MAT^2
MATerials MATemàtics
Volum 2014, treball no. 5, 37 pp. ISSN: 1887-1097
Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques
de la Universitat Autònoma de Barcelona
www.mat.uab.cat/matmat

Hablemos de Series Divergentes

Josefina Álvarez

Especialmente con los trabajos de Abel y Cauchy, se observa un gran afán por la formalización y el rigor en las matemáticas europeas de la primera parte del siglo XIX. En este contexto, las series convergentes y las divergentes parecen atenerse muy bien al refrán "Cría buena fama y échate a dormir, cría mala fama y échate a morir". Sin embargo, mucho se puede hacer con las series divergentes, mientras que las convergentes no siempre son tan buenas como su fama indicaría. El propósito de este artículo es discutir el papel que las series divergentes juegan en la llamada aproximación asintótica de funciones.


COURS D'ANALYSE
DE
L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;
PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,
Iʳᵉ PARTIE.
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
1821.

Nuestra presentación será informal pero cuidadosa y pondrá énfasis en discutir las profundas diferencias que hay entre la aproximación por medio del concepto de convergencia y la aproximación asintótica. El artículo incluye numerosos ejemplos y una lista de referencias que permitirán ampliar la exposición y aplicarla en diferentes campos.

1. Comencemos por recordar ...

... la definión de serie convergente.

Definición 1 *Una serie, que para fijar ideas siempre supondremos de términos reales, es convergente, si la sucesión de sus sumas parciales converge.*

Es decir, la serie

$$\sum_{j\geq 0} u_j$$

con suma parcial

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} u_j$$

es convergente, si hay un número S para el cual

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S .$$

Esto quiere decir que para cada $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$|S_n - S| < \varepsilon \quad \textit{para todo } n \geq N .$$

Si éste es el caso, decimos que la serie converge a S o que su suma es S, lo que indicaremos $\sum_{j\geq 0} u_j = S$. En cualquier otro caso catalogamos a la serie como divergente.

Por ejemplo, cada una de las series

$$\sum_{j\geq 1} \frac{1}{j^2} ,$$
$$\sum_{j\geq 0} x^j \quad \text{para } |x| < 1 ,$$
$$\sum_{j\geq 0} \frac{x^j}{j!} \quad \text{para todo } x ,$$

es convergente, con suma $\frac{\pi^2}{6}$, $\frac{1}{1-x}$ y e^x respectivamente, mientras que las series

$$\sum_{j\geq 0} (-1)^j ,$$
$$\sum_{j\geq 0} x^j \quad \text{para } |x| \geq 1 ,$$
$$\sum_{j\geq 0} j!\, x^j \quad \text{para todo } x ,$$

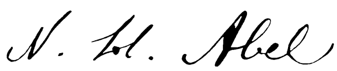
son divergentes.

Ya el matemático inglés John Wallis (1616–1703) formuló en 1655 una definición equivalente a la definición de sucesión convergente dada aquí ([25], pág. 11). De acuerdo con ([25], pág. 16), la expresión "serie convergente" fue introducida por el matemático escocés James Gregory (1638–1675) en 1668, mientras que la expresión "serie divergente" se debe a Nicolaus (I) Bernoulli (1687–1759), quien la introdujo en 1733.

Hay resultados que permiten decidir sobre la convergencia de una serie, sin necesidad de conocer su límite. A este respecto, podemos citar (ver por ejemplo [8], pág. 175) la condición necesaria y suficiente dada por el matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789–1857) en su *Cours d'Analyse*, publicado en 1821. En efecto, Cauchy fue el primero en hacer un estudio riguroso de las condiciones bajo las cuales una serie converge ([20], biografía de Cauchy).

Aunque hay mucho para hablar de las series convergentes y de sus usos, aquí las dejamos por ahora, porque nuestro interés se centra en aquellas series que son divergentes.

2. ¿Qué hacer con las series divergentes?



Históricamente, podemos distinguir tres enfoques. Uno, es el desecharlas como algo indeseable. Ésta fue la actitud, entre otros, del gran matemático noruego Niels Henrik Abel (1802–1829), quien en 1828 dijo ([11], prefacio escrito por J. E. Littlewood): "Las series divergentes son la invención del diablo y el basar en ellas una demostración es vergonzoso". Abel fue un enamorado del rigor y un admirador ardiente de Cauchy, a quien consideró "el único que hoy en día sabe cómo se deben hacer las matemáticas" ([20], biografía de Cauchy).

El segundo enfoque es el formular nuevas definiciones de convergencia, conocidas como métodos de sumabilidad. Este enfoque ha producido resultados fructíferos, por ejemplo, en el estudio de las series de Fourier ([24], pág. 229; [12]) y más recientemente en relación con métodos de extrapolación [3] y en mecánica cuántica [1].

Un tercer enfoque es el aceptar a las series divergentes por lo que son, dándose cuenta de que pueden ser una herramienta poderosa en la aproximación de funciones. Este enfoque, iniciado con el estudio de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias y en la llamada astronomía dinámica ([25], pág. 151; [22]), continúa teniendo un número creciente de aplicaciones ([2]; [9]; [18], capítulo 4).

En las siguientes secciones presentaremos ejemplos y resultados ilustrativos de este tercer enfoque, que realmente aprovecha las propiedades muy interesantes que una serie divergente puede tener. Para no alargar demasiado las cosas, dejaremos de lado la consideración del segundo enfoque que hemos mencionado, los llamados métodos de sumabilidad. En ([25], págs. 154–158) y especialmente en [11] se puede ver una presentación excelente de estos métodos.

Antes de meternos de lleno en nuestro tema, necesitaremos recordar un par de notaciones que nos serán de gran utilidad cuando tengamos que comparar el tamaño de funciones en el entorno de un punto.

3. Las notaciones O y o

Consideramos dos funciones reales, f y g, definidas en un conjunto D de números reales que tiene un punto de acumulación a que puede ser finito o infinito. Cuando trabajemos con $+\infty$ omitiremos el signo $+$.

Definición 2 *Decimos que*

$$f(x) = O(g(x)) \quad \textit{cuando } x \to a$$

si existe un número real $C > 0$ y un entorno U de a tal que

$$|f(x)| \leq C\,|g(x)| \quad \textit{para } x \in D \cap U\,.$$

Definición 3 *Decimos que*

$$f(x) = o(g(x)) \quad \textit{cuando } x \to a$$

si para cada $\varepsilon > 0$, existe un entorno $U = U(\varepsilon)$ de a tal que

$$|f(x)| \leq \varepsilon\,|g(x)| \quad \textit{para } x \in D \cap U\,.$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
5\,x^3 - 2\,x^2 + 1 &= O(x^3) &&\text{cuando } x \to \infty\,,\\
10\,x &= O(2\,x) &&\text{cuando } x \to \infty\,,\\
x^3 &= o(x^2) &&\text{cuando } x \to 0\,,\\
\ln x &= o(x^\alpha) &&\text{cuando } x \to \infty\,,\ \text{para todo } \alpha > 0\,.
\end{aligned}$$

Nos referimos a la notación O diciendo que “f es o grande de g” , mientras que la notación o se lee “f es o pequeña de g”.

Cuando $f = O(g)$ decimos que el order de magnitud de f es no mayor que el orden de magnitud de g. Es decir, el describir el tamaño de una función en términos de O, es dar una cota superior para el crecimiento de $|f|$. Por supuesto, estas afirmaciones son relativas a un punto a particular. Si la función g no se anula en un entorno de a, entonces $f = O(g)$ significa que el cociente $\left|\frac{f}{g}\right|$ está acotado cerca de a, o equivalentemente, $\limsup_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$.

La notación $f = o(g)$ quiere decir, en términos vagos, que la función f es "mucho menor" que la función g, cerca de a. Si la función g no se anula en un entorno de a, entonces $f = o(g)$ significa que $\limsup_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$. En realidad, en muchos casos de interés el límite existe, lo que hace muy fácil el establecer y comparar órdenes de magnitud. Tal es el caso en los ejemplos que acabamos de dar.

Es claro que $f = o(g)$ implica $f = O(g)$, pero no recíprocamente:

$$\operatorname{sen} x = O(1) \quad \text{cuando } x \to \infty\,,$$

porque la función está acotada para todo x real, pero

$$\operatorname{sen} x \neq o(1) \quad \text{cuando } x \to \infty\,,$$

porque la función ni siquiera tiene límite para $x \to \infty$.

De acuerdo con ([26]; [25], pág. 11), las notaciones O y o fueron introducidas por el matemático alemán Paul Gustav Heinrich Bachmann (1837–1920) en el segundo volumen de su excelente tratado ([20], biografía de Bachmann) sobre teoría de números, publicado en 1894. Las notaciones fueron popularizadas por el matemático alemán Edmund Georg Hermann Landau (1877–1938), quien las usó en trabajos, también sobre teoría de números, publicados en 1909.

P. G. Bachmann

Veremos que las notaciones O y o se usan, por ejemplo, para describir el error con que una función es aproximada por las sumas parciales de una cierta serie.

El matemático y científico de la computación americano Donald Ervin Knuth (n. 1938), creador del lenguage TEX, ha popularizado las notaciones O y o en computación científica, donde se usan para analizar la complejidad de un algoritmo ([18], capítulo 1). Es decir, para ver cómo depende del tamaño de los datos, el tiempo o el número de pasos necesarios para ejecutarlo. En este contexto, usualmente se trabaja con funciones de los números naturales en sí mismos, cuyo orden de magnitud se desea establecer cuando la variable tiende a ∞.

Knuth también ha refinado varias otras notaciones relacionadas con O y o ([13], [26]) y ha defendido la conveniencia y la utilidad de emplear las notaciones O y o en la enseñanza del Cálculo ([14]).

Podemos pensar que $O(g)$ es el conjunto de todas las funciones cuyo orden de magnitud, cerca de un cierto punto, no es mayor que el orden de magnitud de g. Igualmente, $o(g)$ indica a aquellas funciones que tienen orden de magnitud "mucho menor" que g, en el sentido de la definición 3. Desde este punto de vista, sería más correcto usar el símbolo de pertenencia, $\in$. Por ejemplo,

$$x^2 \in O(x^3) \quad \text{cuando } x \to \infty\,,$$
$$x \in o(\ln x) \quad \text{cuando } x \to 0\,.$$

Desafortunadamente, hay que aceptar que el uso del signo igual ha prevalecido.

Observemos que las notaciones O y o no son simétricas. Por ejemplo, es correcto decir

$$x^2 = O(x^3) \quad \text{cuando } x \to \infty\,,$$

mientras que $x^3 = O(x^2)$ cuando $x \to \infty$, no lo es. Informalmente, podemos decir que el signo igual usado con O y o da una especie de igualdad unilateral. O sea, que en general se lo puede usar sólo de izquierda a derecha. Notamos otra vez el uso de la palabra "es" en las expresiones "f es o grande de g" y "f es o pequeña de g".

Knuth observa en [14] que en las matemáticas, no es inusual que el signo igual tenga un significado unilateral, dependiente del contexto. Por ejemplo, la intención de desarrollar el cuadrado $(1+x)^2$ se muestra leyendo la igualdad

$$(1+x)^2 = 1 + 2\,x + x^2$$

de izquierda a derecha, pero no de derecha a izquierda.

En esta explicación de las notaciones O y o, nos hemos limitado casi exclusivamente a aquellos aspectos que serán de interés en las secciones que siguen. En la referencia ([18], capítulo 4) se puede leer una versión aún más sucinta, mientras que el artículo [26] contiene muchos otros resultados y comentarios.

4. Series asintóticas

Para motivar el tema, comenzaremos desarrollando un par de ejemplos sencillos. El primero está basado en la igualdad

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{j\geq 0} (-1)^j\, x^j\,, \tag{1}$$

válida para $|x| < 1$.

No es difícil comparar la suma de la serie con las sumas parciales. En efecto, para todo $x \neq -1$,

$$\frac{1}{1+x} - \sum_{j=0}^{n} (-1)^j\, x^j = (-1)^{n+1}\, \frac{x^{n+1}}{1+x}\,, \tag{2}$$

lo cual se puede comprobar calculando

$$\frac{1 - (1+x)\, \sum_{j=0}^{n} (-1)^j\, x^j}{1+x}\,.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{1+x} - \sum_{j=0}^{n} (-1)^j\, x^j = O(x^{n+1}) \quad \text{cuando } x \to 0 \tag{3}$$

y también

$$\frac{1}{1+x} - \sum_{j=0}^{n} (-1)^j\, x^j = o(x^n) \quad \text{cuando } x \to 0\,. \tag{4}$$

Más precisamente, si fijamos $n \geq 2$ y consideramos $|x| \leq \dfrac{1}{n}$,

$$\left| \frac{1}{1+x} - \sum_{j=0}^{n} (-1)^j\, x^j \right| \leq \frac{1}{(n-1)\, n^n} \quad \text{para } |x| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}\,.$$

Si, por ejemplo, tomamos $n = 3$ y en consecuencia $|x| \leq \dfrac{1}{3}$

$$\left| \frac{1}{1+x} - \sum_{j=0}^{3} (-1)^j x^j \right| < 0{,}02\,.$$

En cambio, si tomamos $n = 4$, y entonces $|x| \leq \dfrac{1}{4}$,

$$\left| \frac{1}{1+x} - \sum_{j=0}^{4} (-1)^j \, x^j \right| < 0{,}002\,.$$

Es decir, que valores pequeños de n ya nos dan sumas parciales que aproximan bien el valor de la función, para valores de x en entornos determinados de cero.

Observemos que este comportamiento es muy diferente de lo que ocurre cuando hablamos de la convergencia de la serie a su suma. En este último caso, fijamos un valor de x dentro de la región de convergencia y consideramos valores de n mayores que un valor suficientemente grande, para asegurarnos que la suma parcial aproxima, con un error preestablecido, a la suma de la serie.

Nuestro segundo ejemplo es más interesante, porque la función que queremos aproximar no tiene una fórmula explícita, sino que está definida por medio de una integral ([25], pág. 150),

$$\int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{x-t}}{t}\, dt\,,$$

que converge para todo $x > 0$. En efecto, fijado $x > 0$, podemos escribir, para $t \geq x$,

$$\frac{\mathrm{e}^{x-t}}{t} \leq \frac{\mathrm{e}^{x}}{x}\, \mathrm{e}^{-t}\,.$$

Por lo tanto, dicha integral define una función, digamos $f(x)$, para $x > 0$. Además,

$$f(x) = \int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{x-t}}{t}\, dt \leq \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} \int_x^\infty \mathrm{e}^{-t}\, dt = \frac{1}{x}\,.$$

Es decir, $f(x) = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ o $f(x) = o(1)$, cuando $x \to \infty$.

Estas estimaciones se pueden extender, integrando por partes. En efecto, si elegimos

$$u' = \mathrm{e}^{x-t}\,,\ v = t^{-1}\,,$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{\mathrm{e}^{x-t}}{t}\Bigg|_x^\infty - \int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{x-t}}{t^2}\, dt \\ &= \frac{1}{x} - \int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{x-t}}{t^2}\, dt\,. \end{aligned}$$

Después de $n+1$ integraciones por partes, para cualquier $n \geq 0$, tendremos

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j\, j!}{x^{j+1}} + (-1)^{n+1}\,(n+1)! \int_x^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{x-t}}{t^{n+2}}\, dt\,.$$

El primer término es la suma parcial $S_n(x)$ de la serie $\sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j\, j!}{x^{j+1}}$, mientras que el segundo término nos da la diferencia entre $f(x)$ y esta suma parcial.

$$\begin{aligned} |f(x) - S_n(x)| &= (n+1)! \int_x^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{x-t}}{t^{n+2}}\, dt \\ &\leq \frac{(n+1)!}{x^{n+2}} \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{x-t}\, dt = \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Es decir,

$$f(x) - S_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+2}}\right) \quad \text{cuando } x \to \infty \tag{6}$$

y también

$$f(x) - S_n(x) = o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) \quad \text{cuando } x \to \infty\,. \tag{7}$$

Pongamos a la estimación (5) en un contexto numérico. Como estamos interesados en valores grandes de x, supondremos, por ejemplo, $x \geq 2\,n$, para $n \geq 2$ fijo. Si éste es el caso,

$$\frac{(n+1)!}{x^{n+2}} \leq \frac{(n+1)!}{2^{n+2}\, n^{n+2}}\,.$$

Para simplificar esta cota, podemos comenzar observando que

$$n! \leq n^{n-1} \quad \text{para } n \geq 1\,,$$

lo cual puede probarse por inducción. Entonces,

$$\frac{(n+1)!}{2^{n+2}\, n^{n+2}} \leq \frac{(n+1)}{2^{n+2}\, n^3} \leq \frac{1}{2^{n+1}\, n^2}\,.$$

Finalmente,

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n+1}\, n^2} \quad \text{para } x \geq 2\,n \geq 4\,.$$

Por ejemplo, si $n = 2$,

$$\left| f(x) - \sum_{j=0}^{2} \frac{(-1)^j\, j!}{x^{j+1}} \right| < 0{,}04 \quad \text{para } x \geq 4\,.$$

Cuando $n = 5$ y $x \geq 10$,

$$\left| f(x) - \sum_{j=0}^{5} \frac{(-1)^j\, j!}{x^{j+1}} \right| < 0{,}007\,.$$

Es decir que la suma $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j\, j!}{x^{j+1}}$ ya nos da, con valores pequeños de n, excelentes aproximaciones de la función $f(x)$, para un rango grande de valores de x.

Una vez más, este comportamiento no tiene nada que ver con la noción de convergencia. Más aún, la serie $\displaystyle\sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j\, j!}{x^{j+1}}$ es en realidad divergente para cada $x \neq 0$, como puede verse comparando dos términos consecutivos:

$$\left| \frac{(-1)^{j+1}\,(j+1)!}{x^{j+2}}\, \frac{x^{j+1}}{(-1)^j\, j!} \right| = \frac{j+1}{|x|} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty\,.$$

Este ejemplo nos muestra un fenómeno muy interesante. Aunque la expresión $\displaystyle\sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j\, j!}{x^{j+1}}$ es sólo una expresión formal, sus sumas parciales dan muy buenas aproximaciones de la función f, cuando fijamos un valor de n y tomamos x suficientemente grande.

Aquí concluímos con nuestros ejemplos preliminares. Estamos listos ahora para dar la definición formal de desarrollo asintótico, comenzando con la noción de sucesión o escala asintótica.

Definición 4 *Consideramos funciones reales, definidas en un conjunto real D con un punto de acumulación a que puede ser finito o infinito. Suponemos además que las funciones no se anulan en D. Una familia $\{\varphi_j\}_{j\geq 0}$ de tales funciones es una sucesión o escala asintótica para $x \to a$ si*

$$\varphi_{j+1}(x) = o(\varphi_j(x)) \quad \textit{cuando } x \to a\,.$$

Por ejemplo, la familia $\{x^j\}_{j\geq 0}$ es una sucesión asintótica para $x \to 0$, mientras que la familia $\left\{\dfrac{1}{x^j}\right\}_{j\geq 0}$ es una sucesión asintótica para $x \to \infty$ o para $x \to -\infty$. Observemos que se puede pasar del caso $\{x^j\}_{j\geq 0}$ al caso $\left\{\dfrac{1}{x^j}\right\}_{j\geq 0}$ por medio de la transformación $x \to \dfrac{1}{x}$.

Definición 5 *Dada una función real g definida en D, la serie $\sum_{j\geq 0} a_j\,\varphi_j$ es un desarrollo asintótico de la función g para $x \to a$, con respecto a la sucesión asintótica $\{\varphi_j\}_{j\geq 0}$, si para todo $n \geq 0$,*

$$g(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j\,\varphi_j(x) = o(\varphi_n(x)) \quad \textit{cuando } x \to a\,. \tag{8}$$

Si esta definición se cumple, escribimos

$$g(x) \sim \sum_{j\geq 0} a_j\,\varphi_j \quad \text{para } x \to a\,.$$

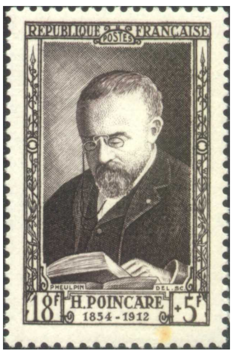
También suele decirse que la serie es una representación asintótica de la función f para $x \to a$.

Observemos que la serie $\sum_{j\geq 0} a_j\,\varphi_j$ puede ser convergente o divergente. Por ejemplo, de acuerdo con (4) podemos decir que

$$\frac{1}{1+x} \sim \sum_{j\geq 0} (-1)^j\,x^j \quad \text{para } x \to 0\,,$$

mientras que (7) implica

$$f(x) \sim \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j\,j!}{x^{j+1}} \quad \text{para } x \to \infty\,.$$



J. H. Poincaré

En el primer caso la serie asintótica es convergente, mientras que en el segundo caso es divergente. Observemos que estamos usando las expresiones "desarrollo asintótico" y "serie asintótica" con el mismo significado. Es decir, en ambos caso suponemos que hay una función con respecto a la cual la serie cumple la definición 5.

Observemos que al hablar de desarrollo o serie asintótica siempre necesitamos referirnos a una función. En cambio, como dijimos en la sección 1, la noción de serie convergente puede establecerse sin tener que mencionar la suma.

La definición de desarrollo asintótico se debe al matemático francés Jules Henri Poincaré (1854–1912), quien la propuso en su trabajo sobre ecuaciones diferenciales ordinarias, publicado en *Acta Mathematica* en 1886 ([25], pág. 151). Poincaré obtuvo aproximaciones de soluciones dadas por medio de representaciones integrales, usando la sucesión asintótica $\left\{ \frac{1}{x^j} \right\}_{j \geq 0}$ y suponiendo siempre que la serie $\sum_{j \geq 0} \frac{a_j}{x^j}$ es divergente. Éste es probablemente uno de los casos de mayor interés.

Aunque el concepto formal de desarrollo asintótico comenzó con Poincaré, otros matemáticos, entre ellos Leonhard Euler (1707–1783), Abraham de Moivre (1667–1754), James Stirling (1692–1770), Pierre-Simon Laplace (1749–1827) y Adrien-Marie Legendre (1752–1833), ya lo habían anticipado en casos particulares ([5], pág. 1; [25], pág. 151).

5. Algunas propiedades de las series asintóticas

Una función puede tener a lo sumo un desarrollo asintótico para x yendo a un cierto punto a, con respecto a una sucesión asintótica dada.

En efecto, si $g(x) \sim \sum_{j \geq 0} a_j \, \varphi_j$ para $x \to a$, esto significa que para todo $n \geq 0$, se cumple la condición (8). Para $n = 0$,

$$g(x) - a_0 \, \varphi_0(x) = o(\varphi_0(x)) \quad \text{para } x \to a \, .$$

O sea, dado $\varepsilon > 0$, existe un entorno $U = U(\varepsilon)$ de a tal que

$$|g(x) - a_0 \, \varphi_0(x)| < \varepsilon \, |\varphi_0(x)| \quad \text{para } x \in U \, .$$

Es decir,

$$\left| \frac{g(x)}{\varphi_0(x)} - a_0 \right| < \varepsilon \, ,$$

en ese entorno de a. Esto significa que existe

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{\varphi_0(x)} = a_0 \, . \tag{9}$$

Cuando $n = 1$,

$$|g(x) - a_0 \, \varphi_0(x) - a_1 \, \varphi_1(x)| < \varepsilon \, |\varphi_1(x)|$$

en un entorno apropiado de a. O sea, existe

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - a_0 \, \varphi_0(x)}{\varphi_1(x)} = a_1 \, .$$

En general, existe

$$\lim_{x \to a} \frac{\left(g(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j \, \varphi_j(x) \right)}{\varphi_{n+1}(x)} = a_{n+1} \, . \tag{10}$$

Por supuesto, diferentes sucesiones asintóticas dan origen a desarrollos asintóticos distintos, para una función dada. Por ejemplo,

$$\frac{1}{x-1} \sim \sum_{j\geq 0} \frac{1}{x^{j+1}} \quad \text{para } x \to \infty$$

y también

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1} \sim \sum_{j\geq 0} \frac{x+1}{x^{2j+2}} \quad \text{para } x \to \infty\,.$$

Estas afirmaciones se comprueban usando la serie geométrica de razón $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{x^2}$, respectivamente, con $|x| > 1$.

Una serie puede representar asintóticamente a más de una función. Por ejemplo, la serie $\sum_{j\geq 1} \frac{(-1)^{j-1}}{x^j}$ es un desarrollo asintótico de la función $\frac{1}{1+x}$ y también de la función $\frac{1}{1+x} + \mathrm{e}^{-x^2}$, para $x \to \infty$.

La primera afirmación se comprueba volviendo a usar la serie geométrica de razón $\frac{1}{x}$ para $|x| > 1$. Para comprobar la segunda afirmación, sólo tenemos que recordar que

$$\mathrm{e}^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad \text{para todo } n \geq 0, \text{ para } x \to \infty\,.$$

Observemos que $\sum_{j\geq 1} \frac{(-1)^{j-1}}{x^j}$ es el desarrollo asintótico de $\frac{1}{1+x} + \mathrm{e}^{-x^2}$, aunque la serie, que es convergente, no converge a esa función, sino a $\frac{1}{1+x}$.

Una consecuencia de la propiedad $\mathrm{e}^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ para todo $n \geq 1$, es que

$$\mathrm{e}^{-x^2} \sim \sum_{j\geq 1} \frac{0}{x^j} \quad \text{para } x \to \infty.$$

En los dos ejemplos que presentamos en la sección anterior, vimos (en (4), (3), (7), (6)) que no sólo se cumple la condición (8), sino que también se cumple la condición

$$g(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j\, \varphi_j(x) = O(\varphi_{n+1}(x)) \quad \text{cuando } x \to a\,. \tag{11}$$

Esto es cierto en general, porque (8) y (11) son equivalentes.

En efecto, si se cumple (8) para todo $n \geq 0$, tendremos

$$g(x) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j \, \varphi_j(x) = a_n \, \varphi_n(x) + o(\varphi_n(x)) \quad \text{cuando } x \to a \,,$$

para todo $n \geq 1$. Para obtener (11), sólo tenemos que recordar que $o(\varphi_n(x))$ implica $O(\varphi_n(x))$.

Recíprocamente, si suponemos (11) para todo $n \geq 0$,

$$g(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j \, \varphi_j(x) = O(\varphi_{n+1}(x)) \quad \text{cuando } x \to a \,,$$

donde $\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x))$. Esto implica

$$g(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j \, \varphi_j(x) = o(\varphi_n(x)) \,.$$

Por lo tanto, tenemos (8).

Es decir, la relación asintótica

$$g(x) \sim \sum_{j \geq 0} a_j \, \varphi_j \quad \text{para } x \to a$$

se puede describir diciendo que para todo $n \geq 0$, la suma parcial $\sum_{j=0}^{n} a_j \, \varphi_j(x)$ es una aproximación de $g(x)$ con un error cuyo orden de magnitud no es mayor que el orden de magnitud del primer término omitido.

6. Series de Taylor versus series asintóticas

B. Taylor

Comencemos por fijar una función real g definida en un entorno de un cierto número a. Si la función g tiene derivadas continuas de todos los órdenes, el teorema de Taylor (ver por ejemplo [8], pág. 204), dice que para cada $n \geq 0$,

$$g(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{g^{(j)}(a)}{j!} \, (x-a)^j + R_n(x) \,,$$

donde

$$R_n(x) = \frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \, (x-a)^{n+1} \,,$$

para x fijo en un entorno apropiado de a y para c entre x y a.

Se sabe que la función $g^{(n+1)}(x)$ está acotada para x en un entorno suficientemente pequeño de a, o es $O(1)$ para $x \to a$. Por lo tanto,

$$g(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{g^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j = O\left((x-a)^{n+1}\right) \quad \text{para } x \to a\,. \tag{12}$$

Es decir, que la serie de Taylor $\sum_{j \geq 0} \frac{g^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j$, convergente o no, es siempre la serie asintótica de la función g, con respecto a la sucesión asintótica $\{(x-a)^j\}_{j \geq 0}$, para $x \to a$. Éste es el caso de nuestro primer ejemplo, (1).

Observemos que (12) no es cierto para x yendo a cualquier otro punto b. Por ejemplo, usando (2),

$$\left| \frac{1}{1+x} - \sum_{j=0}^{n} (-1)^j x^j \right| = \frac{1}{1+x} \, |x|^{n+1} \,,$$

que no es $o\left((x-b)^n\right)$ cuando $x \to b$, para $b \neq 0$.

Desde el punto de vista de su convergencia, el comportamiento de la serie de Taylor $\sum_{j \geq 0} \frac{g^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j$ corresponderá a una de las siguientes tres posibilidades:

1. Su radio de convergencia es mayor que cero y $R_n(x) \to 0$ para $n \to \infty$ y para cada x en un cierto entorno de a. En este caso la función g es la suma de su serie de Taylor en ese entorno y se dice que g es analítica en ese entorno.

2. Su radio de convergencia es mayor que cero pero $\{R_n(x)\}_{n \geq 0}$ no converge a cero para $x \neq a$. En este caso, la serie de Taylor de g converge a una función que no es g.

3. Su radio de convergencia es cero. Es decir, la serie es simplemente una expresión formal para $x \neq a$.

Indicamos a continuación un ejemplo de cada uno de estos casos.

Ejemplo 1 *La igualdad*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{j \geq 0} x^j \,,$$

válida para $|x| < 1$, *nos dice que la serie* $\sum_{j\geq 0} x^j$, *con radio de convergencia igual a uno, converge a la función, analítica,* $\dfrac{1}{1-x}$. *Por supuesto, esta función es analítica para todo* $x \neq 1$, *como puede verse escribiendo su serie de Taylor alrededor de cualquier* $a \neq 1$.

Ejemplo 2 *La función*

$$g(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \textit{para} \quad x \neq 0 \\ 0 & \textit{para} \quad x = 0 \end{cases}$$

es indefinidamente derivable para todos los valores de x. *Además, para cada* $n \geq 1$ *la derivada* $g^{(n)}(0)$ *es cero (ver por ejemplo [6], pág. 3). Por lo tanto, la serie de Taylor de* g *alrededor de cero es* $\sum_{j\geq 0} 0\, x^j$, *que por supuesto tiene radio de convergencia mayor que cero, pero que sólo converge a la función* g *para* $x = 0$.

Ejemplo 3 *La función*

$$g(x) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 + x^2\, t}\, dt$$

es indefinidamente derivable para todo x *real y su serie de Taylor tiene la forma (ver una prueba detallada en [6], pág. 1)*

$$\sum_{j\geq 0} (-1)^j\, j!\, x^{2\,j}\,.$$

Esta serie de potencias tiene radio de convergencia cero. En efecto,

$$\left| \frac{(-1)^{j+1} (j+1)!\, x^{2\,j+2}}{(-1)^j\, j!\, x^{2\,j}} \right| = (j+1)\, x^2\,,$$

que va a infinito con j, *para todo* $x \neq 0$.

Como ya lo hemos probado en general, en cada uno de estos ejemplos la serie de Taylor es un desarrollo asintótico de la función, para $x \to 0$.

7. Operaciones con series asintóticas de potencias

Para concluir con las propiedades de series asintóticas que queremos presentar, discutiremos ahora el caso de series asintóticas de potencias, es decir series de la forma $\sum_{j\geq 0} a_j\,(x-a)^j$ o $\sum_{j\geq 0} \frac{a_j}{x^j}$. Veremos que estas series tienen muchas de las propiedades de las series convergentes de potencias.

Para fijar ideas, vamos a considerar series de la forma $\sum_{j\geq 0} \frac{a_j}{x^j}$, que es probablemente el caso de mayor interés. Siempre que consideremos estas series, nos interesará su comportamiento para $x \to \infty$, así que no lo mencionaremos al enunciar las propiedades.

Proposición 1 *Si* $f(x) \sim \sum_{j\geq 0} \frac{a_j}{x^j}$ *y* $g(x) \sim \sum_{j\geq 0} \frac{b_j}{x^j}$, *entonces*

1.
$$\alpha\, f(x) + \beta\, g(x) \sim \sum_{j\geq 0} \frac{\alpha\, a_j + \beta\, b_j}{x^j}\,,$$
para todos los números reales α, β .

2.
$$f(x)\, g(x) \sim \sum_{j\geq 0} \frac{c_j}{x^j}\,,$$
donde
$$c_j = \sum_{l=0}^{j} a_l\, b_{j-l}\,.$$

3. *la función* $\frac{1}{f(x)}$ *tiene un desarrollo asintótico de la forma* $\frac{1}{a_0} + \sum_{j\geq 1} \frac{d_j}{x^j}$, *suponiendo que* $a_0 \neq 0$. *Los coeficientes* d_j *se obtienen recursivamente a partir de los coeficientes* a_j .

4.
$$\int_x^{\infty} \left(f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \right) dt \sim \sum_{j\geq 2} \frac{a_j}{(j-1)\, x^{j-1}}\,, \tag{13}$$
suponiendo que la función f *es continua para* $x > A$, *para cierto* $A > 0$.

Demostración. La prueba de la propiedad 1 sólo requiere el uso directo de la definición (8), o equivalentemente de la definición (11), y por lo tanto la omitiremos.

Para probar 2, comenzamos usando, por ejemplo (11), con f y con g. O sea, para todo $n \geq 0$,

$$f(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{x^j} = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) ,$$

$$g(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{b_j}{x^j} = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) .$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{x^j}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{b_j}{x^j}\right) &= \sum_{m=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{m} a_l\, b_{m-l}\right)\frac{1}{x^m} + O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) \\ &= \sum_{m=0}^{n} \frac{c_m}{x^m} + O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) .\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(x)\, g(x) &= \left[\sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{x^j} + O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)\right]\left[\sum_{j=0}^{n} \frac{b_j}{x^j} + O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)\right] \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{x^j}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{b_j}{x^j}\right) + O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) = \sum_{m=0}^{n} \frac{c_m}{x^m} + O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) .\end{aligned}$$

Comenzamos la prueba de 3 recordando el resultado de unicidad (9) y (10), que probamos en la sección 5. En nuestro caso, esta propiedad dice que si

$$g(x) \sim \sum_{j=0}^{n} \frac{d_j}{x^j} ,$$

entonces los coeficientes d_j están dados recursivamente por medio de las fórmulas

$$\begin{aligned} d_0 &= \lim_{x\to\infty} g(x) \\ d_n &= \lim_{x\to\infty} \left[x^n\left(g(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{d_j}{x^j}\right)\right] \qquad \text{para } n \geq 1 .\end{aligned}$$

Puesto que

$$f(x) - a_0 = o(1) ,$$

existe $\lim_{x\to\infty} f(x) = a_0$ y por lo tanto, existe $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{a_0}$.

Es decir, que si $\dfrac{1}{f(x)}$ tuviera un desarrollo asintótico, el coeficiente d_0 debería ser igual a $\dfrac{1}{a_0}$. En efecto, este valor da la primera aproximación, puesto que

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a_0} = \frac{a_0 - f(x)}{f(x)\, a_0} = o(1)\,.$$

A partir de aquí, el razonamiento se repite. Si $\dfrac{1}{f(x)}$ tuviera un desarrollo asintótico, el coeficiente d_1 debería ser igual a

$$\lim_{x\to\infty}\left[x\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a_0}\right)\right]\,.$$

Para encontrar este límite, escribimos $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{a_0}$ en una forma conveniente.

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a_0} = \frac{1}{a_0 + \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{a_0} = \frac{a_0 - a_0 - \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}{{a_0}^2 + \frac{a_0\, a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}\,.$$

Por lo tanto,

$$x\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a_0}\right) = \frac{-a_1 + o(1)}{{a_0}^2 + \frac{a_0\, a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{a_1}{{a_0}^2}\,.$$

Comprobemos que este valor de d_1, junto con d_0, dan la segunda aproximación.

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a_0} + \frac{a_1}{{a_0}^2}\,\frac{1}{x} &= \frac{{a_0}^2\, x + f(x)\,(-a_0\, x + a_1)}{f(x)\, {a_0}^2\, x}\\ &= \frac{{a_0}^2\, x + \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)(-a_0\, x + a_1)}{f(x)\, {a_0}^2\, x}\\ &= \frac{\frac{{a_1}^2}{x} + o(1)}{f(x)\, {a_0}^2\, x}\,.\end{aligned}$$

Es decir,

$$x\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a_0} + \frac{a_1}{{a_0}^2}\,\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{{a_1}^2}{x} + o(1)}{f(x)\, {a_0}^2}\,,$$

o sea,

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a_0} + \frac{a_1}{{a_0}^2}\,\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

Siguiendo el mismo tipo de razonamiento, podemos comprobar que

$$\begin{aligned} d_2 &= \lim_{x\to\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{a_0}+\frac{a_1}{{a_0}^2}\,\frac{1}{x}\right)\right] \\ &= \lim_{x\to\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}-\frac{1}{a_0}+\frac{a_1}{{a_0}^2}\,\frac{1}{x}\right)\right] \\ &= \frac{{a_1}^2-a_0\,a_2}{{a_0}^3}\,, \end{aligned}$$

que nos dará, junto con d_0 y d_1, la tercera aproximación de $\dfrac{1}{f(x)}$, y así siguiendo. Aunque no lo haremos aquí, calculando otros pocos coeficientes d_j se podría deducir la forma de una fórmula general para ellos.

Concluímos la demostración de la proposición probando 4. Esta propiedad casi nos dice que una serie asintótica puede ser integrada término a término. El único inconveniente es que los términos a_0 y $\dfrac{a_1}{x}$ no son integrables en un entorno del infinito y deben ser incorporados a la función f.

Usando (11) con $n=1$, tenemos

$$f(x)-a_0-\frac{a_1}{x}=O\left(\frac{1}{x^2}\right)\,,$$

lo cual nos dice que la función continua $f(x)-a_0-\frac{a_1}{x}$ es integrable para $x>A$. Además, dado $n\geq 2$,

$$f(x)-a_0-\frac{a_1}{x}-\sum_{j=2}^{n}\frac{a_j}{x^j}=O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)\,.$$

Es decir,

$$\int_x^\infty\left(f(t)-a_0-\frac{a_1}{t}\right)\,dt-\sum_{j=2}^{n}a_j\int_x^\infty\frac{dt}{t^j}=\int_x^\infty O\left(\frac{1}{t^{n+1}}\right)\,dt\,.$$

Por otra parte, para x suficientemente grande,

$$\left|\int_x^\infty O\left(\frac{1}{t^{n+1}}\right)\,dt\right|\leq C\int_x^\infty\frac{dt}{t^{n+1}}=\frac{C}{n\,x^n}\,,$$

donde la constante C dependerá de n. Así,

$$\int_x^\infty\left(f(t)-a_0-\frac{a_1}{t}\right)\,dt-\sum_{j=2}^{n}\frac{a_j}{(j-1)\,x^{j-1}}=O\left(\frac{1}{x^n}\right)\,,$$

con lo cual hemos probado (13). Esto concluye la demostración de la proposición 1. ■

Observemos que en el caso de la sucesión asintótica $\{(x-a)^j\}_{j\geq 0}$, no necesitamos quitar los dos primeros términos, pues todos los términos son integrables cerca de a.

La proposición que acabamos de probar nos permite construir nuevos ejemplos de desarrollos asintóticos en potencias.

Por ejemplo, si una función f tiene un desarrollo asintótico en potencias, cualquier potencia entera positiva de f y en general cualquier polinomio en f, tendrán también un desarrollo del mismo tipo. Si una función f, que no se anula en un entorno del infinito, tiene un desarrollo asintótico en potencias, también lo tendrá toda función racional en f.

En ([5], págs. 9–12) se muestran otros resultados sobre operaciones con series asintóticas de potencias, entre ellos un resultado de diferenciación término a término.

Debemos decir que contrariamente a lo que ocurre con las series convergentes de potencias, no todas las series asintóticas de potencias se pueden diferenciar término a término. Por ejemplo, éste es el caso de la función $\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(\mathrm{e}^x)$ ([25], pág. 153).

En efecto, puesto que $\mathrm{e}^{-x} = o\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$ cuando $x \to \infty$, para todo $n \geq 0$, podemos escribir

$$\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(\mathrm{e}^x) \sim \sum_{j\geq 0} \frac{0}{x^j}\,.$$

Sin embargo, no podemos decir que $\displaystyle\sum_{j\geq 0} \frac{0}{x^j}$ es la serie asintótica de la derivada $[\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(\mathrm{e}^x)]' = \cos(\mathrm{e}^x) - \mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen}(\mathrm{e}^x)$, porque eso implicaría que $\cos(\mathrm{e}^x) = o\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$ cuando $x \to \infty$, para todo $n \geq 0$, lo cual no es cierto. El problema es que la función $\cos(\mathrm{e}^x)$ no tiene un desarrollo asintótico con respecto a la sucesión $\left\{\dfrac{1}{x^j}\right\}_{j\geq 0}$.

En efecto, si lo tuviera, debería de existir un número real a_0 tal que $\cos(\mathrm{e}^x) - a_0 = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$. O sea, la función $x\,[\cos(\mathrm{e}^x) - a_0]$ debería de estar acotada para x en un entorno del infinito.

En consecuencia, tomando $x = \ln\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ para n suficientemente grande, el producto $a_0 \ln\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ debería de estar acotado, de donde concluímos que a_0 tiene que ser cero.

Si ahora elegimos $x = \ln(2\,n\,\pi)$ con n suficientemente grande, tendremos que los valores $\ln(2\,n\,\pi)$ deben de formar una sucesión acotada, lo cual no es verdad.

Es decir que hay funciones que no admiten un desarrollo asintótico con respecto a la sucesión $\left\{\dfrac{1}{x^j}\right\}_{j\geq 0}$.

Es natural el preguntarnos si toda serie de potencias será el desarrollo asintótico de una cierta función. La respuesta es afirmativa, como lo prueba el siguiente teorema, debido al matemático suizo Armand Borel (1923–2003) y al matemático americano Joseph Fels Ritt (1893–1951), cuya demostración se puede ver en ([10], pág. 22).

Teorema 1 *Dada cualquier sucesión $\{a_j\}_{j\geq 0}$ de números reales (o complejos) existe una función real (o compleja) f definida en toda la recta y con derivadas de todos los órdenes, tal que*

$$f(x) \sim \sum_{j\geq 0} a_j\, x^j \quad \textit{para } x \to 0\,.$$

Es decir, que contrariamente a lo que ocurre con una serie de potencias convergente, no hay restricciones en el crecimiento de los coeficientes de una serie asintótica de potencias.

Recordemos que la transformación $x \to \dfrac{1}{x}$ permite adaptar el teorema 1 al caso de la sucesión asintótica $\left\{\dfrac{1}{x^j}\right\}_{j\geq 0}$.

8. Más ejemplos

Consideremos, para cada $x > 0$, la función

$$f(x) = \int_x^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\, dt\,.$$

Vamos a probar, usando integración por partes, que

$$f(x) \sim \mathrm{e}^{-x^2} \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^{j+1}\, 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2\,j-1)}{2^{j+1}}\, \frac{1}{x^{2\,j+1}} \quad \text{para } x\to\infty\,. \tag{14}$$

Si comenzamos escribiendo

$$\mathrm{e}^{-t^2} = -\frac{1}{2\,t}\,\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{-t^2}\,, \tag{15}$$

la primera integración por partes nos da

$$\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-t^2}}{t}\Bigg|_x^\infty - \int_x^\infty \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t^2}\,dt\right]$$
$$= \frac{e^{-x^2}}{2\,x} - \frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^2}\,dt\,. \tag{16}$$

Usando otra vez (15),

$$\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{e^{-x^2}}{2\,x} - \frac{e^{-x^2}}{2^2\,x^3} + \frac{1\times 3}{2^2}\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^4}\,dt\,.$$

Después de $n+1$ integraciones por partes con $n \geq 0$,

$$\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt = e^{-x^2}\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{j+1}\,1\times 3\times 5\times\cdots\times(2\,j-1)}{2^{j+1}}\,\frac{1}{x^{2\,j+1}} \tag{17}$$
$$+ \frac{(-1)^{n+1}\,1\times 3\times 5\times\cdots\times(2\,n+1)}{2^{n+1}}\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2\,(n+1)}}\,dt\,.$$

Estimemos ahora el error.

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}\,1\times 3\times 5\times\cdots\times(2\,n+1)}{2^{n+1}}\int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2\,(n+1)}}\,dt\right|$$
$$\leq \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2\,n+1)}{2^{n+1}\,x^{2\,n+2}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt\,.$$

Usando la primera integración por partes (16), podemos escribir

$$\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2\,n+1)}{2^{n+1}\,x^{2\,n+2}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt$$
$$\leq \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2\,n+1)}{2^{n+1}\,x^{2\,n+2}}\left(\frac{1}{2\,x} + \frac{1}{2}\int_x^\infty \frac{1}{t^2}\,dt\right)$$
$$= \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2\,n+1)}{2^{n+1}}\,\frac{1}{x^{2\,n+3}}\,. \tag{18}$$

Es decir,

$$f(x) - e^{-x^2}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{j+1}\,1\times 3\times 5\times\cdots\times(2\,j-1)}{2^{j+1}}\,\frac{1}{x^{2\,j+1}} = O\left(\frac{1}{x^{2\,n+3}}\right),$$

cuando $x \to \infty$,

lo cual prueba (14).

Aunque no es importante, podemos simplificar la cota (18) y el término general de la serie (17), usando factoriales y potencias de dos. Así obtenemos,

$$\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2\,n+1)}{2^{n+1}}\,\frac{1}{x^{2\,n+3}}=\frac{(2\,n+1)!}{2^{2\,n+1}\,n!}\,\frac{1}{x^{2\,n+3}}\,. \tag{19}$$

y

$$\frac{(-1)^{j+1}\,1\times 3\times 5\times\cdots\times(2\,j-1)}{2^{j+1}}\,\frac{1}{x^{2\,j+1}}=\frac{(-1)^{j+1}(2\,j-1)!}{2^{2\,j}\,(j-1)!}\,\frac{1}{x^{2\,j+1}}\,.$$

Como nos interesa $x\to\infty$, suponemos, por ejemplo $x\geq 2\,n$, con $n\geq 0$. Entonces el error (19) estará acotado por

$$\frac{(2\,n+1)!}{2^{4\,n+4}\,n!\,n^{2\,n+3}}\,.$$

Si $n=2$ y $x\geq 4$,

$$\left|f(x)-\mathrm{e}^{-x^2}\sum_{j=0}^{2}\frac{(-1)^{j+1}(2\,j-1)!}{2^{2\,j}(j-1)!}\,\frac{1}{x^{2\,j+1}}\right|<0{,}0002\,,$$

lo cual ya indica una muy buena aproximación, para un rango grande de valores de x. Cuando $n=3$ y $x\geq 6$, el error es menor que 0,0000007.

La serie asintótica que aparece en (14) es divergente, como se ve examinando el cociente de dos términos consecutivos.

$$\left|\frac{(-1)^{j+2}\,(2\,j+1)!}{2^{2\,j+2}\,j!}\,\frac{1}{x^{2\,j+3}}\,\frac{2^{2\,j}(j-1)!}{(-1)^{j+1}\,(2\,j-1)!}\,x^{2\,j+1}\right|$$
$$=\frac{2\,j+1}{2\,x^2}\underset{j\to\infty}{\longrightarrow}\infty\quad,\ \text{para cada } x\neq 0\,.$$

Otra vez, las sumas parciales de una serie divergente aproximan muy bien a la función para n fijo y x suficientemente grande.

Puesto que (ver por ejemplo [4], pág. 2)

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$

también podemos escribir

$$g(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,dt\sim\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\mathrm{e}^{-x^2}\sum_{j\geq 0}\frac{(-1)^{j+1}\,(2\,j-1)!}{2^{2\,j}(j-1)!}\,\frac{1}{x^{2\,j+1}}\quad\text{para } x\to\infty\,. \tag{20}$$

Aunque (20) se justifica "a mano" de inmediato, si deseamos una justificación más formal, podemos usar la primera parte de la proposición 1.

El desarrollo asintótico (20) fue obtenido directamente por el matemático irlandés George Gabriel Stokes (1819-1903), en 1857 ([25], pág. 152).

La función

$$g(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$$

da el área entre 0 y x bajo la curva $y = \mathrm{e}^{-t^2}$. Excepto por varias constantes que hemos omitido, $g(x)$ es la llamada función de error (ver por ejemplo [4], pág. 1) que volveremos a ver en la sección que sigue.

En ([25], págs. 151–152, 159, 251, 368; [17]), hay otros ejemplos, de importancia en la teoría de las llamadas funciones especiales ([28], [21]).

Observemos el papel que repetidas integraciones por partes juega en varios de los ejemplos que hemos presentado hasta ahora. El que podamos integrar por partes indefinidamente se debe a que en estos ejemplos el integrando tiene derivadas de todos los órdenes. Cuando éste no es el caso, la integración por partes nos dará una suma finita como aproximación, con un término de error que se puede estimar ([5], pág. 21).

Además de la integración por partes ([5], capítulo 3), hay varios otros métodos para obtener aproximaciones asintóticas de funciones dadas por integrales. Por ejemplo, el lema de Watson, el método de la fase estacionaria, el método del descenso rápido y el método de Laplace ([5], capítulos 4–7). En el artículo [15] hay una excelente discusión comparativa de estos métodos, así como varias extensiones de gran interés.

La técnica de integrar por partes se adapta muy bien a nuestro interés en series divergentes y es por eso que la hemos enfatizado. Sin embargo, en la última sección de este artículo presentaremos en detalle el lema de Watson, incluyendo un ejemplo de aplicación que tiene su origen en la teoría de las funciones especiales.

Concluímos esta sección desarrollando un ejemplo de una naturaleza bastante diferente, tomado de ([25], pág. 152).

Fijado $0 < c < 1$, consideramos la función

$$h(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{c^k}{x+k}\,,$$

que está bien definida para $x > 0$. Si $x > k$, podemos escribir

$$\frac{1}{x+k} = \frac{1}{x\,\left(1+\frac{k}{x}\right)} = \sum_{j\geq 0} (-1)^j\, \frac{k^j}{x^{j+1}} = \sum_{j\geq 1} (-1)^{j-1}\, \frac{k^{j-1}}{x^j}\,. \tag{21}$$

Formalmente, vamos a substituir (21) en la definición de $h(x)$, obteniendo

$$h(x) = \sum_{k\geq 1}\sum_{j\geq 1}(-1)^{j-1}\,\frac{k^{j-1}\,c^k}{x^j} = \sum_{j\geq 1}\left[(-1)^{j-1}\sum_{k\geq 1}k^{j-1}\,c^k\right]\frac{1}{x^j}\,.$$

Por supuesto, este reemplazo carece de sentido, pues eventualmente la condición $x > k$ deja de cumplirse. Sin embargo, afirmamos que para cada $j \geq 1$, la serie $\sum\limits_{k\geq 1} k^{j-1}\,c^k$ converge. En efecto, si escribimos el cociente de dos términos consecutivos tendremos

$$\frac{(k+1)^{j-1}\;c^{k+1}}{k^{j-1}\,c^k} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{j-1}\;c\,,$$

expresión que tiene límite, igual a c, cuando $k \to \infty$. Denotemos

$$A_j = (-1)^{j-1}\sum_{k\geq 1}k^{j-1}\,c^k\,.$$

Vamos a probar que

$$h(x) \sim \sum_{j\geq 1}\frac{A_j}{x^j}\quad,\ \text{para } x\to\infty\,. \tag{22}$$

En efecto, sea

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{x^j} = \sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{x^j}\;\sum_{k\geq 1}k^{j-1}\,c^k \\ &= \sum_{k\geq 1}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}\,k^{j-1}\,c^k}{x^j}\,. \end{aligned}$$

E aquí el truco que nos permitirá avanzar en nuestro cálculo: Multiplicamos y dividimos por $x+k$, para obtener

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}\,k^{j-1}\,c^k}{x^j} &= \frac{1}{x+k}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}\,k^{j-1}\,c^k}{x^j}\;(x+k) \\ &= \frac{1}{x+k}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}\,k^{j-1}\,c^k}{x^{j-1}}+\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}\,k^{j}\,c^k}{x^j}\right] \\ &= \frac{c^k}{x+k}\left[1-\left(-\frac{k}{x}\right)^n\right]\,. \end{aligned}$$

O sea que

$$S_n(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{c^k}{x+k}\left[1 - \left(-\frac{k}{x}\right)^n\right].$$

Por lo tanto,

$$|h(x) - S_n(x)| \leq \sum_{k\geq 1} \frac{c^k}{x+k}\left(\frac{k}{x}\right)^n \leq \frac{1}{x^{n+1}} \sum_{k\geq 1} k^n\, c^k\,.$$

Como probamos antes, la serie $\sum\limits_{k\geq 1} k^n\, c^k$ converge, a una cierta suma que llamaremos $C_n\,(c)$. Así,

$$h(x) - S_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) \quad , \text{cuando } x \to \infty\,,$$

lo cual prueba (22). Este ejemplo muestra que aún manipulaciones formales de series pueden llevarnos a obtener desarrollos asintóticos.

Hasta aquí hemos centrado nuestra atención en el uso de las sumas parciales de ciertas series, frecuentemente divergentes, para aproximar funciones cuando la variable se acerca a un valor dado. En la sección que sigue, investigaremos por medio de un ejemplo sencillo la siguiente pregunta:

9. ¿Qué tan buenas son las series convergentes de potencias?

Usaremos la función de error,

$$g(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt\,,$$

introducida en la sección anterior.

Como la serie de Taylor de e^{-t^2} se puede integrar término a término entre 0 y x, podemos obtener de inmediato la serie de Taylor para $g(x)$, que converge a la función para todo x.

$$g(x) = \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j}{(2\,j+1)\; j!}\, x^{2\,j+1}\,. \tag{23}$$

Veamos qué ocurre si aproximamos el valor de g con las sumas parciales de su serie de Taylor.

Específicamente, digamos que queremos usar $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2\,j+1)\; j!}\, x^{2\,j+1}$ para obtener $g(x)$ con dos decimales correctos.

En la siguiente tabla indicamos para varios valores de x el primer valor de n para el cual ocurre esto. Hemos empleado un sistema de computación algebraica, en nuestro caso Scientific WorkPlace, para hacer los cálculos.

x	1	5	10	15	20
n	3	65	268	607	?

No solamente n crece rápidamente al crecer x muy modestamente, sino que ya para $x = 20$, el sistema tarda varios minutos en calcular la suma parcial con $n = 7000$, a pesar de que este valor de n nos da un error aproximadamente igual a $3{,}4518 \times 10^{113}$! .

En cambio operando, digamos, con cinco dígitos, Scientific WorkPlace nos dice de inmediato que

$$\int_0^{20} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt \approx 0{,}88623\,,$$

lo cual muestra que el sistema no está usando la serie de Taylor.

Por cierto, ya $\displaystyle\int_0^{3{,}4} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ nos da ese valor, que seguramente coincide, con cuatro decimales, con el valor

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0{,}88623\,.$$

Para darnos una mejor idea de la lentitud de la convergencia en (23), observemos que los términos de la serie

$$s_j = \frac{(-1)^j}{(2\,j+1)\; j!}\, x^{2\,j+1}$$

verifican la fórmula recursiva

$$s_{j+1} = -s_j\, \frac{2\,j+1}{2\,j+3}\, \frac{x^2}{j+1}\,.$$

Estos coeficientes decrecerán en valor absoluto cuando el valor del producto $\dfrac{2\,j+1}{2\,j+3}\,\dfrac{x^2}{j+1}$ sea menor que uno. Por ejemplo, para $x = 20$, el factor $\dfrac{x^2}{j+1}$ es menor que uno si $j \geq 400$, mientras que el factor $\dfrac{2\,j+1}{2\,j+3}$ se puede ignorar para valores grandes de j.

Vemos que la serie de Taylor, convergente en todo punto, es una herramienta muy mala para aproximar la función cuando x crece. En cambio hemos visto que una serie asintótica, divergente, da muy buenas aproximaciones.

Por supuesto, el interés de estos comentarios es, en cierto modo, solamente teórico. Como ya hemos observado, debido a la eficacia de los sistemas de computación algebraica, no hay dificultad en calcular el valor de la función con gran precisión. Digamos una vez más que esto no se hace usando las sumas parciales de la serie de Taylor, sino que se usa un método de integración numérica.

Para concluir esta sección, mencionemos que las calculadoras gráficas tampoco evalúan, por ejemplo, funciones trigonométricas, usando sus series de Taylor. En lugar de ellas, las calculadoras emplean algoritmos muy ingeniosos, basados en otras aproximaciones polinomiales, que tienen su origen en el algoritmo CORDIC (Coordinate Rotation Digital Computer) desarrollado por J. E. Volder en los años cincuenta para resolver relaciones trigonométricas que aparecieron en problemas de navegación aérea [19].

O sea que podemos decir que desde un punto de vista numérico, las series convergentes no son muy apetecibles, lo cual hace que apreciemos aún más el concepto de aproximación asintótica.

Como ya hemos dicho, la mayoría de los ejemplos de este concepto que hemos presentado hasta ahora han sido desarrollados usando integración por partes. Cerraremos nuestro artículo discutiendo otro método, el lema de Watson, que fue mencionado en la seccion 8 y que permite obtener desarrollos asintóticos, para $x \to \infty$, de ciertos tipos de funciones dadas por medio de integrales. Siempre trabajaremos con la sucesión asintótica $\left\{\dfrac{1}{x^j}\right\}_{j\geq 0}$.

10. Elemental, Watson

Una integral de la forma

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\,t} f(t)\,dt \tag{24}$$

se llama integral de Laplace, en referencia a la transformada de Laplace [27] de la función f.

Nuestro objetivo es el formular condiciones generales bajo las cuales (24) tiene un desarrollo asintótico, como función de x, para $x \to \infty$.

A fin de darnos una idea del tipo de desarrollo asintótico que podríamos esperar, vamos a hacer algunos cálculos formales.

Integrando (24) por partes n veces,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\,t} f(t)\,dt &= -\frac{\mathrm{e}^{-x\,t}}{x}\, f(t)\Big|_0^\infty + \frac{1}{x}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\,t} f'(t)\,dt \\
&= \frac{f(0)}{x} - \frac{\mathrm{e}^{-x\,t}}{x^2} f'(t)\Big|_0^\infty + \frac{1}{x^2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\,t} f''(t)\,dt \\
&= \frac{f(0)}{x} + \frac{f'(0)}{x^2} + \frac{1}{x^2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\,t} f''(t)\,dt \\
&\;\;\vdots \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j-1)}(0)}{x^j} + \frac{1}{x^n}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\,t} f^{(n)}(t)\,dt\,.
\end{aligned}$$

Así obtenemos el desarrollo formal $\displaystyle\sum_{j\geq 1} \frac{f^{(j-1)}(0)}{x^j}$.

Podemos llegar al mismo resultado substituyendo formalmente

$$f(t) = \sum_{j\geq 0} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}\, t^j$$

en la integral. En efecto,

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\,t} f(t)\,dt = \sum_{j\geq 0} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\,t}\, t^j\,dt\,.$$

Afirmamos que

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\,t}\, t^j\,dt = \frac{j!}{x^{j+1}} \quad \text{, para } j = 0, 1, 2, \ldots \tag{25}$$

lo cual podemos probar por inducción.

El resultado es claramente cierto cuando $j = 0$. Suponiéndolo cierto para un $j \geq 0$ fijo, integrando por partes una vez y usando la hipótesis inductiva, tendremos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\,t}\, t^{j+1}\,dt &= -\frac{\mathrm{e}^{-x\,t}}{x}\, t^{j+1}\Big|_0^\infty + (j+1)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\,t}\, t^j\,dt \\
&= \frac{j+1}{x}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\,t}\, t^j\,dt = \frac{j+1}{x}\,\frac{j!}{x^{j+1}} = \frac{(j+1)!}{x^{j+2}}\,,
\end{aligned}$$

lo cual prueba (25).

Es decir que, formalmente, podríamos escribir

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\,t} f(t)\,dt \sim \sum_{j\geq 1} \frac{f^{(j-1)}(0)}{x^j}\,.$$

Esto indicaría que bajo condiciones apropiadas, el desarrollo asintótico de (24) sólo dependerá del comportamiento de la función f cerca de cero. Intuitivamente, la forma de la integral (24) sugiere que, cuando la función $f\,(t)$ es suficientemente regular, el área bajo la curva $y(t) = \mathrm{e}^{-x\,t} f(t)$, para $x > 0$ fijo, se concentra cerca de $t = 0$. Esta concentración es más y más pronunciada a medida que x crece hacia ∞.


G. N. Watson

La justificación de nuestros cálculos formales está dada por el llamado lema de Watson, probado por el matemático inglés George Neville Watson (1886–1965) e incluído en su trabajo [23].

Hay varias versiones de este resultado, con diferentes grados de generalidad ([5], capítulo 6; [7]; [16], pág. 467; [17]). La versión que vamos a enunciar y a probar aquí es muy parecida a la presentada en [5]. La única diferencia importante es que en nuestra versión, que podemos considerar elemental, no usamos funciones de variable compleja. Esta versión simplificada aún tiene muchos usos de interés, como puede verse en las referencias que acabamos de mencionar.

Proposición 2 (lema de Watson) *Dada la integral*

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\,t} f(t)\,dt\,,$$

suponemos que la función f satisface las siguientes condiciones:

1. *La función $f(t)$ es continua para $t > 0$, tiene derivadas de todos los órdenes cerca de $t = 0$ y su serie de Taylor, $\sum_{j\geq 0} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}\,t^j$, converge a $f(t)$ cuando $|t| < 2\,r$, para cierto $r > 0$.*

2. *Existen $C, a > 0$ tales que*

$$|f(t)| \leq C\,\mathrm{e}^{a\,t} \quad , \textit{para } t \geq r\,.$$

Entonces,

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\,t} f(t)\,dt \sim \sum_{j\geq 0} \frac{f^{(j)}(0)}{x^{j+1}} \quad , \textit{para } x \to \infty\,.$$

Demostración. Comencemos por notar que las condiciones impuestas a la función f implican que la integral existe para cada $x > a$.

Fijado $n \geq 0$, escribimos

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\,t} f(t)\,dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\,t} \left[f(t) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}\, t^j \right] dt \\ + \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\,t}\, t^j\, dt\,. \quad (26)$$

De acuerdo con (25), el segundo término es igual a

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{x^{j+1}}\,.$$

Nuestro trabajo previo con desarrollos asintóticos nos dice que el primer término en (26) debería de ser el error, que llamaremos $R_n(x)$. De acuerdo con (8), necesitamos probar que $R_n(x) = o\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right)$, cuando $x \to \infty$. Para ello, comenzamos por estimar la diferencia $f(t) - \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}\, t^j$.

Si $0 \leq t < r$,

$$\left| f(t) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}\, t^j \right| = \left| \sum_{j \geq n+1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}\, t^j \right| \leq C_n\, t^{n+1}\,,$$

para cierta constante $C_n > 0$, dependiente de n, r, f.

En lo que sigue, C_n indicará el mismo tipo de constante, que probablemente será diferente en cada ocasión.

Si $t \geq r$, escribimos

$$\left| f(t) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}\, t^j \right| \leq |f(t)| + \sum_{j=0}^{n} \left| \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \right| t^j \quad (27)$$

y estimamos cada término. Para cierta constante C_n, estimamos el segundo término como

$$\sum_{j=0}^{n} \left| \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \right| t^j = \sum_{j=0}^{n} r^j \left| \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \right| \left(\frac{t}{r} \right)^j \leq C_n \left(\frac{t}{r} \right)^n\,.$$

En cuanto al primer término en (27), usamos la segunda hipótesis obteniendo

$$|f(t)| \le C\,\mathrm{e}^{a\,t}\,.$$

Es decir, para $t \ge r$,

$$\begin{aligned}\left| f(t) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}\, t^j \right| &\le C\,\mathrm{e}^{a\,t} + C_n \left(\frac{t}{r}\right)^n \\ &\le C\,\mathrm{e}^{a\,t} \left(\frac{t}{r}\right)^n + C_n\,\mathrm{e}^{a\,t} \left(\frac{t}{r}\right)^n \le C_n\,\mathrm{e}^{a\,t}\, t^{n+1}\,.\end{aligned}$$

Finalmente, para todo $t \ge 0$,

$$\left| f(t) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}\, t^j \right| \le C_n\,\mathrm{e}^{a\,t}\, t^{n+1}\,.$$

En consecuencia, si suponemos $x > a$,

$$\begin{aligned}|R_n(x)| \le C_n \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\,t}\,\mathrm{e}^{a\,t}\, t^{n+1}\, dt &= C_n \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(x-a)\,t}\, t^{n+1}\, dt \\ &= \frac{C_n}{(x-a)^{n+2}}\,(n+1)!\,. \qquad (28)\end{aligned}$$

Finalmente, si $x > 2\,a$,

$$\frac{C_n}{(x-a)^{n+2}}\,(n+1)! \le \frac{C_n}{x^{n+2}}\,,$$

lo cual muestra que $R(x) = o\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right)$ para $x \to \infty$.

Con esto completamos la demostración de la proposición 2. ■

Como un ejemplo de aplicación, consideramos la integral ([5], pág. 50)

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} \frac{dt}{t+x}\,,$$

que define una función de x para $x > 0$. Esta función pertenece a la familia de funciones especiales llamadas hipergeométricas ([17], capítulo 15; [25], capítulos XIV y XVI).

El cambio de variable $t = x\,u$, transforma la integral en

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\,u} \frac{du}{1+u}\,,$$

a la que podemos aplicar el lema de Watson con $2\,r = 1$, $C = 1$ y $a = 0$. En total, obtenemos el desarrollo asintótico

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\frac{dt}{t+x} \sim \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j\, j!}{x^{j+1}} \quad , \text{ para } x \to \infty\,, \tag{29}$$

dado por una serie divergente. Este desarrollo ya fue obtenido al comienzo de la sección 4, usando integración por partes, puesto que

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+x}\,dt \underset{t=u-x}{=} \int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{x-u}}{u}\,du\,.$$

El uso de integración por partes para obtener (29) se debe al matemático holandés Thomas Jan Stieltjes (1856-1894), quien obtuvo este resultado como parte de su tesis doctoral, publicada en 1886 en el volumen 3 de *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, páginas 201–258 ([5], pág. 15).

Siguiendo la prueba del lema de Watson con $f(u) = \dfrac{1}{1+u}$, podemos ver que la estimación del error dada por (28) se reduce a

$$|R_n(x)| \leq \frac{(n+1)!}{x^{n+2}} \quad , \text{ para } x > 0\,,$$

que coincide con la estimación obtenida en la sección 4.

Dicen que los matemáticos no sabemos parar. Para mostrar que esto no es cierto, aquí concluímos el artículo.

Referencias

[1] Arteca, G. A., Fernández, A. M. y Castro, E. A., *Large-Order Perturbation Theory And Summation Methods In Quantum Mechanics*, Springer-Verlag 1990.

[2] Bhattacharya, R. N. y Ranga Rao, R., *Normal Approximation And Asymptotic Expansions*, SIAM (Society For Industrial And Applied Mathematics) 2010.

[3] Brezinski, C. y Zaglia Redivo, M., *Extrapolation Methods, Theory And Practice*, North-Holland 1991.

[4] Casselman, W., *What's Normal?*, http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-normal-integral, junio de 2011.

[5] Copson, E. T., *Asymptotic Expansions*, Cambridge University Press 1967.

[6] Feldman, J., *Math 321 (Real Variable II), Lecture Notes On Taylor Series And Asymptotic Expansions (February 2008)*, http://www.math.ubc.ca/~feldman/m321/asymptotic.pdf.

[7] Gajjar, J. S. B., *Notes For Math 44011: Asymptotic Expansions And Perturbation Methods (October 2010)*, http://www.maths.manchester.ac.uk/~gajjar/MATH44011/notes/44011_note2.pdf.

[8] Gaughan, E. D., *Introduction To Analysis, Fifth Edition*, Brooks/Cole 1998.

[9] Grunspan, C., *Asymptotic Expansions Of The Lognormal Implied Volatility: A Model Free Approach*, http://www.arxiv.org/pdf/1112.1652.pdf, 7 de diciembre de 2011.

[10] Hunter, J. K., *Lectures Notes On Asymptotics (Spring 2004)*, http://www.math.ucdavis.edu/~hunter/asymptotics/asymptotics.html.

[11] Hardy, G. H. *Divergent Series,* Oxford University Press 1949.

[12] Kahane, J.-P. y Lemarié-Rieusset, P.-G., *Fourier Series And Wavelets*, Gordon and Breach 1995.

[13] Knuth, D., *The Art Of Linear Programming, Volume I: Fundamental Algorithms, Third Edition*, Addison-Wesley 1997.

[14] Knuth, D., Teach Calculus With Big O, *Notices Of The American Mathematical Society*, Vol. 45, Núm. 6 (1998) p. 687, http://www.ams.org/notices/199806/commentary.pdf.

[15] López, J. L., *Expansiones Asintóticas De Integrales: Unificación De Métodos Asintóticos*, http://pcmap.unizar.es/~chelo/investig/publicaciones/joseluis/aexi.pdf.

[16] Miller, P. D., *Applied Asymptotic Analysis*, American Mathematical Society 2006.

[17] National Institute Of Standards And Technology (NIST), *NIST Digital Library Of Mathematical Functions*,
http://dlmf.nist.gov.

[18] Sedgewick, R. y Flajolet, P., *An Introduction To The Analysis Of Algorithms, Second Edition*, Pearson Education 2013,
http://aofa.cs.princeton.edu/home.

[19] Schelin, C. W., Calculator Function Approximation, *The American Mathematical Monthly* 90 (1983) 317–325.

[20] *The MacTutor History Of Mathematics*,
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk.

[21] *The Wolfram Functions Site*,
http://functions.wolfram.com.

[22] Wasow, W. R., *Asymptotic Expansions For Ordinary Differential Equations*, John Wiley, 1965.

[23] Watson, G. N., The Harmonic Functions Associated With The Parabolic Cylinder, *Proceedings Of The London Mathematical Society* 2 (1918) 116-148.

[24] Wheeden, R. L. y Zygmund, A., *Measure And Integral: An Introduction To Real Analysis*, Marcel Dekker 1977.

[25] Whittaker, E. T. y Watson, G. N., *A Course Of Modern Analysis*, American Edition, Cambridge University Press 1945.

[26] *Wikipedia*,
http://en.wikipedia.org/wiki/Big_O_notation.

[27] *Wikipedia*,
http://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform.

[28] Wolfram, S., *The History And Future Of Special Functions*,
http://www.stephenwolfram.com/publications/history-future-special-functions.

RECONOCIMIENTOS: Este artículo es una ampliación de la charla dada el 30 de marzo de 2012, en el Departamento de Matemáticas del Instituto Tecnológico Autónomo de México. Los datos biográficos que aparecen sin referencia, han sido tomados de [20]. Agradecemos al referee sus observaciones y sugerencias.

Departamento de Matemáticas
New Mexico State University
Las Cruces, Nuevo Méjico, EEUU
jalvarez@nmsu.edu

Publicat el 22 de juliol de 2104