

El Teorema de Pick y Redes de Puntos

José Luis Ramírez Ramírez

1. Algo de Historia

El Teorema de Pick fue demostrado por Georg Alexander Pick (1859 - 1942). Pick nació en Viena, Austria y era de padres judíos. Estudió matemáticas y física en la Universidad de Viena. Trabajó en distintas universidades, terminando su carrera en la Universidad de Praga.

Su trabajo matemático fue extremadamente amplio, alrededor de 67 documentos de muchos temas, como álgebra lineal, teoría de invariantes, cálculo integral, teoría potencial, análisis funcional y geometría. Sin embargo, parte de su popularidad se debe al teorema que lleva su nombre, el cual apareció en el año de 1899, en un artículo llamado “Geometrisches zur Zahlenlehre” publicado en Praga.

Este teorema, al cual se dedica buena parte de este artículo, no recibió mucha atención tras su publicación hasta el año 1969 cuando Steinhaus lo incluyó en su famoso libro “Mathematical Snapshots”. Fue así como atrajo la atención y admiración por su simplicidad y elegancia.

A pesar de que en la actualidad el teorema es bien conocido, no se tiene muy claro por qué fue demostrado por Pick. Se presume que pretendía mostrar las ventajas didácticas que se pueden obtener cuando se relacionan distintos temas matemáticos (es decir, un enfoque interdisciplinario), ya que Pick también tenía cierto interés en la educación.[1]



Georg Alexander Pick

Pick moriría a los 82 años en un campo de concentración nazi tras la invasión de lo que hoy en día se conoce como Republica Checa. [3]

2. Redes de Puntos

El objetivo de esta sección es introducir algunas definiciones básicas, necesarias para el desarrollo del tema.

Definición 1. Un punto P de coordenadas (x, y) se llama entero o reticular si x, y son números enteros, es decir, si $x, y \in \mathbb{Z}$

Definición 2. Una red de puntos M (red reticular M), es aquella que está formada por puntos enteros (reticulares) en el plano cartesiano.

Definición 3. Una red poligonal P (retículo poligonal P), es un polígono simple, cuyos vértices son enteros (reticulares).

Un polígono es simple si los vértices no coinciden unos con otros, ninguno de los vértices cae en uno de los lados del polígono y dos lados cualesquiera no se cortan.

Ejemplo 1. En la figura 1-a) y 1-b) aparece una red de puntos M y una red poligonal P , compuesta por 7 vértices.

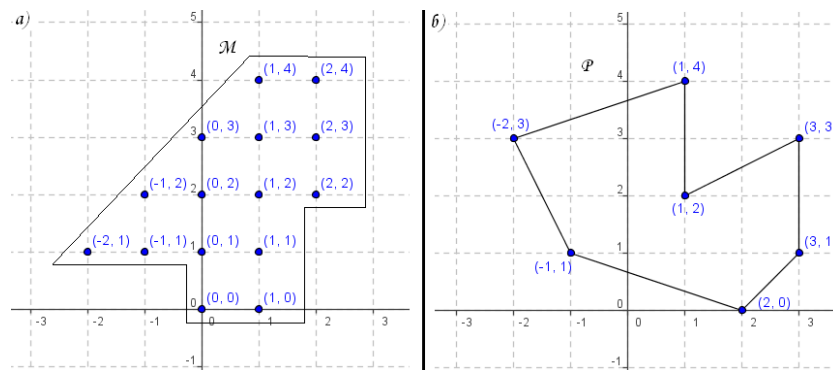


Figura 1: Red de Puntos M (figura a))- Red Poligonal P (figura b))

3. El Teorema de Pick

Con las definiciones anteriores se puede enunciar el Teorema de Pick, el cual da una fórmula muy elegante, para obtener el área de una red poligonal.

Teorema 1 (Teorema de Pick). *El área \mathcal{P} de toda red poligonal es*

$$\mathcal{P} = I + \frac{B}{2} - 1$$

donde I es el número de puntos enteros interiores y B es el número de puntos enteros sobre la frontera del polígono.

La unidad de medida del área que se tomará es el área de los cuadrados que forman la red.

Ejemplo 2. *En la figura 2 aparece una red poligonal P cuya área es 9. Por otra parte, hay 8 puntos en la frontera, es decir $B = 8$ y hay 6 puntos en el interior de P , luego $I = 6$, por lo tanto al aplicar el Teorema de Pick se obtiene que:*

$$\mathcal{P} = I + \frac{B}{2} - 1 = 6 + \frac{8}{2} - 1 = 9$$

lo cual coincide con el área de P .

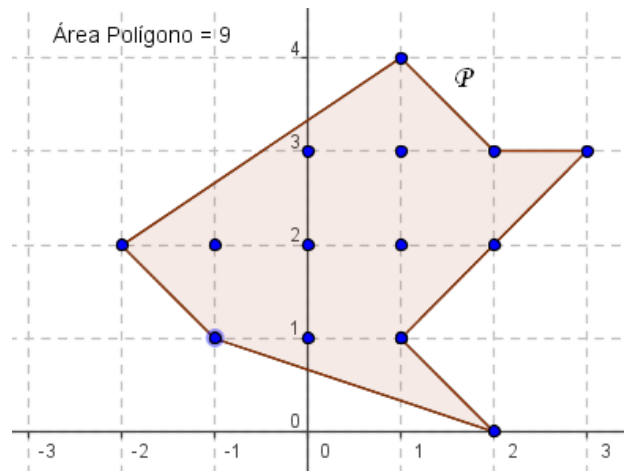


Figura 2: Ejemplo - Teorema de Pick

Notación: En adelante, se notará $\mathcal{A}(Q)$ el área de un polígono Q y $\mathcal{P}(Q)$ a la fórmula de Pick para el polígono Q .

La estructura de la demostración es: primero probar que la fórmula de Pick es válida para rectángulos y triángulos. Luego, probar que si la fórmula de Pick vale para dos redes poligonales con interiores disjuntos y con un lado en común, entonces vale para la unión y finalmente demostrar que toda red poligonal se puede triangularizar, es decir, descomponer en triángulos disjuntos.

Teorema 2. *Sea R una red rectangular, con lados paralelos a los ejes, entonces*

$$\mathcal{A}(R) = \mathcal{P}(R)$$

Demostración. Sea R una red rectangular, de $m \times n$, entonces R tiene un total de $T = (m+1)(n+1)$ puntos. El lado de distancia m tiene $m+1$ puntos y el de distancia n tiene $n+1$ puntos, luego los puntos de la frontera de R son:

$$B = 2(m+1) + 2(n+1) - 4 = 2m + 2n$$

Se restó cuatro ya que se contaron dos veces los puntos de las “esquinas”. Luego los puntos interiores son

$$\begin{aligned} I &= T - B \\ &= (m+1)(n+1) - (2m+2n) \\ &= mn + m + n + 1 - 2m - 2n \\ &= mn - m - n + 1 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(R) &= I + \frac{B}{2} - 1 \\ &= mn - m - n + 1 + \frac{2m+2n}{2} - 1 \\ &= mn \\ &= \mathcal{A}(R) \end{aligned}$$

así la fórmula de Pick se cumple para los rectángulos con lados paralelos a los ejes. \square

Teorema 3. *Sea Δ un triángulo rectángulo sobre una red, con un cateto vertical (y por lo tanto el otro horizontal), entonces*

$$\mathcal{A}(\Delta) = \mathcal{P}(\Delta)$$

Demostración. Sea Δ un triángulo rectángulo de catetos m y n . Así los lados m y n tienen respectivamente $m+1$ y $n+1$ puntos. Sea k los puntos de la diagonal (sin contar los extremos) entonces

$$\begin{aligned} B &= (m+1) + (n+1) + k - 1 \\ &= m + n + k + 1 \end{aligned}$$

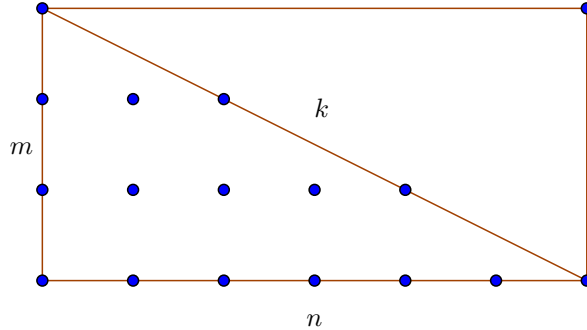


Figura 3: Demostración Teorema 3

Sea R el rectángulo formado uniendo Δ y su simétrico respecto a la hipotenusa, *ver figura 3*, es decir que el total de puntos interiores en R es $mn - m - n + 1$.

Si a estos se restan los k puntos de la diagonal, entonces, el número de puntos interiores a cada lado de la diagonal, que es igual al total de puntos interiores de Δ , son:

$$I = \frac{mn - m - n + 1 - k}{2}$$

Aplicando el Teorema de Pick, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\Delta) &= I + \frac{B}{2} - 1 \\ &= \frac{mn - m - n + 1 - k}{2} + \frac{m + n + k + 1}{2} - 1 \\ &= \frac{mn + 2}{2} - 1 \\ &= \frac{mn}{2} \\ &= \mathcal{A}(\Delta) \end{aligned}$$

así la fórmula de Pick se cumple para los triángulos rectángulos con algún cateto vertical. □

A continuación se probará que si dos redes poligonales con un lado común y con interiores disyuntos satisfacen el Teorema de Pick, entonces la unión también la satisface, posteriormente se demostrará que la fórmula de Pick es válida para cualquier triángulo.

Teorema 4. Sean P una red poligonal y, P_1 y P_2 dos redes poligonales tales que $P = P_1 \cup P_2$, tienen interiores disyuntos y un lado común. Si $\mathcal{A}(P_1) = \mathcal{P}(P_1)$ y $\mathcal{A}(P_2) = \mathcal{P}(P_2)$ entonces

$$\mathcal{A}(P) = \mathcal{P}(P)$$

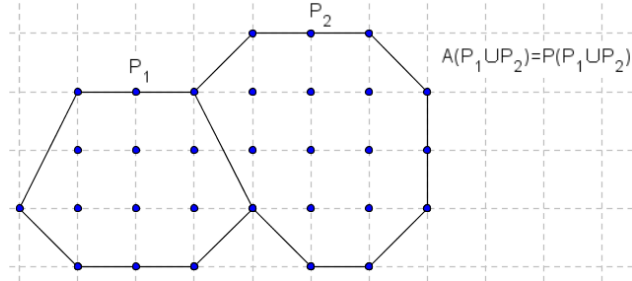


Figura 4: Demostración Teorema 4

Demostración. Sea P una red poligonal tal que I y B son su número de puntos interiores y de frontera, respectivamente. Sean I_1 y B_1 la cantidad de puntos interiores y de frontera de P_1 e I_2 y B_2 la cantidad de puntos interiores y de frontera de P_2 . Si k es el número de puntos del lado común de P_1 y P_2 , entonces:

$$\begin{aligned} B &= (B_1 - k) + (B_2 - k) + 2 \\ &\quad (\text{el } 2 \text{ corresponde a los puntos extremos del lado común}) \\ &= B_1 + B_2 - 2k + 2 \end{aligned}$$

$$I = I_1 + I_2 + k - 2$$

Además, $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(P_1) + \mathcal{A}(P_2)$ y por hipótesis $\mathcal{A}(P_1) = \mathcal{P}(P_1)$ y $\mathcal{A}(P_2) = \mathcal{P}(P_2)$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(P) &= I + \frac{B}{2} - 1 \\ &= I_1 + I_2 + k - 2 + \frac{B_1 + B_2 - 2k + 2}{2} - 1 \\ &= I_1 + I_2 + k - 2 + \frac{B_1}{2} + \frac{B_2}{2} - k + 1 - 1 \\ &= \left(I_1 + \frac{B_1}{2} - 1 \right) + \left(I_2 + \frac{B_2}{2} - 1 \right) \\ &= \mathcal{P}(P_1) + \mathcal{P}(P_2) \\ &= \mathcal{A}(P_1) + \mathcal{A}(P_2) \\ &= \mathcal{A}(P) \end{aligned}$$

como se quería demostrar. □

Teorema 5. Si Δ es un triángulo reticular, entonces

$$\mathcal{A}(\Delta) = \mathcal{P}(\Delta)$$

Demostración. La demostración se llevará a cabo en tres casos:

Caso 1: Triángulo Rectángulo con catetos horizontal y vertical. Ver Teorema 3.

Caso 2: Triángulo con un sólo lado horizontal (o vertical), ver figura 5-a).

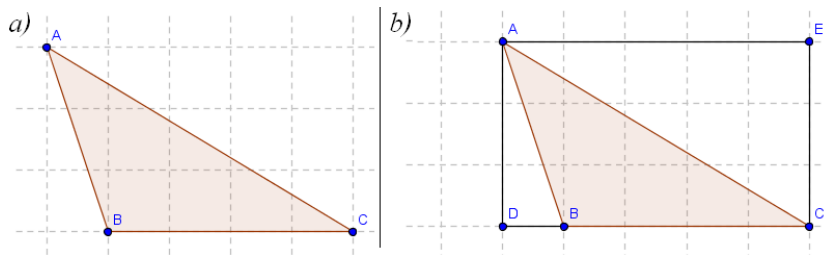


Figura 5: Demostración Teorema 5 - Caso 2

En este caso se construye el rectángulo $ADCE$ (ver figura 5-b)). Luego los triángulos $\triangle ADB$ y $\triangle AEC$ son rectángulos y por el Teorema 3

$$\mathcal{A}(\triangle ADB) = \mathcal{P}(\triangle ADB) \qquad \mathcal{A}(\triangle AEC) = \mathcal{P}(\triangle AEC)$$

Además, por el Teorema 2 se tiene que $\mathcal{A}(\square ADCE) = \mathcal{P}(\square ADCE)$. Y por el Teorema 4 y las anteriores consideraciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\triangle ADB) + \mathcal{A}(\triangle ABC) + \mathcal{A}(\triangle AEC) &= \mathcal{A}(ADCE) = \mathcal{P}(\square ADCE) \\ &= \mathcal{P}(\triangle ADB) + \mathcal{P}(\triangle ABC) + \mathcal{P}(\triangle AEC) \\ &= \mathcal{A}(\triangle ADB) + \mathcal{P}(\triangle ABC) + \mathcal{A}(\triangle AEC) \end{aligned}$$

Cancelando los términos se concluye que $\mathcal{A}(\triangle ABC) = \mathcal{P}(\triangle ABC)$.

Caso 3: Triángulo sin lados horizontales ni verticales, (ver figura 6).

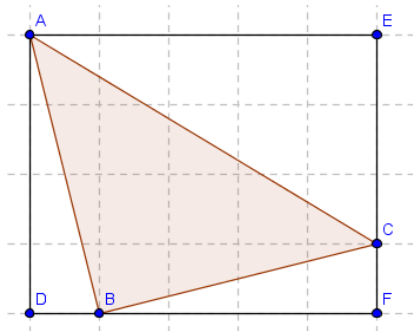


Figura 6: Demostración Teorema 5 - Caso 3

La demostración es análoga al caso 2.

□

Para la demostración del Teorema de Pick falta probar que una red poligonal se puede triangularizar, es decir que se puede dividir en triángulos mediante diagonales que no se cortan, que son interiores al polígono y cuyos vértices coinciden con los lados del polígono.

Teorema 6. *Todo polígono simple se puede triangular.*

Demostración. Sea P un polígono simple. La demostración se llevará a cabo por inducción sobre el número v de vértices del polígono. Si $v = 3$ entonces P es un triángulo y se tiene el teorema.

Supongamos válido el teorema para un polígono simple P de menos de v vértices y demostrémoslo para v . Sea l una recta que pasa por un vértice A de P , tal que no toca en ningún otro punto a P ¹. Por lo tanto se tiene que existen vértices B y C adyacentes a A , ver figura 7.

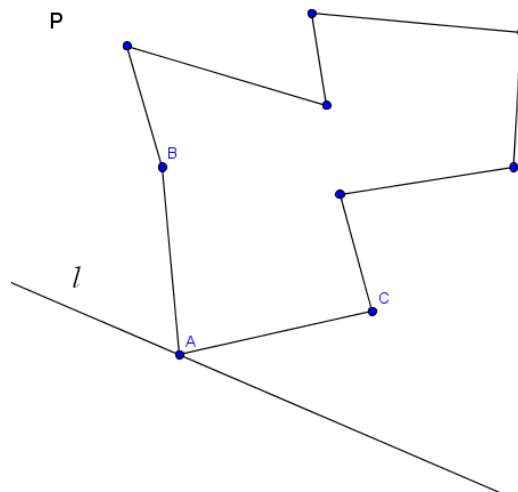


Figura 7: Demostración Teorema 6

Por lo tanto $\angle BAC < 180^\circ$. Sea $\triangle ABC$, entonces se tiene las siguientes posibilidades:

- Caso 1. Ningún otro vértice de P este en el interior de $\triangle ABC$, ni en el lado BC , ver figura 8.

Por lo tanto la diagonal BC divide a P en dos partes, cada una con menos de v vértices, a los que se puede aplicar la hipótesis de inducción, quedando demostrado.

- Caso 2. Que exista al menos un vértice en el interior de $\triangle ABC$ o sobre la diagonal BC , ver figura 9.

¹En el siguiente teorema se demuestra que efectivamente existe dicho punto A en todo polígono simple

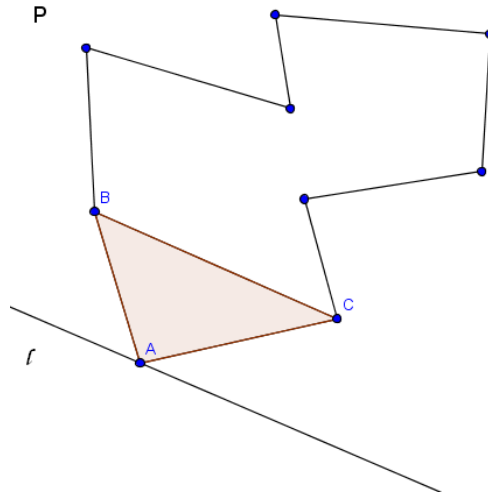


Figura 8: Demostración Teorema 6 - Caso 1

En este caso se une A con cada uno de estos puntos. Sea el segmento AD aquel de estos segmentos que está más próximo al segmento AB . Entonces el segmento AD divide a P en dos polígonos simples de menos de v vértices, ver figura 10, luego se aplica la hipótesis de inducción. Quedando demostrado el teorema.

□

Corolario 1. Si P es una red poligonal entonces P se puede triangularizar.

En la demostración del teorema anterior se utilizó el hecho de que existe una recta que pasa por un punto del polígono sin tocar algún otro punto del polígono, a continuación se demuestra que efectivamente esto es válido.

Definición 4. Un vértice V de un polígono P , se llama vértice saliente si es posible trazar una recta en el plano de P que separe dicho vértice V de todos los demás de P .

Si se demuestra que en un polígono simple existe al menos un vértice saliente M , entonces existirá una recta l' que separe a M de los demás vértices, luego trazando la recta $l \parallel l'$ que pase por M estaría solucionado el problema.

Teorema 7. Todo polígono simple tiene al menos dos vértices salientes.

Demostración. Sea P un polígono simple con vértices consecutivos V_1, V_2, \dots, V_n y sea s una recta del plano de P distinta de $V_i V_j$ ($i \neq j$). Sea $\overline{V_i V_j}$ la prolongación, si es necesario, tal que corta a s en el punto A_{ij} , ver figura 11.

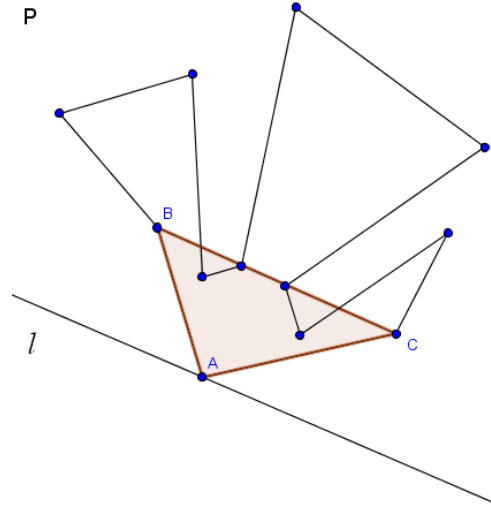


Figura 9: Demostración Teorema 6 - Caso 2

Sea B_k el pie de la perpendicular de V_k sobre s . Sea O un punto de s , distinto de cada uno de los A_{ij} , de modo que todos los B_k estén a un mismo lado de O , ver figura 11. Sean las semirrectas $\overrightarrow{OB_k}$, con $k = 1, 2, \dots, n$. Estas semirrectas son todas distintas ($O \neq A_{ij}$) y están a un mismo lado de la perpendicular a s que pasa por O .

Entonces dos de las semirrectas por ejemplo OB_1 y OB_3 determinan un ángulo dentro del cual están todas las demás semirrectas, ver figura 12, así V_1 y V_3 son vértices salientes de P .

□

Teorema 8 (Teorema de Pick). *En toda red poligonal R , el área esta dada por:*

$$\mathcal{P}(R) = I + \frac{B}{2} - 1$$

donde I es el número de puntos enteros interiores y B es el número de puntos enteros sobre la frontera del polígono.

Demostración. Sea R una red poligonal, entonces por el corolario 1 se puede triangularizar en T_1, T_2, \dots, T_n triángulos, luego:

$$\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(T_1) + \mathcal{A}(T_2) + \dots + \mathcal{A}(T_n)$$

Por el Teorema 5

$$\mathcal{A}(T_i) = \mathcal{P}(T_i), \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n$$

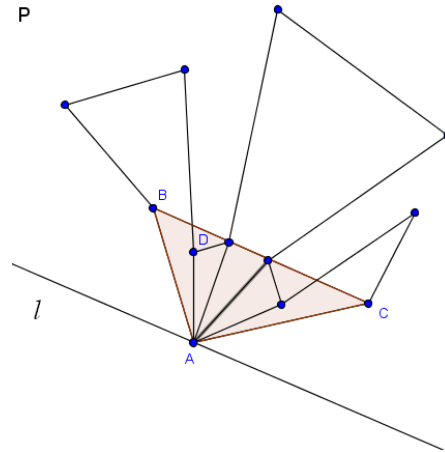


Figura 10: Demostración Teorema 6 - Caso 2

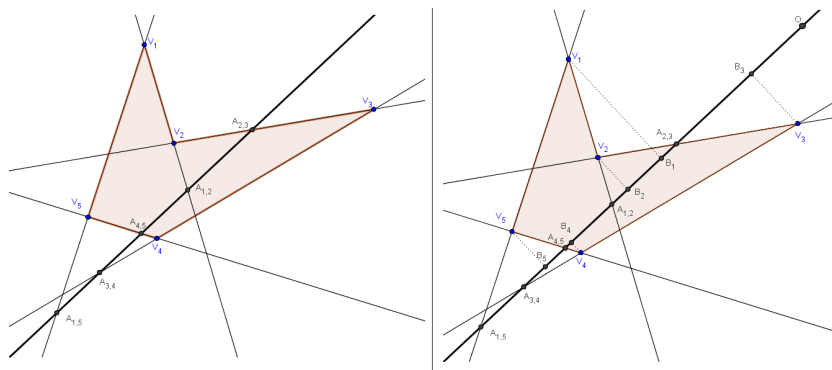


Figura 11: Demostración Teorema 7

aplicando n veces el Teorema 4 se concluye que

$$A(R) = \mathcal{P}(R) = I + \frac{B}{2} - 1$$

□

3.1. Otra Demostración del Teorema de Pick

A continuación se presentará otra demostración del Teorema de Pick, basada en la definición de triángulo primitivo y la Fórmula de Euler para poliedros y grafos simples.

Definición 5. *Un triángulo es primitivo si no tiene puntos enteros en el interior y sus vértices son los únicos puntos enteros que tiene en su frontera.*

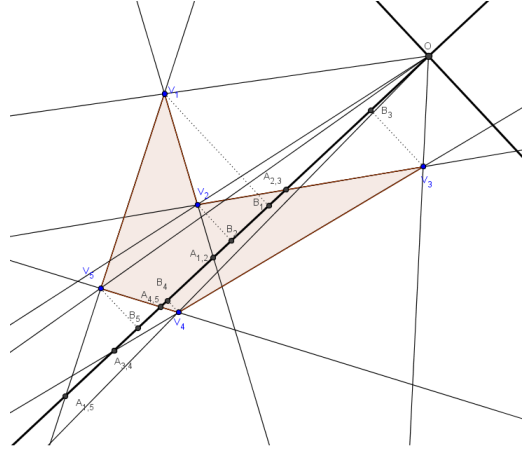


Figura 12: Demostración Teorema 7

Teorema 9. Toda red poligonal se puede descomponer en triángulos primitivos.

Demostración. Sea R una red poligonal, entonces por el corolario 1, R se puede triangularizar; así que basta demostrar el teorema para una red triangular.

Caso 1: Sea $\triangle ABC$ una red triangular, si $\triangle ABC$ es primitivo quedaría demostrado el teorema.

Caso 2: Supongamos $\triangle ABC$ tiene al menos un punto entero sobre al menos uno de sus lados y ninguno interior, ver figura 13-a).

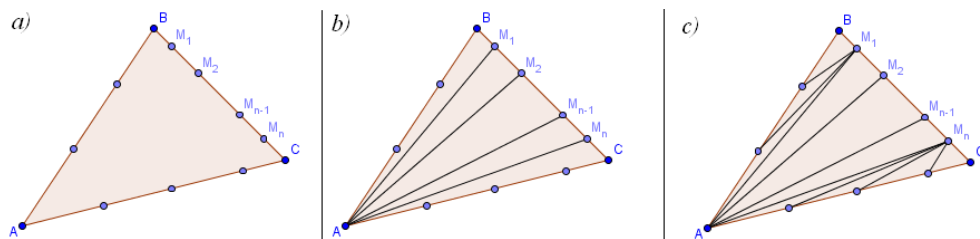


Figura 13: Demostración Teorema 9, Caso2

Sean M_1, M_2, \dots, M_n los puntos enteros del segmento BC , donde M_1 y M_n son los puntos más cercanos a B y C respectivamente. Sean los segmentos AM_i ($i = 1, \dots, n$) como $\triangle ABC$ no tiene puntos en su interior entonces los triángulos $\triangle AM_i M_{i+1}$ ($1 < i < n - 1$) son primitivos, ver figura 13 -b).

Solo quedan los triángulos $\triangle ABM_1$ y $\triangle AM_n C$ que son los únicos que pueden tener puntos enteros (sobre los lados AB o AC respectivamente) en cuyos casos se unirían con M_1 y M_n obteniéndose así una descomposición en triángulos primitivos, ver figura 13-c).

Caso 3: Supongamos que $\triangle ABC$ tiene puntos en su interior, entonces por el corolario 1 se descompone hasta que no queden puntos interiores en cada uno de los triángulos de la descomposición y luego se aplicará el caso 1 o 2. \square

El objetivo de las siguientes proposiciones es demostrar que el área de un triángulo primitivo es $1/2$.

Teorema 10. Si $(0, 0)$, (a_1, a_2) y (b_1, b_2) , con $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, son las coordenadas del $\triangle OAB$ en el plano, entonces

$$\mathcal{A}(\triangle OAB) = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad se asume que $0 < a_2 < b_2$, dando lugar a los siguientes casos:

Caso 1: Si $0 < a_1 = b_1$ (ver figura 14), entonces

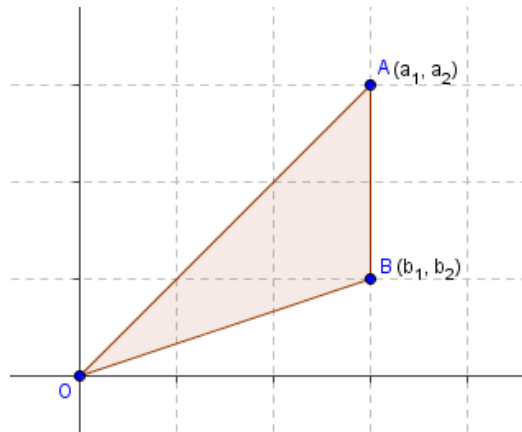


Figura 14: Demostración Teorema 10, Caso 1

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\triangle OAB) &= \frac{a_1 |b_2 - a_2|}{2} \\ &= \frac{|a_1 b_2 - a_1 a_2|}{2} \\ &= \frac{1}{2} |a_1 b_2 - b_1 a_2| \end{aligned}$$

Caso 2: Si $0 < a_1 < b_1$ (ver figura 15), entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\triangle OAB) &= \frac{b_1 b_2}{2} - \frac{a_1 a_2}{2} - (b_1 - a_1) a_2 - \frac{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}{2} \\ &= \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{2} \\ &= \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1| \end{aligned}$$

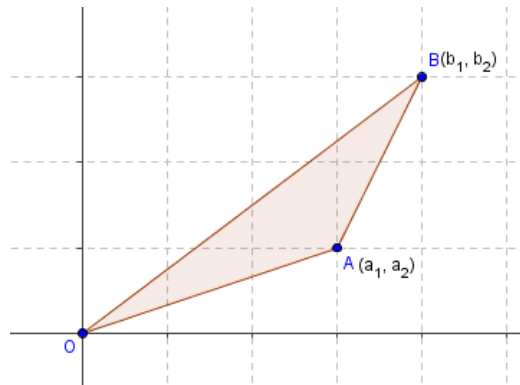


Figura 15: Demostración Teorema 10, Caso 2

Caso 3: Si $0 < b_1 < a_1$ (ver figura 16), entonces

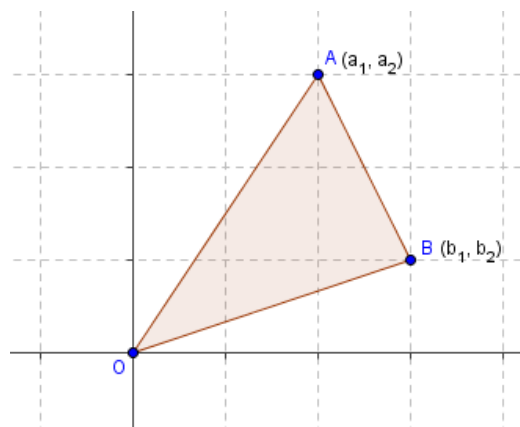


Figura 16: Demostración Teorema 10, Caso 3

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(\triangle OAB) &= \frac{b_1 b_2}{2} - \frac{a_1 a_2}{2} - (a_1 - b_1) b_2 - \frac{(b_2 - a_2)(a_1 - b_1)}{2} \\
 &= \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1|
 \end{aligned}$$

□

A continuación se presenta un resultado debido a Euler, el cual comento en el año de 1750 en una carta a su colega Christian Goldbach, donde le escribía que estaba empezando a estudiar los poliedros y sus propiedades, Euler escribió que:

“Recientemente se me ha ocurrido determinar propiedades generales de los sólidos limitados por superficies planas, porque no hay duda de que se podrían encontrar teoremas generales sobre ellos. Así como para figuras planas rectilíneas hay propiedades como las siguientes:

1. *En cada figura plana, el número de lados es igual al número de ángulos, y*
2. *La suma de todos los ángulos interiores es igual a dos rectos por el número de lados menos cuatro rectos.*

Así como para figuras planas sólo es necesario considerar lados y ángulos, para el caso de los sólidos deberían ser tenidos en cuenta más elementos [11]

Así, Euler consideraba tener en cuenta las caras del poliedro, sus ángulos sólidos, los ángulos planos, los vértices y lados de cada cara, las aristas del poliedro, por lo que éste encontró que:

En cada cara, el número de lados es igual al número de ángulos planos. Dos caras se encuentran en un lado, entonces la cantidad de lados total de todas las caras es el doble de la cantidad de aristas del poliedro. Por lo tanto, la cantidad total de lados de todas las caras es siempre un número par. Cada cara tiene por lo menos tres lados, entonces la cantidad total de lados de todas las caras es mayor o igual que tres veces el número de caras.

Concluyendo que:

Así por la fórmula de Euler se cumple que:

$$V - A + C = 2$$

Además, V es igual a la cantidad de vértices interiores de P y P' y los de la frontera, los cuales sólo se cuentan una vez, entonces:

$$V = 2I + B$$

Puesto que P y P' contribuyen cada uno en T triángulos primitivos, entonces:

$$C = 2T$$

Puesto que los $2T$ triángulos cada uno posee 3 aristas entonces se obtienen $6T$ aristas, sin embargo, cada arista es compartida por 2 triángulos, entonces

$$A = 3T$$

Así

$$\begin{aligned} V - A + C &= 2 \\ 2I + B - 3T + 2T &= 2 \\ T &= 2I + B - 2 \end{aligned}$$

□

Teorema 13. *El área de todo triángulo primitivo es $1/2$*

Demostración. Sea $\triangle OAB$ un triángulo primitivo, sin pérdida de generalidad supongamos que tiene un punto en el origen. Sean $O(0, 0)$, $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ entonces por el Teorema 10

$$\mathcal{A}(\triangle OAB) = \frac{|a_1 b_2 - a_2 b_1|}{2}$$

puesto que $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\mathcal{A}(\triangle OAB) \geq 1/2$$

en general $\mathcal{A}(\triangle) \geq \frac{1}{2}$, donde \triangle es primitivo.

Sea R una red rectangular que contiene a $\triangle OAB$ y tal que una de sus diagonales coincide con un lado de $\triangle OAB$, ver figura 17.

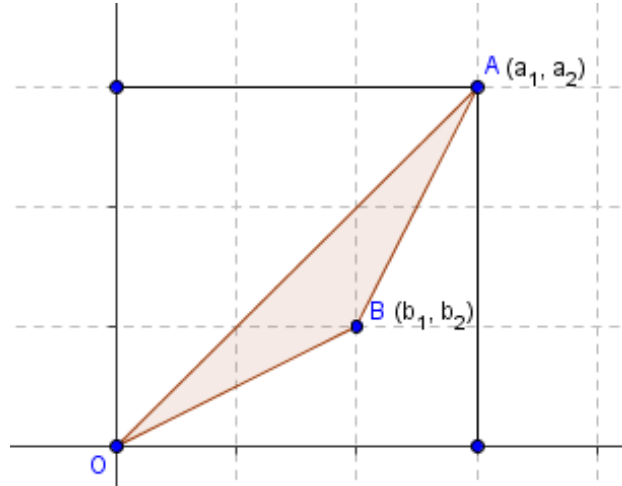


Figura 17: Demostración Teorema 13

Supongamos que R es de dimensión $m \times n$. Por el Teorema 9 R se puede descomponer en T_1, T_2, \dots, T_n triángulos primitivos, siendo uno de ellos $\triangle OAB$. Por otra parte R tiene los siguientes puntos:

$$B = 2m + 2n$$

$$I = mn - m - n + 1$$

Así por el Teorema 12 el número de triángulos primitivos en R son:

$$\begin{aligned} T &= 2I + B - 2 \\ &= 2(mn - m - n + 1) + 2m + 2n - 2 \\ &= 2mn \end{aligned}$$

Por tanto, como $\mathcal{A}(R) = mn$, además

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(R) &= \mathcal{A}(T_1) + \dots + \mathcal{A}(T_n) \\ &\leq \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2mn}{2} \\ &= mn \end{aligned}$$

Así el área de cada triángulo primitivo T_i no puede exceder a $1/2$, es decir, $\mathcal{A}(T_i) = 1/2$ para todo i , en particular $\mathcal{A}(\triangle OAB) = 1/2$. \square

Teorema 14 (Teorema de Pick). *En toda red poligonal R , el área está dada por:*

$$\mathcal{P}(R) = I + \frac{B}{2} - 1$$

donde I es el número de puntos enteros interiores y B es el número de puntos enteros sobre la frontera del polígono.

Demostración. Sea R una red poligonal, entonces por los Teoremas 9 y 12 ésta se puede descomponer en

$$T = 2I + B - 2$$

triángulos primitivos, cada uno de área $1/2$ por el Teorema 13. Así

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(P) &= \frac{T}{2} \\ &= \frac{2I + B - 2}{2} \\ &= I + \frac{B}{2} - 1 \\ &= \mathcal{P}(P) \end{aligned}$$

quedando demostrado el teorema. \square

3.2. Aplicaciones del Teorema de Pick

A continuación se demostrará, a partir del Teorema de Pick, que no es posible construir un polígono regular de n lados, exceptuando el cuadrado, que tenga vértices enteros, es decir que sus n vértices tengan coordenadas enteras.

Teorema 15. *No existen triángulos equiláteros cuyos vértices sean enteros.*

Demostración. Supongamos que existe un triángulo equilátero $\triangle ABC$ cuyos vértices son enteros. Entonces por el Teorema de Pick se tiene que

$$\mathcal{A}(\triangle ABC) = \mathcal{P}(\triangle ABC) = I + \frac{B}{2} - 1 \in \mathbb{Q} \quad (1)$$

es decir el área de $\triangle ABC$ es una cantidad racional. Por otra parte, el área de $\triangle ABC$ es igual a su base (b) por su altura (h) dividido entre dos, es decir

$$\mathcal{A}(\triangle ABC) = \frac{bh}{2} \quad (\text{ver figura 18})$$

Además, por el Teorema de Pitágoras

$$b^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}b}{2}$$

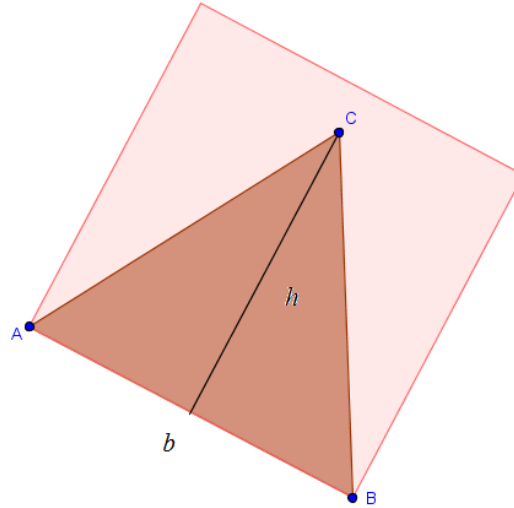


Figura 18: Demostración Teorema 15

luego

$$\mathcal{A}(\triangle ABC) = \frac{\sqrt{3}b^2}{4} \quad (2)$$

Además, b^2 es el área del cuadrado de lado b , ver figura 18, entonces por el Teorema de Pick b^2 es racional. Así por (1) y (2), $\sqrt{3}$ sería racional, lo cual es absurdo. Por tanto, no existen triángulos equiláteros con vértices enteros. \square

El siguiente teorema generalizará el anterior resultado para cualquier polígono regular de n lados $n \geq 5$, para ello utilizaremos el siguiente lema:

Lema 1. *El valor de $\tan(\pi/n)$ con $n \geq 3$ es racional si y sólo si $n = 4$.*

Demostración. Para su demostración ver [13]. \square

Teorema 16. *No existen polígonos regulares de cinco o más lados, cuyos vértices sean enteros.*

Demostración. Supongamos que existe un polígono regular P de n lados ($n \geq 5$) cuyos vértices son enteros. Luego por el Teorema de Pick

$$\mathcal{A}(P) = \mathcal{P}(P) \in \mathbb{Q} \quad (3)$$

es decir, el área de P es una cantidad racional. Por otra parte

$$\mathcal{A}(P) = \frac{nal}{2}$$

donde a y l son respectivamente la longitud de la apotema y la longitud de un lado de P .

Además,

$$\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{al}{2} \Rightarrow a = \frac{2}{l} \tan\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad (\text{ver figura 19}).$$

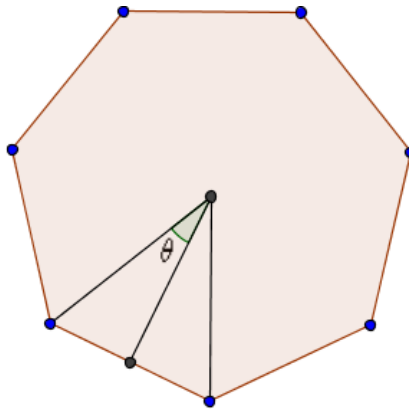


Figura 19: Demostración Teorema 16

Así

$$\mathcal{A}(P) = 2n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Como $n \geq 5$ entonces $\tan(\pi/n)$ no es racional, así $\mathcal{A}(P)$ no es racional, contradiciendo (3). \square

3.3. Teorema de Pick para Polígonos con Agujeros

En este apartado se generalizará el Teorema de Pick para polígonos con agujeros en el interior.

Definición 6. Sea R una red poligonal, un agujero de R es una red poligonal contenida en R , sin puntos de frontera en común.

Ejemplo 3. En la figura 20 aparece una red poligonal con 3 agujeros.

Teorema 17. Sea R una red poligonal con n agujeros, entonces

$$\mathcal{A}(R) = I + \frac{B}{2} - 1 + n$$

donde I es el número de puntos enteros interiores y B es el número de puntos enteros sobre la frontera del polígono.

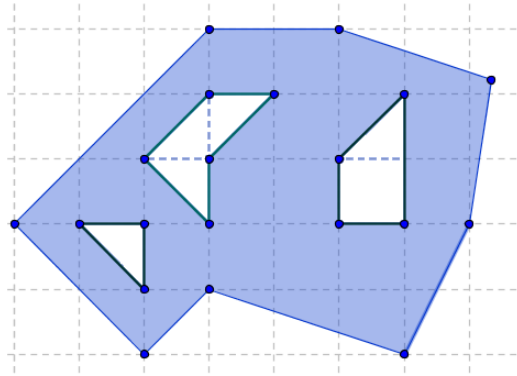


Figura 20: Red poligonal con agujeros

Demostración. Sea R' la red poligonal R sin agujeros, entonces por el Teorema de Pick

$$\mathcal{A}(R') = \mathcal{P}(R') = I_0 + \frac{B_0}{2} - 1$$

donde I_0 y B_0 son respectivamente el número de puntos interiores y de frontera de R' .

Sean R_i ($i = 1, \dots, n$) cada uno de los n agujeros y sean I_i y B_i ($i = 1, \dots, n$) el número de puntos interiores y de frontera de R_i . Entonces

$$\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(R') - \sum_{i=1}^n \mathcal{A}(R_i)$$

Además, $\mathcal{A}(R_i) = I_i + \frac{B_i}{2} - 1$.

Por otra parte,

$$I = I_0 - \sum_{i=1}^n I_i - \sum_{i=1}^n B_i$$

$$B = B_0 + \sum_{i=1}^n B_i$$

donde I y B son los puntos interiores y de frontera de R . Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(R) &= \mathcal{A}(R') - \sum_{i=1}^n \mathcal{A}(R_i) \\
 &= I_0 + \frac{B_0}{2} - 1 - \sum_{i=1}^n \left(I_i + \frac{B_i}{2} - 1 \right) \\
 &= I_0 + \frac{B_0}{2} - 1 - \sum_{i=1}^n I_i - \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{2} + \sum_{i=1}^n 1 \\
 &= I_0 + \frac{B_0}{2} - 1 - \sum_{i=1}^n I_i + \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{2} - \sum_{i=1}^n B_i + n \\
 &= \left(I_0 - \sum_{i=1}^n I_i - \sum_{i=1}^n B_i \right) + \frac{1}{2} \left(B_0 + \sum_{i=1}^n B_i \right) - 1 + n \\
 &= I + \frac{B}{2} - 1 + n
 \end{aligned}$$

quedando demostrado. \square

Ejemplo 4. En la figura 21 la red poligonal $ABCDE$ tiene dos agujeros, entonces por el teorema anterior:

$$\mathcal{A}(ABCDE) = 3 + \frac{15}{2} - 1 + 2 = \frac{23}{2}$$

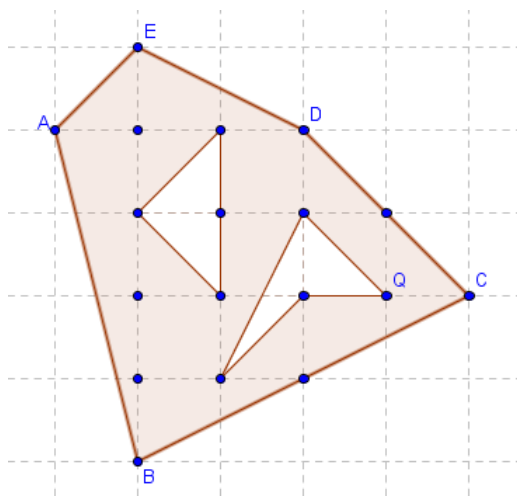


Figura 21: Red Poligonal con Agujeros

3.4. Teorema de Pick en Tres Dimensiones

El Teorema de Pick en general no se puede aplicar para sólidos, un contraejemplo fue dado por J. E. Reeve, considerando tetraedros cuyos vértices son de la forma $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(1, 1, r)$, donde r es un entero. Por ejemplo para $r = 2$, ver figura 22, se tiene que $B = 4$, $I = 0$, luego según la fórmula de Pick el volumen sería $0 + \frac{4}{2} - 1 = 1$, sin embargo el volumen de este tetraedro es $\frac{1}{3}$. Para generalizar la fórmula de Pick, es necesario introducir otro tipo de retículo, ver [10].

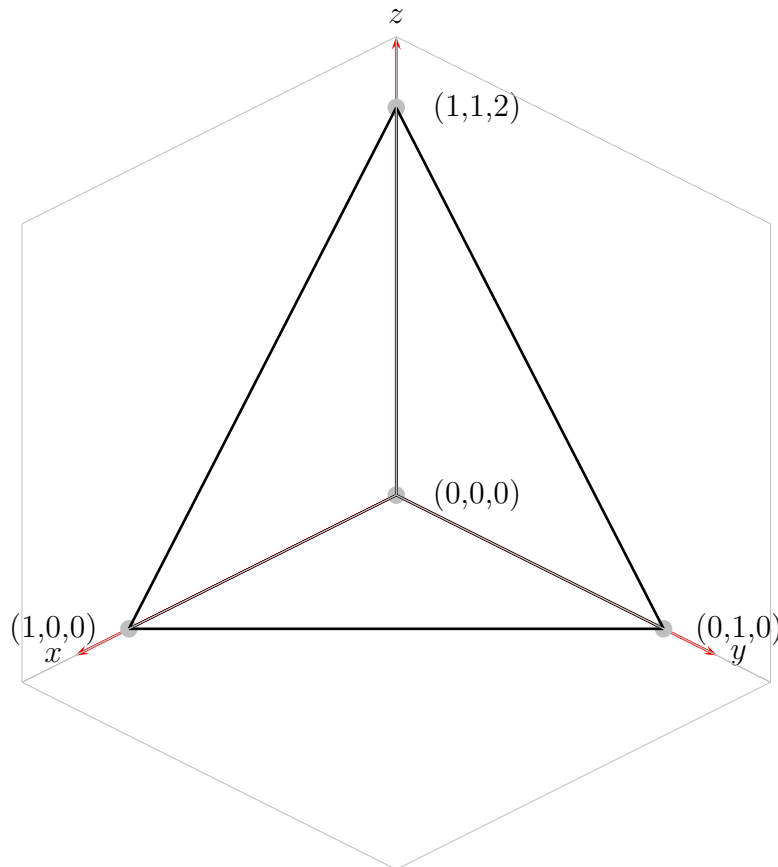


Figura 22: Teorema de Pick en Tres Dimensiones

4. Serie de Farey

En esta sección se introduce la definición de Sucesión de Farey y su relación con el Teorema de Pick, además se mostrarán algunos resultados sobre mallas reticulares y teoría de números.

Definición 7. Una Sucesión de Farey de orden n , es una sucesión de fracciones irreducibles, en el intervalo $[0, 1]$, con denominador menor o igual que n , ordenadas de menor a mayor. Se escribirá $0 = \frac{0}{1}$ y $1 = \frac{1}{1}$

Las sucesión de Farey de orden n se denotará por \mathcal{F}_n . Las primeras sucesiones de Farey son:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &: \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\} \\ \mathcal{F}_2 &: \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\} \\ \mathcal{F}_3 &: \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\} \\ \mathcal{F}_4 &: \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\} \\ \mathcal{F}_5 &: \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\}\end{aligned}$$

Las sucesiones de Farey cumplen las siguientes propiedades, las cuales se deducen del Teorema de Pick.

Teorema 18 (Teorema Fundamental de las Sucesiones de Farey).

- Si $\frac{a_1}{b_1}$ y $\frac{a_2}{b_2}$ son dos términos consecutivos de \mathcal{F}_n , entonces

$$b_1 a_2 - a_1 b_2 = 1 \quad \text{y} \quad b_1 + b_2 > n$$

- Si $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ y $\frac{a_3}{b_3}$ son tres términos consecutivos de \mathcal{F}_n , entonces

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 + a_3}{b_1 + b_3}$$

Antes de demostrar este teorema, se presentan algunas definiciones y propiedades.

Definición 8. Un punto entero $A(x, y)$ es visible si el segmento OA ($O(0, 0)$) no tiene puntos enteros, aparte de los extremos. Si el segmento OA tiene más de un punto entero (aparte de los extremos), entonces se dice que A es un punto oculto.

En la figura 23 el punto $C(5, 3)$ es visible y el punto $A(2, 4)$ es oculto.

Nota: El punto (kx, ky) , $|k| > 1$ está oculto por el punto (x, y) .

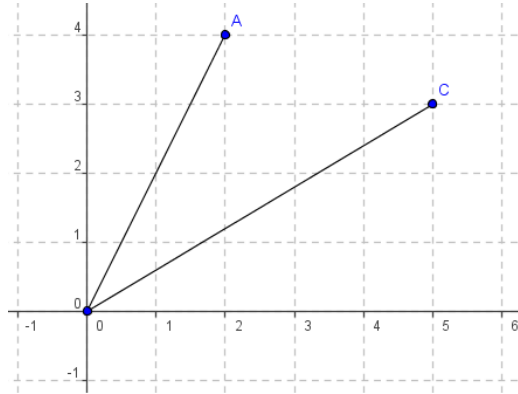


Figura 23: Punto Visible - Oculto

Teorema 19. Sea $A(x, y)$ un punto entero entonces A es visible si y solo si el $\text{mcd}(x, y) = 1$

Demostración. Supongamos que $A(x, y)$ es visible y que $\text{mcd}(x, y) = d$, entonces $d|x$ y $d|y$, es decir existen enteros k_1, k_2 tales que $dk_1 = x$ y $dk_2 = y$, esto quiere decir que (x, y) está oculto por (k_1, k_2) , contradiciendo la hipótesis, luego $d = 1 = \text{mcd}(x, y)$.

Recíprocamente, sea $A(x, y)$ un punto entero tal que $\text{mcd}(x, y) = 1$. Supongamos que A es oculto, entonces existe un punto entero $M(m_1, m_2)$ en el segmento OA . Sean M' y A' las proyecciones de M y A sobre el eje x , ver figura 24.

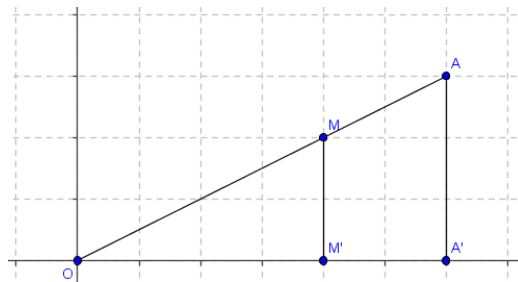


Figura 24: Demostración Teorema 19

Entonces $\triangle OM'M \sim \triangle OA'A$, así

$$\frac{OM'}{OA'} = \frac{MM'}{AA'} \Rightarrow \frac{OM'}{MM'} = \frac{OA'}{AA'}$$

Como $OM' = |m_1|$, $MM' = |m_2|$, $OA' = |x|$ y $AA' = |y|$, entonces

$$\frac{|m_1|}{|m_2|} = \frac{|x|}{|y|}$$

Claramente $|m_1| < |x|$ y $|m_2| < |y|$ ya que $M \neq A$. Así $\frac{x}{y}$ se puede simplificar a la fracción $\frac{m_1}{m_2}$, lo cual contradice que x y y sean primos relativos. \square

Del anterior teorema se deduce una forma de calcular el máximo común denominador de una pareja de números.

Teorema 20. Sean x, y números enteros, entonces $m + 1$ ($m \geq 1$) es el número de puntos enteros en el segmento OA , donde $A(x, y)$, si y solo si $m = \text{mcd}(a, b)$.

Demostración. Supongamos que $m = 1$ entonces en \overline{OA} hay dos puntos enteros O y A , luego A es visible y por el Teorema 19 $\text{mcd}(x, y) = 1$. Si $m > 1$, entonces en \overline{OA} hay al menos un punto entero distinto de los extremos. Sea $B(p, q)$ un punto visible de \overline{OA} , entonces $\text{mcd}(p, q) = 1$ y $m(p, q) = (x, y)$, es decir:

$$\begin{aligned} \text{mcd}(x, y) &= \text{mcd}(mp, mq) \\ &= m \cdot \text{mcd}(p, q) = m \end{aligned}$$

Recíprocamente si $m = \text{mcd}(x, y)$, si $m = 1$ entonces x e y son primos relativos y por el Teorema 19 $A(x, y)$ es visible, luego en el segmento OA hay $m + 1 = 1 + 1 = 2$ puntos visibles. Supongamos que $m > 1$, entonces $m|x$ y $m|y$, es decir existen enteros k_1, k_2 tales que $mk_1 = x$ y $mk_2 = y$. Sea $B(k_1, k_2)$, entonces como $\text{mcd}\left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}\right) = 1$ B es visible y A está oculto por B . Puesto que $mB = A$, entonces en \overline{OA} hay $m + 1$ puntos. \square

Ejemplo 5. El anterior teorema permite calcular el máximo común denominador, para ello se cuenta el número de puntos enteros del segmento OA y se resta uno. Por ejemplo, para calcular el $\text{mcd}(12, 4)$ se observa en la figura 25 que hay 5 puntos enteros luego $\text{mcd}(12, 4) = 4$.

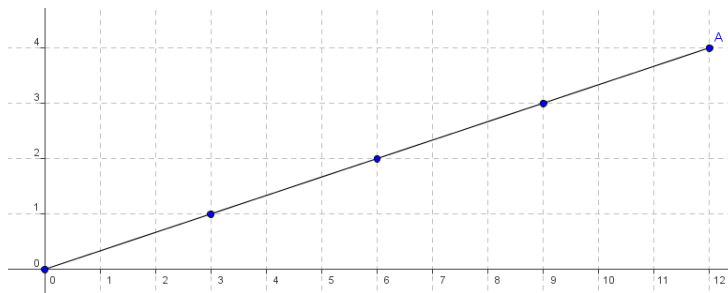


Figura 25: Máximo Común Denominador

4.1. Sucesiones de Farey en el Plano

Sea $\frac{a}{b}$ una fracción de \mathcal{F}_n entonces a ésta le corresponde un punto entero (a, b) en el plano, por ejemplo:

$$\mathcal{F}_5 : \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\}$$

se corresponde con los puntos del plano de la figura 26

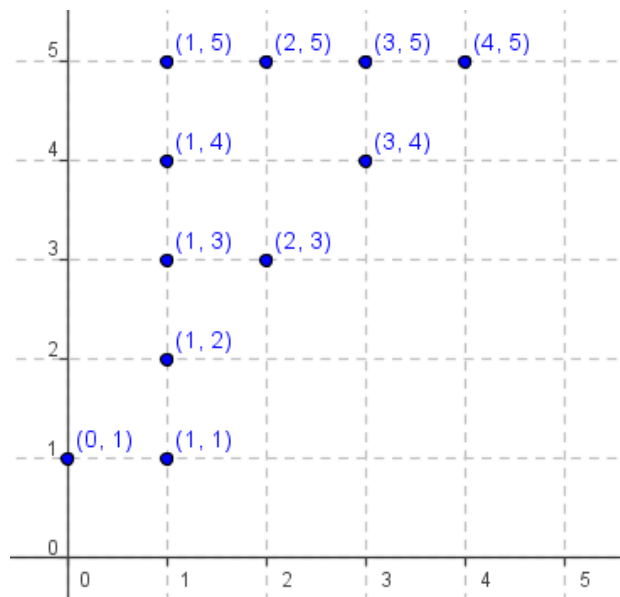


Figura 26: Sucesiones de Farey en el Plano

Estos puntos están en la región delimitada por las rectas $y = x$, $x = 0$, $x = 4$ y $y = 5$, además todos los puntos visible de esa región, incluyendo la frontera, son los de \mathcal{F}_5 . Este hecho se puede generalizar para \mathcal{F}_n .

Teorema 21. *Los puntos asociados de la sucesión \mathcal{F}_n están en la región R , incluyendo la frontera, donde $R : y = x, x = 0, x = n - 1$ y $y = n$. Además, todos los puntos visibles de esta región son los de \mathcal{F}_n*

Demostración. Los puntos $(0, 1)$ y $(1, 1)$ están sobre las rectas $x = 0$ y $y = x$. Sea $\frac{a}{b} \in \mathcal{F}_n$, entonces $0 < a < b \leq n$, entonces $\frac{a}{b}$ está sobre la recta $y = \frac{b}{a}x$ con $1 < \frac{b}{a}$, como la pendiente es positiva y mayor que 1, entonces (a, b) está arriba de la recta $y = x$. Como $b \leq n$ y $a \leq n - 1$, entonces (a, b) está por debajo de $y = n$ y a la izquierda de $x = n - 1$, luego todos los puntos de \mathcal{F}_n están en la región R .

Además, sobre la recta $x = 0$ solo es visible $(0, 1)$, sobre la recta $y = x$ solo es visible $(1, 1)$, los cuales están en \mathcal{F}_n . Sea (a, b) un punto visible de la región R , entonces $0 < a < b$, $\text{mcd}(a, b) = 1$ y $b \leq n$, luego por definición $\frac{a}{b} \in \mathcal{F}_n$. □

Teorema 22. Sean $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \in \mathcal{F}_n$ con $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$ consecutivos, entonces las rectas OA y OB son consecutivas, donde $A(a_1, b_1)$ y $B(a_2, b_2)$.

Demostración. Sean las rectas $y = \frac{b_1}{a_1}x$, $y = \frac{b_2}{a_2}x$, como $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$, entonces la pendiente de $y = \frac{b_1}{a_1}x$ es mayor, luego OA es “menos inclinada” que OB . Si existiera una recta OC tal que C está entre A y B , con $C(a_3, b_3)$ visible, entonces se tendría que $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_3}{b_3} < \frac{a_2}{b_2}$, luego $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ no serían consecutivos. □

Teorema 23. Sean $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \in \mathcal{F}_n$ consecutivos, entonces $\triangle OAB$ es primitivo, donde $A(a_1, b_1)$ y $B(a_2, b_2)$.

Demostración. Como $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ son consecutivos, entonces por el teorema anterior no pueden haber puntos visibles en el interior de $\triangle OAB$. Además, por el Teorema 21 A y B son visibles, es decir que los únicos puntos visibles en $\triangle OAB$ son sus vértices, lo que concluye que el triángulo es primitivo. □

Con los anteriores teoremas se puede realizar una demostración del teorema fundamental de las sucesiones de Farey.

Teorema Fundamental de las Sucesiones de Farey.

- Si $\frac{a_1}{b_1}$ y $\frac{a_2}{b_2}$ son dos términos consecutivos de \mathcal{F}_n , entonces

$$b_1 a_2 - a_1 b_2 = 1 \quad \text{y} \quad b_1 + b_2 > n$$

- Si $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ y $\frac{a_3}{b_3}$ son tres términos consecutivos de \mathcal{F}_n , entonces

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 + a_3}{b_1 + b_3}$$

Demostración. .

- Sean $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \in \mathcal{F}_n$ consecutivas, entonces $\triangle OAB$ es primitivo, donde $A(a_1, b_1)$ y $B(a_2, b_2)$, luego por el Teorema 13 el área de $\triangle OAB$ es $\frac{1}{2}$. Además, por el Teorema 10 se tiene que:

$$\mathcal{A}(\triangle OAB) = \frac{1}{2} |b_1 a_2 - a_1 b_2| = \frac{1}{2} \Rightarrow |a_1 b_2 - b_1 a_2| = 1$$

Como las fracciones son consecutivas, entonces

$$0 < \frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} \Rightarrow 0 < a_2 b_1 - a_1 b_2$$

entonces $b_1 a_2 - a_1 b_2 = 1$

- Sean $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ y $\frac{a_3}{b_3}$ tres términos consecutivos de \mathcal{F}_n , entonces por el ítem anterior se tiene que:

$$b_1 a_2 - a_1 b_2 = 1 \qquad b_2 a_3 - a_2 b_3 = 1$$

igualando las dos ecuaciones se obtiene que

$$\begin{aligned} b_1 a_2 - a_1 b_2 &= b_2 a_3 - a_2 b_3 \\ b_1 a_2 + a_2 b_3 &= a_1 b_2 + b_2 a_3 \\ a_2 (b_1 + b_3) &= b_2 (a_1 + a_3) \\ \frac{a_2}{b_2} &= \frac{a_1 + a_3}{b_1 + b_3} \end{aligned}$$

□

4.2. Triángulos con un punto interior

En este apartado se estudiará una interesante relación que se da en un triángulo reticular con un único punto interior, es decir con $I = 1$.

Teorema 24. *Si un triángulo reticular tiene B puntos en la frontera y exactamente un punto interior ($I = 1$), entonces $B = 3, 4, 6, 8$ o 9 .*

Antes de probar este teorema, se demostrarán algunas propiedades preliminares. Sea $\triangle OAB$ un triángulo con exactamente un punto interior, sin pérdida de generalidad se supone que el triángulo tiene un vértice en el origen. Sean $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ los dos vértices del triángulo, distintos del origen. Sean los vectores \vec{OA} y \vec{OB} . Y sea \vec{OC} el vector que representa el tercer lado, es decir $C(a_1 - b_1, a_2 - b_2) = (c_1, c_2)$, ver figura 27.

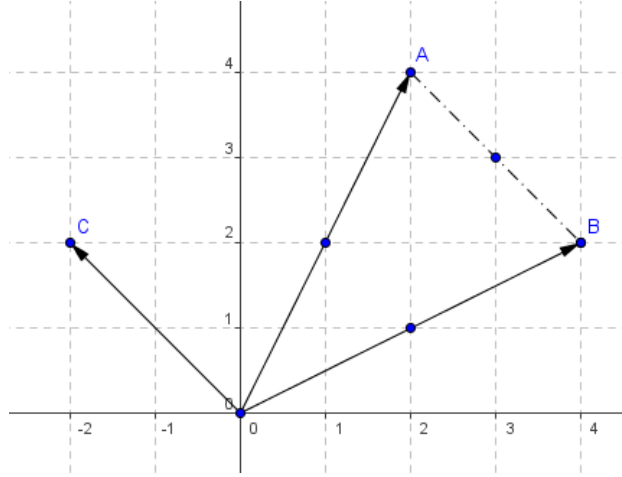


Figura 27: Triángulos con un punto interior

Sean $a = \text{mcd}(a_1, a_2)$, $b = \text{mcd}(b_1, b_2)$ y $c = \text{mcd}(c_1, c_2)$. Entonces se cumple que $B = a + b + c$. Por ejemplo en la figura anterior se tiene que $a = \text{mcd}(2, 4) = 2$, $b = \text{mcd}(4, 2) = 2$ y $c = \text{mcd}(2 - 4, 4 - 2) = \text{mcd}(-2, 2) = 2$. Luego $B = 2 + 2 + 2 = 6$, es decir que el triángulo tiene 6 puntos en la frontera, como se puede verificar en la figura.

Teorema 25. Si B es el número de puntos enteros de la frontera de un triángulo entonces $B = a + b + c$.

Demostración. Por el Teorema 20 en los segmentos OA , OB y OC hay exactamente $a + 1$, $b + 1$ y $c + 1$ puntos enteros, luego en los tres lados del triángulo hay $a + 1 + b + 1 + c + 1 - 3 = a + b + c$ puntos, es decir $B = a + b + c$. \square

Teorema 26. Sea $\triangle OAB$ un triángulo reticular con exactamente un punto interior, entonces a, b, c, ab, ac y bc dividen a B .

Demostración. Se tiene que $(a_1, a_2) = a(\alpha_1, \alpha_2)$, $(b_1, b_2) = b(\beta_1, \beta_2)$ y $(c_1, c_2) = c(\gamma_1, \gamma_2)$, entonces por el Teorema 10, se tiene que el área de $\triangle OAB$ es:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(\triangle OAB) &= \frac{1}{2} |a_1 b_2 - b_1 a_2| \\
 &= \frac{1}{2} |a \alpha_1 b \beta_2 - b \beta_1 a \alpha_2| \\
 &= \frac{1}{2} |a| |b| |\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2| \\
 &= \frac{1}{2} |a| |b| k \\
 &= \frac{1}{2} a b k
 \end{aligned}$$

donde $k = |\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2|$. Por otra parte, por el Teorema de Pick $\mathcal{A}(\triangle OAB) = \frac{B}{2} + I - 1$, como $I = 1$, entonces $\mathcal{A}(\triangle OAB) = \frac{B}{2}$. Por lo tanto

$$\frac{B}{2} = \frac{1}{2}abk \Rightarrow B = abk$$

Como $k \in \mathbb{Z}$ entonces $a|B$, $b|B$ y $ab|B$. Análogamente, pero tomando como origen a los vértices A y B se obtiene que c, ac, bc dividen a B , quedando demostrado el teorema. \square

Teorema 27. Sea $\triangle OAB$ un triángulo reticular con exactamente B puntos en la frontera y exactamente un punto interior, entonces T divide a $6, 8$ y 9 .

Demostración. Por el Teorema 25 se tiene que $B = a + b + c$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a \geq b \geq c$, luego $a \geq \frac{B}{3}$. Por el teorema

anterior $a|B$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $ak = B$. Como $a \geq \frac{B}{3}$ entonces

$a \geq \frac{ak}{3} \Rightarrow 1 \geq \frac{k}{3}$, así que $k = 1, 2$ o 3 . Si $k = 1$, $a = B$ lo cual no es posible,

entonces $a = \frac{B}{2}$ o $a = \frac{B}{3}$

Caso 1: Si $a = \frac{B}{2}$ entonces $b + c = \frac{B}{2}$, luego $\frac{B}{4} \leq b < \frac{B}{2}$, como b divide a B entonces existe un $t \in \mathbb{Z}$ tal que $bt = B$ entonces $b \geq \frac{bt}{4} \Rightarrow 1 \geq \frac{t}{4}$, así que $t = 1, 2, 3$ o 4 . Si $t = 1$ o $t = 2$, se llega a una contradicción, por lo tanto t puede ser 3 o 4 , es decir que $b = \frac{B}{3}$ o $b = \frac{B}{4}$ y por lo tanto $c = \frac{B}{6}$ o $b = \frac{B}{4}$.

Caso 2: Si $a = \frac{B}{3}$ entonces $b + c = \frac{2B}{3}$, luego $\frac{B}{3} \leq b < \frac{2B}{3}$, nuevamente como b divide a B entonces existe un $t \in \mathbb{Z}$ tal que $bt = B$ es decir $b \geq \frac{bt}{3} \Rightarrow 1 \geq \frac{t}{3}$, así que $t = 1, 2$ o 3 . Si $t = 1$ o $t = 2$, se llega a una contradicción, por lo tanto t debe ser 3 , así que $b = \frac{B}{3}$ y por lo tanto $c = \frac{B}{3}$.

Con los anteriores razonamientos se deduce que $(a, b, c) = \left(\frac{B}{2}, \frac{B}{3}, \frac{B}{6}\right)$ o $\left(\frac{B}{2}, \frac{B}{4}, \frac{B}{4}\right)$ o $\left(\frac{B}{3}, \frac{B}{3}, \frac{B}{3}\right)$, además como $ab|B$ entonces $\frac{B^2}{6}, \frac{B^2}{8}, \frac{B^2}{9}$ dividen a B , análogamente $\frac{B^2}{18}, \frac{B^2}{16}, \frac{B^2}{9}, \frac{B^2}{9}, \frac{B^2}{8}, \frac{B^2}{9}$ dividen a B luego B divide a $6, 8, 9$. \square

Con este último teorema queda prácticamente demostrado el Teorema 24.

Demostración Teorema 24. Si un triángulo reticular tiene B puntos en la frontera y exactamente un punto interior ($I = 1$), entonces $B = 3, 4, 6, 8$ o 9 .

Demostración. Por el teorema anterior B divide a $6, 8$ y 9 , como $B \geq 3$, entonces $B = 3, 4, 6, 8$ o 9 . \square

4.3. Más Propiedades de las Series de Farey

En esta sección se mostrarán dos relaciones que se dan en las series de Farey, una es conocida como la Conjetura de Aaron y la otra es sobre el número de términos de \mathcal{F}_n . Antes de probar la conjetura de Aaron, se presentan las siguientes propiedades.

Teorema 28. Si $\frac{a}{b} \in \mathcal{F}_n$ entonces $\frac{b-a}{b}$ también pertenece a \mathcal{F}_n .

Demostración. Puesto que $\frac{a}{b} \in \mathcal{F}_n$ entonces $\text{mcd}(a, b) = 1$ y $0 \leq a \leq b \leq n$ con $b \neq 0$. Teniendo en cuenta que cualquier divisor común de a y b también dividirá a la diferencia $b - a$, se cumple $\text{mcd}(b - a, b) = \text{mcd}(a, b)$. Por lo tanto $\text{mcd}(b - a, b) = 1$, además como $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1$ entonces

$$0 \leq 1 - \frac{a}{b} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{b-a}{b} \leq 1$$

luego $\frac{b-a}{b} \in \mathcal{F}_n$ \square

Teorema 29 (Conjetura de Aaron). La suma de los numeradores de las fracciones de \mathcal{F}_n es igual a la mitad de la suma de los denominadores

Demostración. Sean $\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_s}{b_s}$ los términos de \mathcal{F}_n , entonces para cada fracción $\frac{a_i}{b_i} \in \mathcal{F}_n$ se tiene que $\frac{b_i - a_i}{b_i} \in \mathcal{F}_n$, por tanto

$$\sum_{i=1}^s a_i = \sum_{i=1}^s (b_i - a_i) \Rightarrow 2 \sum_{i=1}^s a_i = \sum_{i=1}^s b_i \Rightarrow \sum_{i=1}^s a_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s b_i$$

\square

Ejemplo 6. Por ejemplo en \mathcal{F}_5 se tiene que:

$$\mathcal{F}_5 : \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\}$$

Suma de los Numeradores: $0 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 3 + 2 + 3 + 4 + 1 = 19$

Suma de los Denominadores: $1 + 5 + 4 + 3 + 5 + 2 + 5 + 3 + 4 + 5 + 1 = 38$

Entonces claramente se verifica la conjetura de Aaron.

Del Teorema 28 también se deduce la siguiente propiedad.

Teorema 30. La suma de las fracciones de \mathcal{F}_n es igual a la mitad del número de términos.

Demostración. Por el Teorema 28 se tiene que

$$\sum_{i=1}^s \frac{a_i}{b_i} = \sum_{i=1}^s \frac{b_i - a_i}{b_i} \Rightarrow 2 \sum_{i=1}^s \frac{a_i}{b_i} = \sum_{i=1}^s 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^s \frac{a_i}{b_i} = \frac{1}{2}s$$

donde s es el número de términos de \mathcal{F}_n . □

A continuación se presenta una forma de calcular el número de términos de \mathcal{F}_n , para ello se introduce la Función de Euler.

Sean las fracciones $\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$, la idea es calcular cuántas fracciones quedan con denominador n después de simplificarlas. Por ejemplo para $n = 14$

$$\frac{0}{14}, \frac{1}{14}, \frac{2}{14}, \frac{3}{14}, \frac{4}{14}, \frac{5}{14}, \frac{6}{14}, \frac{7}{14}, \frac{8}{14}, \frac{9}{14}, \frac{10}{14}, \frac{11}{14}, \frac{12}{14}, \frac{13}{14}$$

luego de simplificarlas se obtiene:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{14}, \frac{1}{7}, \frac{3}{14}, \frac{2}{7}, \frac{5}{14}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{9}{14}, \frac{5}{7}, \frac{11}{14}, \frac{6}{7}, \frac{13}{14}$$

así las fracciones que quedan con denominador 14 son:

$$\frac{1}{14}, \frac{3}{14}, \frac{5}{14}, \frac{9}{14}, \frac{11}{14}, \frac{13}{14}$$

Es decir que para $n = 14$ hay un total de 6 fracciones, esto se denota por $\phi(14) = 6$. A esta función se le conoce como la Función Phi de Euler. En la siguiente tabla se muestran los primeros diez casos.

Denominador	Fraciones	$\phi(n)$
1	$\frac{0}{1}$	1
2	$\frac{1}{2}$	1
3	$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$	2
4	$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$	2
5	$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$	4
6	$\frac{1}{6}, \frac{5}{6}$	2
7	$\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$	6
8	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$	4
9	$\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$	4
10	$\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}$	4

Como $\phi(n)$ cuenta el número de fracciones de $\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$ que después de simplificar quedan con denominador n , entonces $\phi(n)$ también se puede ver como la cantidad de enteros positivos menores o iguales que n y primos relativos con n . En Teoría de Números se prueba que si el producto $n = \prod_{i=1}^k p_i^{n_i}$ es la representación canónica de un entero positivo n en factores

primos, entonces $\phi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

Ejemplo 7. Como $14 = 2 \cdot 7$ entonces

$$\phi(14) = 14 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 14 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{6}{7}\right) = 6.$$

Como $18900 = 2^2 3^3 5^2 7$, así

$$\begin{aligned} \phi(18900) &= 18900 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \\ &= 18900 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{4}{5}\right) \left(\frac{6}{7}\right) = 4320 \end{aligned}$$

Esta función $\phi(n)$ nos permite calcular la cantidad de términos de \mathcal{F}_n .

Teorema 31. El número de términos de \mathcal{F}_n es igual a:

$$1 + \phi(1) + \phi(2) + \dots + \phi(n-1) + \phi(n)$$

Demostración. Sea $\frac{a}{b} \in \mathcal{F}_n$, como b varía entre 1 y n , entonces del número de fracciones en \mathcal{F}_n con denominador b es $\phi(b)$. Por lo tanto el número de términos de \mathcal{F}_n es $1 + \phi(1) + \phi(2) + \dots + \phi(n-1) + \phi(n)$, el primer término es $\frac{0}{1}$ □

Corolario 2. Sean $\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_s}{b_s}$ los términos de \mathcal{F}_n , entonces

$$2 \sum_{i=1}^s \frac{a_i}{b_i} = 1 + \sum_{i=1}^s \phi(n)$$

4.4. Círculos de Ford

En este apartado se mostrará una forma de representar geoméricamente las series de Farey, dada por el matemático Lester R. Ford (1886 - 1967).

Definición 9. Sea $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ con $\text{mcd}(p, q) = 1$ ubicada sobre el eje x . La circunferencia de radio $\frac{1}{2q^2}$ y tangente al eje x en el punto de coordenadas $\left(\frac{p}{q}, 0\right)$, se denomina *Círculo de Ford*

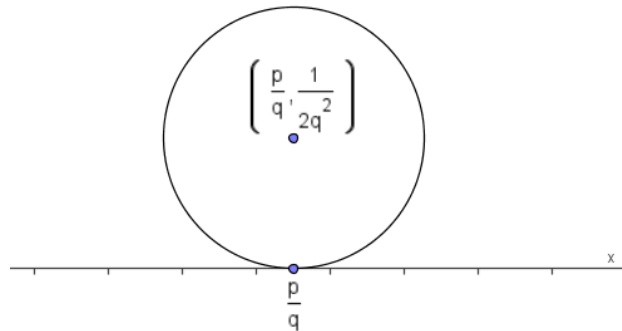


Figura 28: Círculo de Ford

Claramente el Círculo de Ford tiene centro $\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}\right)$, ver figura 28.

Ejemplo 8. En la figura 29 se muestran los círculos de Ford correspondientes a las fracciones $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ y $\frac{2}{1}$

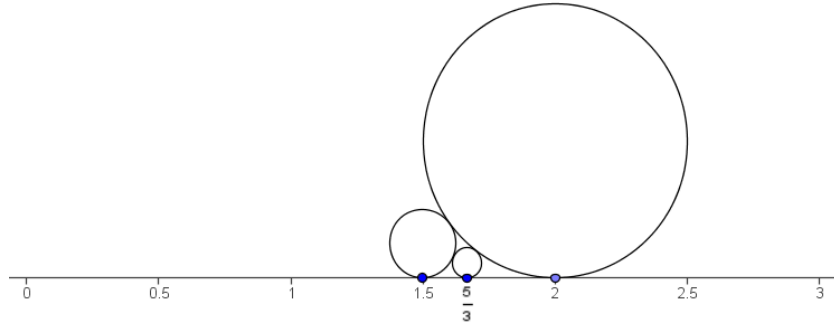


Figura 29: Círculos de Ford

Denotaremos por \mathcal{CF}_n a los círculos de Ford de los términos de la Serie de Farey. Por ejemplo en la figura 30 se muestran los círculos de ford de \mathcal{F}_5 , es decir \mathcal{CF}_5 .

En la figura se observa que las circunferencias de Ford de dos fracciones consecutivas de \mathcal{F}_5 son tangentes. Este hecho en general se cumple para \mathcal{CF}_n .

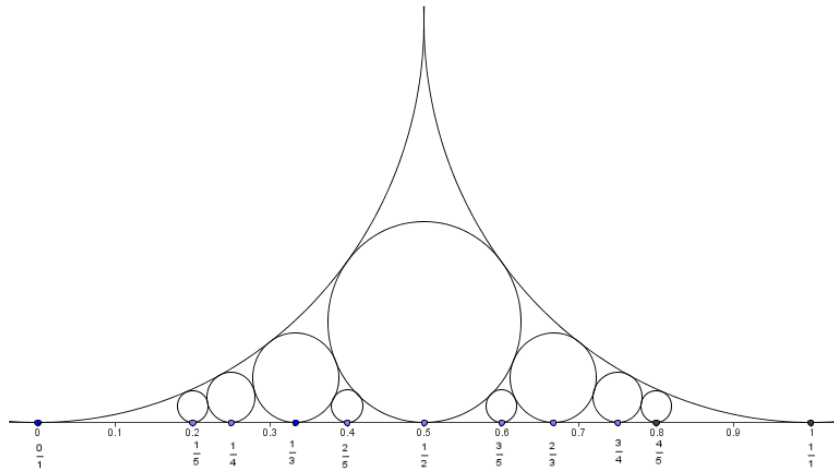


Figura 30: Círculos de Ford de los términos de la Serie de Farey

Teorema 32. Si $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \in \mathcal{F}_n$ y son consecutivas, entonces sus respectivos círculos de Ford son tangentes.

Demostración. Sean $C_1 \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{1}{2b_1^2} \right), C_2 \left(\frac{a_2}{b_2}, \frac{1}{2b_2^2} \right)$ los centros de los respectivos círculos de Ford de $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ y r_1, r_2 los radios de cada una de ellas. Sea A el punto de corte del radio r_2 y la recta paralela al eje x y que pasa por C_1 .

Entonces

$$d(C_1, C_2) = \sqrt{d(C_1, A)^2 + d(A, C_2)^2}$$

Por otro lado

$$d(C_1, A) = \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2 b_1 - b_2 a_1}{b_2 b_1} = \frac{1}{b_2 b_1}$$

ya que $a_2 b_1 - b_2 a_1 = 1$ por el Teorema fundamental de las series de Farey. Además:

$$d(A, C_2) = r_2 - r_1 = \frac{1}{2b_2^2} - \frac{1}{2b_1^2}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} d(C_1, C_2) &= \sqrt{d(C_1, A)^2 + d(A, C_2)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{b_2 b_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2b_2^2} - \frac{1}{2b_1^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{(b_2 b_1)^2} + \left(\frac{1}{2b_2^2}\right)^2 - \frac{1}{2(b_1 b_2)^2} + \left(\frac{1}{2b_1^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2b_2^2}\right)^2 + \frac{1}{2(b_1 b_2)^2} + \left(\frac{1}{2b_1^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2b_2^2} + \frac{1}{2b_1^2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2b_2^2} + \frac{1}{2b_1^2} \\ &= r_1 + r_2 \end{aligned}$$

luego la distancia de los centros es $r_1 + r_2$, es decir que los círculos deben ser tangentes. \square

4.5. Polígono de Farey

Para finalizar el artículo se presentan los Polígonos de Farey, los cuales se definen como sigue.

Definición 10 (Polígono de Farey). *Sea el conjunto de vértices correspondientes a la Serie de Farey \mathcal{F}_n , entonces el polígono de Farey se forma uniendo en orden estos vértices junto con el origen, en cuyo caso se denota \mathcal{P}_n*

Ejemplo 9. En la figura 31 aparece el polígono de Farey \mathcal{P}_5

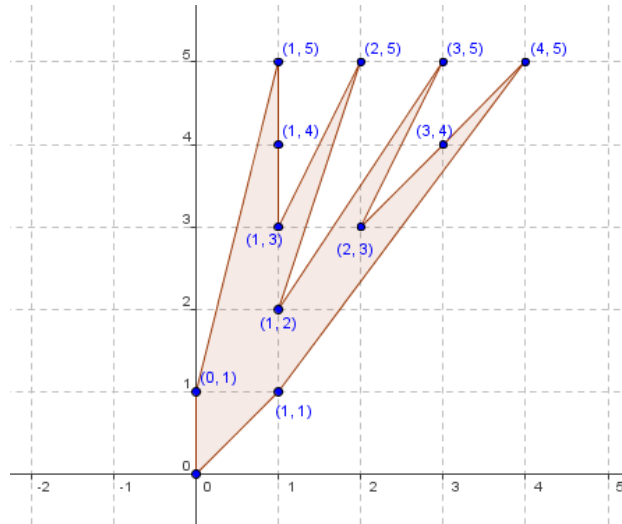


Figura 31: Polígono de Farey \mathcal{P}_5

Teorema 33. El área de \mathcal{P}_n es:

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}_n) = \frac{2 + \phi(1) + \phi(2) + \dots + \phi(n-1) + \phi(n)}{2} - 1$$

Demostración. Por el Teorema 31 el número de términos de \mathcal{F}_n es

$$1 + \phi(1) + \phi(2) + \dots + \phi(n-1) + \phi(n)$$

Esto quiere decir que el número de vértices de \mathcal{P}_n es:

$$2 + \phi(1) + \phi(2) + \dots + \phi(n-1) + \phi(n)$$

sumando el vértice correspondiente al origen.

Por el Teorema 21 todos los vértices de \mathcal{P}_n son visibles, sin ningún vértice interior es decir $I = 0$. Por el Teorema de Pick, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{P}_n) &= I + \frac{B}{2} - 1 \\ &= \frac{2 + \phi(1) + \phi(2) + \dots + \phi(n-1) + \phi(n)}{2} - 1 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 10. Para el polígono \mathcal{P}_5 se obtiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{P}_5) &= \frac{2 + \phi(1) + \phi(2) + \phi(3) + \phi(4) + \phi(5)}{2} - 1 \\ &= \frac{2 + 1 + 1 + 2 + 2 + 4}{2} - 1 \\ &= \frac{12}{2} - 1 = 6 - 1 = 5 \end{aligned}$$

Un artículo interesante en los que se puede encontrar una serie de notas históricas y referencias acerca de las series de Farey, el Teorema de Pick y la conexión entre ellos es [2].

Bibliografía

- [1] BRUCKHEIMER, M. ARCAVI, A. *A Visual Approach to Some Elementary Number Theory*, The Mathematical Gazette, Vol. 79, No. 486, pp. 471-478, 1995.
- [2] BRUCKHEIMER, M. ARCAVI, A. *Farey Series and Pick's Area Theorem*, The Mathematical Intelligencer, Vol. 17, No 4, pp 64-67, 1995.
- [3] CONNOR, J. ROBERTSON, E. *The MacTutor History of Mathematics archive*. Aparece en: <http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Pick.html>.
- [4] DAVIS, T. *Pick's Theorem*, Math-Circle, 2003. Aparece en <http://www.geometer.org/mathcircles/pick.pdf>.
- [5] ELDUQUE, A. *El Teorema de Pick*, Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza, 2007. Aparece en : <http://www.unizar.es/ttm/2006-07/Pick.pdf>.
- [6] FUNKENBUSCH, W. *From Euler's Formula to Pick's Formula Usign and Edge Theorem*, The American Mathematical Monthly, Vol. 81, No. 6, pp. 647-648, 1974.
- [7] GASKELL, R.W., KLAMKIN, M.S., WATSON, P. *Triangulations and Pick's Theorem*, Mathematics Magazine, Vol. 49, No. 1, pp. 35-37, 1976.
- [8] GUERRERO A. *Geometría. Desarrollo Axiomático*, Ecoe Ediciones, Bogotá, 2006.

- [9] JARA, P. RUIZ, C. *El Teorema de Pick*, ESTALMAT–Andalucía, Granada. 2008. Aparece en: <http://www.ugr.es/local/anillos/textos/pick.htm>.
- [10] KOŁODZIEJCZYKA, K. REAYB, J. *Polynomials and spatial Pick-type theorems*, Expositiones Mathematicae, Vol. 26, No.1, pp 41-53, 2008.
- [11] NÁPOLES, J. *La fórmula de Euler y la topología* Aparece en: <http://www.uaq.mx/ingenieria/publicaciones/eureka/n19/en1905.pdf>
- [12] NIVEN, I. ZUCKERMAN, H.S. *Lattice Points and Polygonal Area*, The American Mathematical Monthly, Vol. 74, No. 10, pp. 1195-1200, 1967.
- [13] O'LOUGHLIN, D. *The Scarcity of Regular Polygons on the Integer Lattice*, Mathematics Magazine, Vol. 75, No. 1, pp. 47-51, 2002.



Escuela de Matemáticas
Universidad Sergio Arboleda
Bogotá, Colombia
jolura1@gmail.com

Publicat el 27 d'octubre de 2010