O teorema de Riemann-Roch

Joachim Kock

1 Riemann-Roch para curvas e superfícies

Seja X uma curva lisa projetiva de gênero g.

1.1 Teorema de Riemann-Roch para curvas.— *Seja D um divisor em X. Então*

$$\dim H^0(X, L(D)) - \dim H^0(X, \omega_X \otimes L(D)\check{}\,) = \deg D + 1 - g$$

Por dualidade de Serre, $H^0(X, \omega_X \otimes L(D)\check{}\,)$ é dual a $H^1(X, L(D))$, e podemos escrever a fórmula como

$$\dim H^0(X, L(D)) - \dim H^1(X, L(D)) = \deg D + 1 - g$$

ou ainda, em termos da característica de Euler:

$$\chi(L(D)) = \deg D + 1 - g$$

Não há informação relevante no divisor que não esteja também no fibrado em retas correspondente, portanto podemos formular o resultado diretamente em termos de um fibrado em retas (ou seja, um feixe inversível) L e agora a fórmula fica: $\chi(L) = \deg L + 1 - g$.

1.2 Corolário. — *Vale* $\deg \omega_X = 2g - 2$. *Com efeito, ponha* $L = \omega_X$, *e lembre que* $\dim H^0(X, \omega_X) = g$, *e* $H^1(X, \omega_X) = 1$.

Uma primeira generalização é descobrir que vale não exclusivamente para fibrados em retas; para um fibrado vetorial geral, de posto r, temos

$$\chi(E) = \deg E + r(1 - g)$$

onde $\deg E := \deg \bigwedge^r E$.

Em termos de classes de Chern: $\deg E = \deg \bigwedge^r E = \int c_1(\bigwedge^r E) = \int c_1(E)$, e a fórmula fica

$$\chi(E) = \int_X c_1(E) + r(1 - g). \qquad (*)$$ X(E)

1.3 Teorema de Riemann-Roch para superfícies.— *Seja X uma superfície lisa projetiva, e seja D um divisor em X. Então*

$$\chi(L(D)) = \tfrac{1}{2} D.(D - K) + 1 + p_a$$

onde K é o divisor canônico, i.e. correspondente ao fibrado em retas canônico ω_X.

Explicação/tradução para linguagem de classes de Chern: O inteiro $D.(D-K)$ é na verdade
$$\int_X c_1(L)c_1(L\otimes\omega_X{}^{\vee})$$
Lembrando agora das regras para classes de Chern, achamos
$$\begin{aligned} c_1(L\otimes\omega_X{}^{\vee}) &= c_1(L)+c_1(\omega_X{}^{\vee}) \\ &= c_1(L)-c_1(\omega_X) \\ &= c_1(L)-c_1(\textstyle\bigwedge^2\Omega^1_X) \\ &= c_1(L)-c_1(\Omega^1_X) \\ &= c_1(L)+c_1(T_X) \end{aligned}$$
e a fórmula agora se escreve como
$$\chi(L)=1+p_a+\tfrac{1}{2}\int_X c_1(L)^2+c_1(L)c_1(T_X).$$

Nos dois casos, curvas e superfícies, a fórmula tem no lado esquerdo a característica de Euler, e no lado direito dados numéricos envolvendo classes de Chern do fibrado, e dados numéricos da própria variedade e seu fibrado tangente, gênero e tal.

Na generalização para dimensão maior, os dados numéricos do fibrado serão resumidos elegantemente no *caráter de Chern*, enquanto *a classe de Todd* do fibrado tangente vai codificar todos os dados numéricos da variedade.

2 Caracteres de Chern e classes de Todd

2.1 O caráter de Chern. — Dado um fibrado E com raízes $x_1,\dots,x_r$, ponha $p_k := x_1^k+\cdots+x_r^k$. Então o *caráter de Chern* é o operador em $A_*(X)\otimes\mathbb{Q}$ dado por
$$\mathrm{ch}(E) := \sum_{k=0}^{\infty} p_k/k! = \sum_{i=1}^{r}\exp(x_r)$$

2.2 Exemplo. — Para L um fibrado em retas, $p_k = c_1^k := c_1(L)^k$ e temos
$$\mathrm{ch}(L)=\exp(c_1)=1+c_1+c_1^2/2+c_1^3/6+\cdots$$
E em geral você pode verificar que para um fibrado E de posto r vale
$$\mathrm{ch}(E)=r+c_1+\tfrac{1}{2}\big(c_1^2-2c_2\big)+\tfrac{1}{6}\big(c_1^3-3c_1c_2+c_3\big)+\cdots$$
Já que o caráter de Chern foi definido em termos de raízes, é fácil de verificar que ele é aditivo (feito a característica de Euler):
$$\begin{aligned} &0\to E'\to E\to E''\to 0 \\ \Downarrow\quad & \\ &\mathrm{ch}(E)=\mathrm{ch}(E')+\mathrm{ch}(E'') \end{aligned}$$

Observe ainda a identidade

$$\mathrm{ch}(E \otimes F) = \mathrm{ch}(E) \cdot \mathrm{ch}(F).$$

2.3 A classe de Todd de um fibrado E de posto r, e com raízes de Chern $x_1, \dots, x_r$, é por definição o operador em $A_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ dado por

$$\mathrm{td}(E) := \prod_{i=1}^{r} \frac{x_i}{1 - \exp(-x_i)}$$

2.4 Exemplo. — Para um fibrado E de posto r você verifica que

$$\mathrm{td}(E) = 1 + \tfrac{1}{2} c_1 + \tfrac{1}{12}\big(c_1^2 + c_2\big) + \tfrac{1}{24}\big(c_1 c_2\big) + \cdots$$

Observe que a classe de Todd leva somas em produtos:

$$\begin{gathered} 0 \to E' \to E \to E'' \to 0 \\ \Downarrow \\ \mathrm{td}(E) = \mathrm{td}(E') \cdot \mathrm{td}(E'') \end{gathered}$$

ch-td **2.5 Lema.** — *A relação fundamental entre classes de Chern e de Todd é*

$$c_r(E) \cdot \mathrm{td}(E)^{-1} = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \, \mathrm{ch}\big(\textstyle\bigwedge^i E^{\vee}\big).$$

2.6 Exemplo. — No caso muito simples onde o fibrado tem posto 1, o lema afirma que $c_1(L) \cdot \mathrm{td}(L)^{-1} = \mathrm{ch}(\bigwedge^0 L^{\vee}) - \mathrm{ch}(\bigwedge^1 L^{\vee})$. Verifiquemos: o lado esquerdo dá $c_1 \cdot \frac{1-\exp(-c_1)}{c_1} = 1 - \exp(-c_1)$, enquanto o lado direito dá $\mathrm{ch}(\mathcal{O}_X) - \mathrm{ch}(L^{\vee}) = 1 - \exp(-c_1)$, e a igualdade foi estabelecida.

todd(T)dePn **2.7 Exemplo.** — A classe de Todd do fibrado tangente de $\mathbb{P}^n$ é

$$\mathrm{td}(T_{\mathbb{P}^n}) = \left(\frac{h}{1 - \exp(-h)} \right)^{n+1},$$

como segue da seqüência de Euler e da multiplicatividade da classe de Todd.

3 Teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch

3.1 Teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch. (HRR) — *Seja E um fibrado vetorial sobre uma variedade projetiva não-singular X, e seja T_X o fibrado tangente. Então*

$$\chi(E) = \int_X \mathrm{ch}(E)\, \mathrm{td}(T_X).$$

3.2 Exemplo. — Seja X uma curva de gênero g, e aplique a fórmula no caso $E = \mathcal{O}_X$:

$$\begin{aligned} 1 - g = \chi(\mathcal{O}_X) &= \int_X \big(1 + c_1(\mathcal{O}_X)\big)\big(1 + \tfrac{1}{2}c_1(T_X)\big) \\ &= \int_X \tfrac{1}{2}c_1(T_X) \end{aligned}$$

donde concluimos

$$\int_X c_1(T_X) = 2 - 2g,$$

como já sabíamos.

3.3 Exemplo. — Agora para o caso geral de um fibrado E sobre X, de posto r:

$$\begin{aligned} \chi(E) &= \int_X \big(r + c_1(E)\big)\big(1 + \tfrac{1}{2}c_1(T_X)\big) \\ &= \int_X c_1(E) + r\tfrac{1}{2}c_1(T_X) \\ &= \int_X c_1(E) + r(1-g) \end{aligned}$$

que é exatamente a fórmula $(*)$ de Riemann-Roch para curvas.

3.4 Exemplo. — Seja X uma superfície, e seja L um fibrado em retas nela. Então

$$\chi(L) = \int_X \Big(1 + c_1(L) + \tfrac{1}{2}\big(c_1(L)^2 - 2c_2(L)\big)\Big)\Big(1 + \tfrac{1}{2}c_1(T_X) + \tfrac{1}{12}\big(c_1(T_X)^2 + c_2(T_X)\big)\Big)$$

Agora só termos de grau 2 interessam, e $c_2(L) = 0$:

$$= \int_X \tfrac{1}{2}\big(c_1(L)^2 + c_1(L)c_1(T_X)\big) + \tfrac{1}{12}\big(c_1(T_X)^2 + c_2(T_X)\big).$$

Considerando por um momento o caso particular $L = \mathcal{O}_X$, concluimos $1 + p_a = \chi(\mathcal{O}_X) = \int \frac{1}{12}\big(c_1(T_X)^2 + c_2(T_X)\big)$ e com esta informação concluimos no caso geral:

$$\chi(L) = 1 + p_a + \int_X \tfrac{1}{2}\big(c_1(L)^2 + c_1(L)c_1(T_X)\big)$$

que é o Riemann-Roch para superfícies.

A generalização de Grothendieck do HRR consiste em relativizar: em vez de considerar apenas a variedade isoladamente, consideramos um morfismo $f : X \to Y$ entre duas variedades. Então o papel da integral será desempenhado pela imagem direta f_*. Isto pode aparecer difícil, já que a imagem direta de um feixe localmente livre em geral não é mais localmente livre. Mas sobre uma variedade não-singular pelo menos admite uma *resolução* localmente livre. Isto motiva a introdução do *grupo de Grothendieck*.

4 Grupo de Grothendieck

4.1 O grupo de Grothendieck de fibrados vetoriais. — Seja X um esquema noetheriano. O *grupo de Grothendieck* de fibrados vetoriais, denotado $K^\circ(X)$, é o grupo abeliano gerado pelos símbolos $[E]$, onde E é um fibrado vetorial sobre X, e cujas relações são

$$[E] = [E'] + [E''] \qquad \text{sempre que } 0 \to E' \to E \to E'' \to 0.$$

A operação de adição é dada pela soma direta. (Ademais, o produto tensorial mune $K^\circ(X)$ de uma multiplicação que faz dele um anel comutativo.)

Em $K^\circ(X)$ tem elementos que não vem de um fibrado vetorial, por exemplo $-[E]$. Isto é necessário para poder usar *resoluções*, como veremos num instante. Por outro lado, fibrados não isomorfosm podem se confudir em $K^\circ(X)$, porque aqui não se distinguem extensões diferentes. Mas isto é conveniente também porque classes de Chern também não distinguem.

4.2 HRR em termos do grupo de Grothendieck. — A característica de Euler é aditiva em seqüências exatas. Quando X é uma variedade completa, define um homomorfismo de grupos $\chi : K^\circ(X) \to \mathbb{Z}$. O caráter de Chern também é aditivo, e temos um outro homomorfismo $\operatorname{ch} : K^\circ(X) \to A(X) \otimes \mathbb{Q}$. As propriedades functoriais do caráter de Chern ficam mais bonitas quando é ajustado pela classe de Todd do fibrado tangente, para X lisa, definimos

$$\begin{aligned} \tau : K^\circ(X) &\longrightarrow A(X) \otimes \mathbb{Q} \\ [E] &\longmapsto \operatorname{ch}(E)\operatorname{td}(T_X) \cap [X] \end{aligned}$$

Agora o HRR pode ser formulado como a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} K^\circ(X) \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\tau"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, hook] \\ A(X) \otimes \mathbb{Q} \arrow[r, "\int"'] & \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

4.3 O grupo de Grothendieck de feixes coerentes, denotado $K_\circ(X)$, é o grupo abeliano cujos símbolos são $[\mathcal{F}]$ (onde $\mathcal{F}$ é um feixe coerente), e cujas relações são

$$[\mathcal{F}] = [\mathcal{F}'] + [\mathcal{F}''] \qquad \text{quando } 0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0.$$

A adição é a soma direta.

Agora, para morfismos próprios, tem um push-forth também: Se $\mathcal{F}$ é um feixe coerente sobre Y, e $f : X \to Y$ é um morfismo próprio (por exemplo um mergulho fechado), então $f_*\mathcal{F}$ é coerente também, mas simplesmente definir $f_*[\mathcal{F}] := [f_*\mathcal{F}]$ não dá certo não porque em geral não respeita as relações: No caso $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ temos em $K_\circ(X)$: $[\mathcal{F}] = [\mathcal{F}'] + [\mathcal{F}'']$, mas f_* não é exato, portanto não necessariamente vale $[f_*\mathcal{F}] = [f_*\mathcal{F}'] + [f_*\mathcal{F}'']$. A definição certa é

$$f_*[\mathcal{F}] := \sum_{i \geq 0} (-1)^i R^i f_* \mathcal{F}.$$

Agora a longa seqüência de higher direct images garante que é bem definido o mapa. (É um fato que todas as imagens diretas superiores são coerentes...)

4.4 Exemplo. — Se $p : X \to \bullet = \operatorname{Spec} k$ é o morfismo estrutural, e $\mathcal{F}$ é um feixe coerente então $p[_*\mathcal{F}] = \sum(-1)^i[R^ip_*\mathcal{F}] = \sum(-1)^i[H^i(X,\mathcal{F})]$, que é a característica de Euler (identificando $K_\circ(\bullet) \simeq \mathbb{Z}$).

4.5 Observação. — Para um mergulho fechado $f : X \hookrightarrow Y$ (que vai ser o nosso caso de estudo), o functor f_* é exato, portanto não há imagens diretas superiores. Logo vale neste caso o chute ingênuo $f_*[\mathcal{F}] = [f_*\mathcal{F}]$.

4.6 Dualidade entre $K^\circ(X)$ e $K_\circ(X)$. — Tem um homomorfismo natural de dualidade $K^\circ(X) \to K_\circ(X)$ que manda um fibrado no seu feixe de seções. Para variedades lisas, este homomorfismo tem inversa: Primeiro fato: numa variedade lisa[1], todo feixe coerente $\mathcal{F}$ tem resolução localmente livre finita $E_\bullet \to \mathcal{F} \to 0$:

$$0 \to E_d \to E_{d-1} \to \ldots \to E_1 \to E_0 \to \mathcal{F} \to 0$$

Então a inversa ao homomorfismo de dualidade é

$$\begin{array}{ccc} K_\circ(X) & \longrightarrow & K^\circ(X) \\ [\mathcal{F}] & \longmapsto & \sum_{i=0}^{d}(-1)^i[E_i] \end{array}$$

Segundo fato: Este mapa não depende da resolução escolhida, e portanto está bem definido, e realmente é a inversa. Logo, para variedades lisas temos $K^\circ(X) \simeq K_\circ(X)$.

Ponhamos $K(X) := K^\circ(X) \simeq K_\circ(X)$.

4.7 HRR em termos de imagens diretas. — Podemos agora formular HRR como Agora o HRR pode ser formulado como a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} K(X) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "\tau_X"'] & K(\bullet) \arrow[d, "\tau_\bullet"] \\ A(X) \otimes \mathbb{Q} \arrow[r, "p_*"'] & A(\bullet) \otimes \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

observando que $A(\bullet) \simeq \mathbb{Z}$ e que $\tau_\bullet$ então é pegar a dimensão de um espaço vetorial.

5 Teorema de Grothendieck-Riemann-Roch

A versão de Grothendieck do teorema de Riemann-Roch afirma que o quadrado comuta, não apenas para o morfism oestrutural de uma variedade completa, mas para qualquer morfismo próprio:

[1]de fato, vale para variedades localmente factoriais, cf. um teorema de Kleiman.

5.1 Teorema de Grothendieck-Riemann-Roch. (GRR) — *Seja X e Y variedades não-singulares e seja $f : X \to Y$ um morfismo próprio. Então o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} K(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\tau_X"'] & K(Y) \arrow[d, "\tau_Y"] \\ A(X) \otimes \mathbb{Q} \arrow[r, "f_*"'] & A(Y) \otimes \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

Ou seja, para todo $\alpha \in K(X)$ vale

$$\boxed{\operatorname{ch}(f_*\alpha)\operatorname{td}(T_Y) \cap [Y] = f_*\big(\operatorname{ch}(\alpha)\operatorname{td}(T_X) \cap [X]\big)}$$

O que vamos provar aqui é que o GRR vale para uma mergulho fechado. A outra parte essencial é mostrar que vale para uma projeção $\mathbb{P}^r \times Y \to Y$.

Se vale para estes dois casos vale também para qualquer morfismo que é composição de tais dois morfismos

$$X \hookrightarrow \mathbb{P}^r \times Y \to Y$$

Ou seja vale para qualquer mrofismo projetivo (a definição de projetivo é justamente essa: ter uma tal decomposição.) Se X é quase-projetiva, tal composição sempre existe.

6 Demonstração do GRR para um mergulho fechado

6.1 GRR em termos do fibrado normal. — Seja $f : X \to Y$ o mergulho em questão, entre duas variedades não-singulares. Então temos a seguinte seqüência exata de fibrados sobre X

$$0 \to T_X \to T_Y \otimes \mathcal{O}_X \to N_X(Y) \to 0.$$

(lembre que $T_Y \otimes \mathcal{O}_X \simeq f^*T_Y$.) A classe de Todd leva soma em produto, logo obtemos

$$\operatorname{td}(f^*T_Y) = \operatorname{td}(T_X)\operatorname{td}(N_X(Y))$$

ou seja,

$$\operatorname{td}(X) = \operatorname{td}(f^*T_Y)\operatorname{td}(N_X(Y))^{-1}$$

O lado direito do enunciado do GRR fica então

$$\begin{aligned} f_*\big(\operatorname{ch}(\alpha)\operatorname{td}(T_X) \cap [X]\big) &= f_*\big(\operatorname{ch}(\alpha)\operatorname{td}(f^*T_Y)\operatorname{td}(N_X(Y))^{-1} \cap [X]\big) \\ &= \operatorname{td}(T_Y) \cap f_*\big(\operatorname{ch}(\alpha)\operatorname{td}(N_X(Y))^{-1} \cap [X]\big) \end{aligned}$$

pela fórmula de projeção.

Agora temos um fator $\operatorname{td}(T_Y)$ nos dois lados do GRR, e só falta provar

$$\operatorname{ch}(f_*\alpha) \cap [Y] = f_*\big(\operatorname{ch}(\alpha)\operatorname{td}(N_X(Y))^{-1} \cap [X]\big). \tag{**}$$ **

Para provar esta igualdade, façamos primeiro o caso simples onde X é mergulhado no seu fibrado normal pela seção nula. Depois, o caso geral será deformado a este modelo...

6.2 Modelo. — Seja X uma variedade, seja N um fibrado vetorial e seja $f : X \to N$ a seção nula. Considere $N \oplus 1$ e o fibrado projetivo associado a ele

$$Y := \mathbb{P}(N \oplus 1) \xrightarrow{p} X$$

N é um aberto em Y, logo temos que $f : X \to Y$, é fechado também.

Observe que N é justamente o fibrado normal de X em Y, ou seja $N_X(Y) = N$.

Demonstração de GRR no caso modelo. Temos $p^*(N \oplus 1) = p^*N \oplus 1$ porque pull-back comuta com soma direta, e $p^*1 = 1$. (O fibrado trivial sempre pulls back ao fibrado trivial.) Temos

$$\begin{tikzcd}
p^*N \oplus 1 \arrow[r] \arrow[d] & N \oplus 1 \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "p"'] & X
\end{tikzcd}$$

Considere a seqüência tautológica, e a seção $\mathcal{O}_Y \to p^*N \oplus \mathcal{O}_Y$ que manda $a \mapsto \mathbf{0} \oplus a$. Induz uma seção (regular) s:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Y(-1) \arrow[r, hook] & p^*N \oplus \mathcal{O}_Y \arrow[r, two heads] & Q \\
& \mathcal{O}_Y \arrow[u] \arrow[ur, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

Observe que o esquema de zeros de s é exatamente X: Com efeito, se num ponto y, a seção é nula, então neste ponto fatora através de $\mathcal{O}_Y(-1)$: quer dizer o ponto y representa justamente a reta $\mathbf{0} \oplus a$, ou seja, y é um ponto em X.

Portanto a seção se encaixa na seqüência

$$Q^\vee \xrightarrow{s} \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X \to 0$$

(Lembre que uma tal seção define um ideal em $\mathcal{O}_Y$ que é a imagem de s, e que o esquema de zeros dela é o definido por este ideal. . .) e uma resolução localmente livre desta seqüência é o complexo de Koszul:

$$0 \to \bigwedge^d Q^\vee \to \ldots \to \bigwedge^2 Q^\vee \to Q^\vee \to \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X \to 0$$

onde d denota o posto de Q (que também é o posto de N).

Seja agora E um fibrado qualquer em X. Tensorizando a seqüência por p^*E e observando pela fórmula de projeção para fibrados que $f_*\mathcal{O}_X \otimes p^*E = f_*\big(\mathcal{O}_X \otimes f^*p^*E\big) = f_*E$ obtemos a seguinte resolução de f_*E:

$$0 \to \bigwedge^d Q^\vee \otimes p^*E \to \ldots \to \bigwedge^2 Q^\vee \otimes p^*E \to Q^\vee \otimes p^*E \to p^*E \to f_*E \to 0$$

Então no grupo de Grothendieck,

$$f_*[E] = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i [\bigwedge^i Q^\vee \otimes p^*E],$$

logo podemos calcular $\mathrm{ch}(f_* E)$, por aditividade, e pela fórmula 2.5:

$$\mathrm{ch}(f_* E) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \,\mathrm{ch}(\textstyle\bigwedge^i Q^{\check{}}) \,\mathrm{ch}(p^* E) = \mathrm{td}(Q)^{-1} \,\mathrm{ch}(p^* E) \cdot c_d(Q).$$

Agora podemos verificar $(**)$: Aplicando a fórmula fundamental $c_d(Q) \cap [Y] = [X] = [f_* X]$, obtemos

$$\mathrm{ch}(f_* E) \cap [Y] = \mathrm{td}(Q)^{-1} \,\mathrm{ch}(p^* E) \cap [f_* X]$$

e então, pela fórmula de projeção

$$\begin{aligned} &= f_*\big((\mathrm{td}(f^* Q)^{-1} \,\mathrm{ch}(f^* p^* E)) \cap [X]\big) \\ &= f_*\big(\,\mathrm{td}(N)^{-1} \,\mathrm{ch}(E) \cap [X]\big). \end{aligned}$$

Aqui foi usado que $f^* p^* E = E$, já que f é seção para p. Falta estabelecer que $f^* Q = N$: Com efeito, pulling back via f a seqüência tautológica

$$\mathcal{O}_Y(-1) \hookrightarrow p^* N \oplus \mathcal{O}_Y \twoheadrightarrow Q$$

o fibrado do meio fica $N \oplus \mathcal{O}_X$; o lado esquerdo, $f^* \mathcal{O}_Y(-1)$ é o fibrado trivial, porque sobre Y num ponto y, é a reta de $p^* N \oplus \mathcal{O}_Y$ que corresponde ao ponto, e quando este ponto está em X, então a parte $p^* N$ é zero, e só tem a parte trivial $\mathcal{O}_Y$. Segue daí que $f^* Q = N$. □

Demonstração de GRR para um mergulho fechado qualquer. — Seja $f : X \to Y$ um mergulho fechado. Sendo ambas X e Y não-singulares, o mergulho é regular, portanto o cone normal é igual ao fibrado normal. Temos então a deformação ao fibrado normal N, tal que o mergulho $f : X \to Y$ se deforma no mergulho seção nula $\overline{f} : X \to \mathbb{P}(N \oplus 1)$, que é o modelo.

A situação é a seguinte: o espaço total da deformação M é a explosão de $Y \times \mathbb{P}^1$ ao longo de $X \times \{\infty\}$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\overline{f}"] \arrow[dr] \arrow[dd, "i_\infty"'] & & M_\infty = \widetilde{Y} + \mathbb{P}(N \oplus 1) \arrow[dl] \arrow[dd, "j_\infty"] \\
& \{\infty\} \arrow[dd] & \\
X \times \mathbb{P}^1 \arrow[rr, "F"] \arrow[dr] & & M \arrow[dl, "\varrho"] \\
& \mathbb{P}^1 & \\
X \arrow[uu, "i_0"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & M_0 = Y \arrow[uu, "j_0"'] \arrow[dl] \\
& \{0\} \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

Aqui, sendo $\pi : M \to Y \times \mathbb{P}^1$ o mapa da explosão, denote por ϱ a composição $M \xrightarrow{\pi} Y \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$. Então temos $M_0 = \varrho^{-1}(\{0\})$ e $M_\infty = \varrho^{-1}(\{\infty\})$. Denote por q a projeção $M \to Y \times \mathbb{P}^1 \to Y$. Finalmente seja $p : X \times \mathbb{P}^1 \to X$ a projeção.

Seja E um fibrado vetorial sobre X; queremos provar que $\operatorname{ch}(f_*E)\cap[Y] = f_*\big(\operatorname{td}(N)^{-1}\operatorname{ch}(E)\cap[X]\big)$. Primeiro trabalhamos em M, depois passaremos por q_* para Y. Vamos calcular então $j_{0*}\big(\operatorname{ch}(f_*E)\cap[Y]\big)$: Primeiro devemos resolver f_*E.

Considere o pull-back p^*E. Seja $G_\bullet \to F_*p^*E \to 0$ uma resolução localmente livre, em M. Então, já que ϱ é plano, quando restringimos a uma fibra, continua exata e continua localmente livre. Logo temos também resoluções

$$\begin{aligned} j_0^*G_\bullet &\to j_0^*F_*p^*E \to 0 \\ j_\infty^*G_\bullet &\to j_\infty^*F_*p^*E \to 0. \end{aligned}$$

Agora os quadrados do diagrama são cartesianos, sendo apenas *base change* dos morfismos verticais no meio, então é um fato que imagens direta e inversa comutam assim: $j_0^*F_* = f_*i_0^*$ (e também $j_\infty^*F_* = \overline{f}_*i_\infty^*$). Quer dizer, $j_0^*F_*p^*E = f_*i_0^*p^*E = f_*E$. E também $j_\infty^*F_*p^*E = \overline{f}_*E$. Ou seja, temos resolução $j_0^*G_\bullet \to f_*E \to 0$. E outra resolução $j_\infty^*G_\bullet \to \overline{f}_*E \to 0$.

Convenção: para qualquer complexo de feixes localmente livres $K_\bullet$, escrevemos $\operatorname{ch}(K_\bullet)$ para denotar $\sum(-1)^i\operatorname{ch}(K_i)$. Calculamos

$$\begin{aligned} j_{0*}\big(\operatorname{ch}(f_*E)\cap[Y]\big) &= j_{0*}\big(\operatorname{ch}(j_0^*G_\bullet)\cap[Y]\big) \\ &= \operatorname{ch}(G_\bullet)\cap j_{0*}[Y] \\ &= \operatorname{ch}(G_\bullet)\cap[M_0] \end{aligned}$$

mas observe que $[M_0]$ é racionalmente equivalente a $[M_\infty]$ porque a diferença é justamente o divisor $[\operatorname{div}(\varrho)]$. Logo,

$$\begin{aligned} &= \operatorname{ch}(G_\bullet)\cap[M_\infty] \\ &= \operatorname{ch}(G_\bullet)\cap\big(j_{\infty*}[\mathbb{P}(N\oplus 1)] + j_{\infty*}[\widetilde{Y}]\big) \\ &= j_{\infty*}\big(\operatorname{ch}(j_\infty^*G_\bullet)\cap[\mathbb{P}(N\oplus 1)]\big) + j_{\infty*}\big(\operatorname{ch}(j_\infty^*G_\bullet)\cap[\widetilde{Y}]\big) \\ &= j_{\infty*}\big(\operatorname{ch}(\overline{f}_*E)\cap[\mathbb{P}(N\oplus 1)]\big) + j_{\infty*}\big(\operatorname{ch}(\overline{f}_*E)\cap[\widetilde{Y}]\big) \end{aligned}$$

Aqui falta o argumento porquê $\operatorname{ch}(\overline{f}_*E)\cap[\widetilde{Y}] = 0$?????????. É porque a imagem de $\overline{f}$ é disjunta de $\widetilde{Y}$... Assumindo este fato:

$$\begin{aligned} &= j_{\infty*}\big(\operatorname{ch}(\overline{f}_*E)\cap[\mathbb{P}(N\oplus 1)]\big) \\ &= j_{\infty*}\overline{f}_*\big(\operatorname{td}(N)^{-1}\operatorname{ch}(E)\cap[X]\big) \end{aligned}$$

pelo resultado estabelecido para o modelo. Tomando agora q_* estabelece agora o resultado prometido, porque $q_*j_{\infty*}\overline{f}_* = q_*F_*i_{\infty*} = f_*p_*i_{\infty*} = f_*$:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(f_*E)\cap[Y] &= q_*j_{0*}\big(\operatorname{ch}(f_*E)\cap[Y]\big) \\ &= q_*j_{\infty*}\overline{f}_*\big(\operatorname{td}(N)^{-1}\operatorname{ch}(E)\cap[X]\big) \\ &= f_*\big(\operatorname{td}(N)^{-1}\operatorname{ch}(E)\cap[X]\big) \end{aligned}$$

□

7 GRR para uma projeção

7.1 Exemplo. — O grupo de Grothendieck de $\mathbb{P}^n$ é gerado por $[\mathcal{O}(d)]$, para $0 \le d \le n$. Ou seja, como grupos abstratos, $K(\mathbb{P}^n) \simeq \mathbb{Z}^{n+1}$. A demonstração deste fato segue por indução sobre a dimensão: um ponto claramente tem grupo de Grothendieck igual a $\mathbb{Z}$; em geral uma curva C tem grupo de Grothendieck $K(C) \simeq \mathbb{Z} \oplus \operatorname{Pic}(C)$, e assim por diante.

7.2 Exemplo. — Para $d \ge 0$, calculemos $\chi(\mathcal{O}(d))$ em $\mathbb{P}^n$:

$$\chi(\mathcal{O}(d)) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d))$$

mas lembrando que $\mathcal{O}(d)$ só tem cohomologia em dimensão 0 e n, e usando dualidade de Serre, obtemos

$$\begin{aligned} &= \dim H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) + (-1)^n \dim H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-d-n-1)) \\ &= \binom{n+d}{n} + 0, \end{aligned}$$

já que $d \ge 0$.

7.3 Demonstração do HRR no caso $X = \mathbb{P}^n$. — Pelos exemplos anteriores basta verificar

$$\int_{\mathbb{P}^n} \operatorname{ch}(\mathcal{O}(d)) \operatorname{td}(T_{\mathbb{P}^n}) = \binom{n+d}{n}.$$

Pelas definições, e pelo exemplo 2.7, o lado esquerdo fica

$$= \int_{\mathbb{P}^n} \exp(dh) \left(\frac{h}{1 - \exp(-h)} \right)^{n+1},$$

onde $h := c_1(\mathcal{O}(1))$. Esta expressão se calcula assim (cf. Fultão 15.1.4): procura-se o coeficiente de h^n do integrante, faça uma substituição e sai... ???

7.4 Observação. — Para provar GRR para X quase-projetiva não é muito mais difícil: Se X é quase-projetiva, então $f : X \to Y$ fatora em $X \xrightarrow{h} \mathbb{P}^n \times Y \xrightarrow{g} Y$, e então h é um mergulho fechado (caso este que já foi provado) e a demonstração para g é praticamente idêntica à do caso HRR para $\mathbb{P}^n$.

8 Comentários

8.1 Para quê serve o Riemann-Roch? — Em conjunto com teoremas de anulação...