existència d'infinits nombre primers, ens mostra clarament l'abundància d'aquests. Per altra banda, una prova de què hi ha "molts més" nombres primers que quadrats ens ho dóna el fet establert també per Euler un parell d'anys abans,

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Finalment, mostrarem el fet més sorprenent: *la suma infinita no sempre és commutativa.* Veiem-ho també en l'exemple més famós, la serie harmònica alternada.

Considerem

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

Al final d'aquesta secció veurem que aquesta suma és finita i a més calcularem S. Per una banda,

$$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots > 0.$$

Per l'altra, si suposem que és commutativa,

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots\right) = \frac{1}{2}S \end{aligned} \tag{1}$$

Per tant $S = S/2$, d'on es desprèn que $S = 0$, fet que és en contradicció amb el que acabem de veure, $S > 0$.

Veiem ara que la sèrie harmonica alternada és convergent i calculem la seva suma. Per això demostrarem primer un resultat degut al matemàtic Nicholas Mercator (1620-1687), contemporani de Newton, i a qui no hem de confondre amb el geògraf i matemàtic Gerardus Mercator (1512-1594). Per a $x \in (-1, 1]$, es compleix

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots \tag{2}$$

Per això, observem primer que, donat $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(1+t)\big(1-t+t^2-t^3+\cdots+(-t)^{n-1}\big) &= \big(1-t+t^2-t^3+\cdots+(-t)^{n-1}\big)\\ &\quad+\big(t-t^2+t^3+\cdots-(-t)^{n-1}-(-t)^n\big)\\ &= 1-(-t)^n.\end{aligned}$$

Per tant, si $t \neq -1$,

$$\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2-t^3+\cdots+(-t)^{n-1}+\frac{(-t)^n}{1+t}.$$

Aleshores, si fixem $x \in (-1,1]$ i integrem entre 0 i x tenim

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x \left(1-t+t^2-t^3+\cdots+(-t)^{n-1}+\frac{(-t)^n}{1+t}\right)dt\\ &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+E(x,n)\,, \qquad (3)\end{aligned}$$

on

$$E(x,n) = \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt\,.$$

Ara bé,

$$|E(x,n)| \leq \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \leq \int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}\,, & \text{si } x \in [0,1]\,,\\[2ex] \displaystyle\frac{1}{1+x}\int_0^{|x|} t^n\,dt = \frac{|x|^{n+1}}{(1+x)(n+1)} < \frac{1}{(1+x)(n+1)}\,, & \text{si } x \in (-1,0]\,.\end{cases}$$

Per tant

$$\lim_{n\to\infty} E(x,n) = 0\,.$$

Així si prenem límit quan n tendeix a infinit als dos costats de (3) demostrem la igualtat (2) de Mercator. Fent la substitució $x=1$, obtenim

$$\log 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots = S\,.$$

A partir d'aquest resultat i dels càlculs (1) del principi de la secció tenim

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots = \frac{\ln(2)}{2}\,.$$

De fet, si anomenem $a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, es pot veure que, donat *qualsevol nombre real* x *(on entre els valors possibles de* x *s'inclou* $\pm\infty$*)*, existeix una reordenació de

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\,,$$

que es pot escriure com

$$a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, \ldots, a_{\sigma(n)}, \cdots,$$

on $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ és una aplicació bijectiva, complint

$$x = a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + a_{\sigma(3)} + \cdots + a_{\sigma(n)} + \cdots$$

6.2 Com pintar la trompa de Gabriel

La trompa de Gabriel és similar a la de la figura d'aquí al costat però infinita, vegeu la Figura 16.

Quanta pintura necessitem per a pintar-la? Per saber la resposta necessitem conèixer l'àrea d'aquesta figura, que és del tipus que s'anomena superfície de revolució, vegeu la Figura 15. L'àrea d'una d'aquestes superfícies (sense comptar les tapes) es pot calcular utilitzant la fórmula

$$A(a,b) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\,. \tag{4}$$

Donarem una idea intuïtiva del perquè d'aquesta formula al final d'aquesta secció.

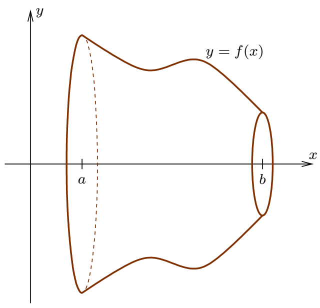


Figura 15: Cos de revolució.

Si ho apliquem a una trompa de Gabriel que tingui com a perfil

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{amb } a = 1,\; b = \infty\,,$$

tenim que l'àrea de la trompa és

$$A = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1 + \left(\frac{-1}{x^2}\right)^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} 2\pi \int_1^b \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx$$
$$> \lim_{b\to\infty} 2\pi \int_1^b \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b\to\infty} 2\pi \ln(x)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} 2\pi \ln(b) = \infty\,.$$

Per tant, necessitem una quantitat infinita de pintura.

Per altra banda, el volum de la superfície de revolució de la mateixa figura, entre a i b, ve donat per la fórmula

$$V(a,b) = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx\,. \tag{5}$$

Aplicant-la al mateix perfil $1/x$ entre 1 i ∞, tenim

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \lim_{b\to\infty} \pi \int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx \\ &= -\lim_{b\to\infty} \pi\, \frac{1}{x}\Big|_1^b = \pi \lim_{b\to\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = \pi < \infty\,. \end{aligned}$$

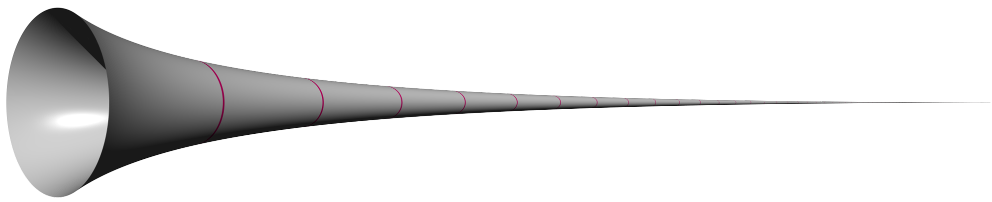


Figura 16: Trompa de Gabriel infinita.

Per tant, omplint la trompa amb π unitats de pintura quedarà pintada per dins, però la superfície per dins i per fora coincideixen. Aquest resultat definitivament ens sorprèn! Matemàticament no hi ha cap error en els càlculs. La “paradoxa” es dóna perquè barregem la idea física de pintar (que implica posar un cert gruix fixat de pintura en una superfície) amb una idea totalment teòrica, l’existència d’una trompa infinita. Hi haurà un moment en què el forat de la trompa serà tan petit que no hi cabrà ni un sol àtom!

Per acabar donem una explicació heurística de les fórmules (4) i (5). Si dividim el cos en trossets de amplada Δx com a la Figura 17. L’àrea i el volum de cada trosset són aproximadament

$$2\pi f(u_x)\sqrt{1+(f'(v_x))^2}\,\Delta x \quad \text{i} \quad \pi\,(f(w_x))^2\,\Delta x\,,$$

on u_x, v_x i w_x són punts de l’interval d’amplada Δx. La segona fórmula és ben natural, ja que el volum de cada llesca és aproximadament $\pi(f(w_x))^2\Delta x$ (l’àrea d’una *tapa* mitjana pel gruix de la llesca). Per a poder calcular la superfície de la llesca tindrem en compte que aquesta superfície exterior és la d’un tronc de con com el de la Figura 18 i que coincideix amb la d’una cinta d’amplada $h = \sqrt{1+(f'(v_x))^2}\,\Delta x$ (teorema de Pitàgoras) i llargada igual al perímetre mitjà de les dues tapes, que en aquest cas és $2\pi f(u_x)$, d’on obtenim el que volíem veure.

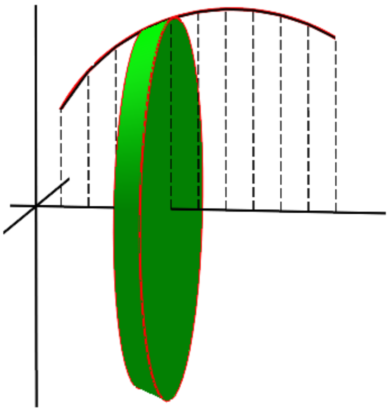


Figura 17: Divisió del cos de revolució en petites llesques d'amplada Δx.

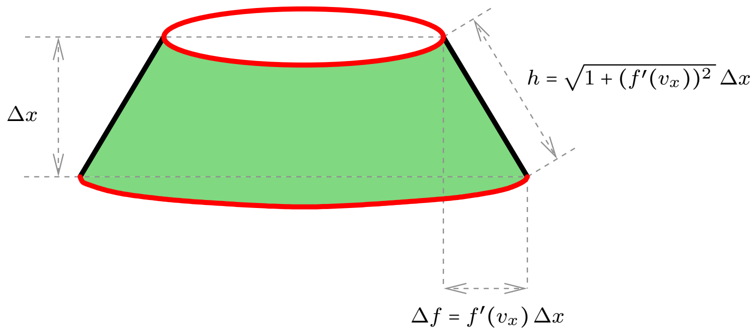


Figura 18: Tronc de con.

6.3 Micos escrivint a màquina

Posem un mico a escriure a màquina. Suposem que polsa completament a l'atzar les tecles, i que la probabilitat de polsar cadascuna d'elles és $1/50$. A més, suposem que el que polsa en un cert instant és totalment *independent* del que polsa en els instants anteriors i posteriors.

Anem a calcular quina és la probabilitat de què, polsant 6 tecles, escrigui exactament la paraula BANANA. Clarament, és

$$P\{\text{escriure BANANA}\} = \frac{1}{50} \times \frac{1}{50} \times \frac{1}{50} \times \frac{1}{50} \times \frac{1}{50} \times \frac{1}{50}$$
$$= \left(\frac{1}{50}\right)^6 = \frac{1}{15\,625\,000\,000} \approx 6.4 \times 10^{-11}\,.$$

Per tant la probabilitat de no escriure BANANA polsant 6 tecles és:

$$p = 1 - \left(\frac{1}{50}\right)^6 \approx 0.999999999936 < 1.$$

De la mateixa manera, la probabilitat de no escriure BANANA en *cap de* N blocs de 6 tecles és p^N. Veiem alguns valors aproximats de p^N:

N	10^6	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}
p^N	0.99993	0.993	0.94	0.53	0.002	1.6×10^{-28}

Per tant, si el mico escriu 10^{12} blocs de 6 lletres, la probabilitat d'escriure BANANA en algun d'ells és

$$1 - p^{10^{12}} = 0.99999999999999999999999999998396\ldots$$

Observeu que, de fet, la probabilitat de què ho escrigui polsant 6×10^{12} tecles encara és més gran, ja que pot passar que el mico escrigui:

$$\ldots \underbrace{\text{X97BAN}}\ \underbrace{\text{ANA+I7}}\ \underbrace{\text{9TY6DS}} \ldots$$

Aleshores

$$P\{\text{Escriure BANANA en } N \text{ blocs de 6 lletres}\} \geq 1 - p^N.$$

Com que $0 < p < 1$, $\lim_{N\to\infty} 1 - p^N = 1$ i per tant, si el mico polsa *infinites tecles*, la probabilitat de què escrigui BANANA és 1.

Hi ha un resultat matemàtic, conegut com a segon Lema de Borel-Cantelli, que ens permet assegurar molt més. Concretament, que la probabilitat de què escrigui *infinits cops* BANANA també és 1.

El que és encara més sorprenent és que, si en lloc de considerar la paraula BANANA, considerem, per exemple, el text complet del Quixot, aleshores, es pot repetir tot el raonament. L'únic que canvia és que si considerem que aquest llibre té uns 2×10^6 caràcters, aleshores hem de prendre

$$p = 1 - \left(\frac{1}{50}\right)^{2\times 10^6} < 1.$$

Per tant, si el mico polsa *infinites tecles*, la probabilitat que escrigui el Quixot és 1. És més, la probabilitat que escrigui *infinits cops El Quixot* també és 1.

Molt més sorprenent és que, si el mico polsa *infinites tecles*, la probabilitat que escrigui *totes les obres que s'han escrit fins ara* és 1. I la probabilitat que escrigui *infinits cops* totes les obres que s'han escrit fins ara és de nou 1.

Finalment, i posats a imaginar, si hi ha infinits micos polsant infinites tecles també té probabilitat 1 el fet que algun d'ells escrigui a la primera totes les obres que s'han escrit fins ara. Bé, de fet, infinits d'ells!

Aquesta paradoxa final és potser una de les que ens mostren més clarament la magnitud de l'infinit. De fet, si es suposa que hi ha tants micos com partícules es pensa que té tot l'Univers, que cada partícula és un mico escrivint a màquina, es suposa també que els micos escriuen a una velocitat molt gran i que estan escrivint sense parar des que hi ha mamífers a la Terra, el més probable és que cap d'ells encara no hauria escrit ni un sol capítol complet d'el Quixot!

Agraïments: L'autor està recolzat pel projecte MINECO MTM2013-40998-P i pel projecte 2014SGR568 de la Generalitat de Catalunya.

Referències

[1] Diferents autors, *Ideas del infinito*, Temas **23**, Investigación y Ciencia, 2001.

[2] Diferents autors, *Le mystère des nombres*, Sciences et Avenir, Hors-série, 2004.

[3] C. Bartocci, L. Civalleri, *NUMERI. Tutto quello che conta da zero a infinito*, Codice Edizioni 2014.

[4] G. Gamow, *One, Two, Three … Infinity: Facts and Speculations of Science*, New York: Viking Press 1947.

[5] E. Gracián, *Un descubrimiento sin fin. El infinito matemático*. Col·lecció: El mundo matemático, RBA 2010.

[6] R. Hammack, *BOOK OF PROOF*, 2003. Disponible en versió electrònica a http://www.people.vcu.edu/~rhammack/BookOfProof/

[7] M. Spivack, *CALCULUS. Cálculo infinitésimal*, Ed. Reverté 1975.

Departament de Matemàtiques,
Universitat Autònoma de Barcelona
gasull@mat.uab.cat

Publicat el 5 de maig