Le nombre de coniques 5-fois tangentes à une courbe plane générique (d'après A. Gathmann)

Exposé par

Joachim Kock, UNSA

le 7 mars 2002

Résumé

Ce problème énumératif a récemment été résolu par A. Gathmann [2] en utilisant la théorie de Gromov-Witten. La motivation est le cas où la courbe est une sextique. Dans ce cas le nombre des coniques est aussi le nombre des courbes rationnelles 5-nodales sur la surface K3 qui est le recouvrement double du plan ramifié le long la sextique.

Le principal ingrédient de la démonstration sont les espaces de Gathmann et ses invariant de Gromov-Witten relatifs. Ce sont des sous-espaces des espaces de Kontsevich qui paramétrisent les applications stables avec certaines multiplicités de contact avec une hypersurface. Les invariants GW relatifs sont les nombres d'intersection des classes tautologiques sur ces espaces. Ils peuvent être calculés par des récursions qui reflètent la construction des espaces.

Hélas, les espaces de Gathmann ont souvent des composantes de dimension excessive, rendant difficile l'interprétation énumérative des invariants relatifs. Pour le présent problème, l'invariant abstrait reçoit des contributions de certaines configurations de droites doubles bitangentes. Pour déterminer ces contributions, on fait quelques pas en arrière dans la construction inductive des espaces de modules, afin de saisir les mauvaises composantes au moment où elles naissent, et détecter leurs multiplicités moyennant des calculs en coordonnées locales...

Sommaire

1 Le problème et sa motivation

Soit S une courbe lisse générique dans $\mathbb{P}^2$. On demande :

Combien de coniques (nondégénérées) sont 5-fois tangentes à S ?

La réponse dépend du degré de S. Si S est une courbe sextique, alors la réponse est

$$70\,956.$$

En général pour degré d, la réponse est le polynôme

$$n_d = \frac{1}{5!}\, d\,(d-3)\,(d-4)$$
$$(d^7 + 12d^6 - 18d^5 - 540d^4 + 251d^3 + 5712d^2 - 1458d - 14580).$$

La motivation pour ce problème est le cas de degré 6, ce nombre est aussi le nombre de courbes rationnelles 5-nodales dans une surface K3. . .

Surfaces K3

Soit X une surface K3, et soit $\mathrm{D} \subset \mathrm{X}$ une courbe lisse de genre g.
Par Riemann-Roch, $\dim |\mathrm{D}| = g$.

Chaque nœud imposé réduit la dimension, donc on espère un nombre fini de courbes rationnelles (g-nodales) dans le système.

En fait, le nombre est toujours fini : s'il y avait une infinité de courbes rationnelles, on pourrait construire à partir d'elle une $\mathbb{P}^1$-fibration Y avec un morphisme birationnel $\mathrm{Y} \dashrightarrow \mathrm{X}$
— contradiction avec la condition K3.

Donc il y a un nombre fini de courbes rationnelles dans $|\mathrm{D}|$.
On voudrais les compter.

Pour compter les courbes rationnelles dans $|\mathrm{D}|$, on fait d'abord une assomption de primitivité :

On suppose que $\operatorname{Pic}\mathrm{X}$ est engendré par D.

(C'est-à-dire que (X, D) est une K3 polarisée de type g.)

Soit n_g le nombre de courbes rationnelles (g-nodales) dans $|\mathrm{D}|$.

Theorème (1.1) *(Yau-Zaslow, Beauville, Göttsche…)*

$$\begin{aligned}\sum n_g\, q^g &= \prod_{g=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^g)^{24}} \\ &= 1 + 24q + 324q^2 + 3200q^3 + 25650q^4 + 176256q^5 + \ldots\end{aligned}$$

Donc, par exemple, si (X, D) est de type 2, alors il y a 324 courbes rationnelles 2-nodales dans $|\mathrm{D}|$.

Les premiers nombres sont classiques.

Le système |D| envoie X dans $\mathbb{P}^g$.

Pour $g = 2$, ce n'est pas une immersion, c'est un morphisme 2:1 branché le long une courbe sextique $S \subset \mathbb{P}^2$.

Le système linéaire |D| est le pull-back des droites de $\mathbb{P}^2$. Une courbe dans |D| a un point double exactement si la droite image est tangente à S, et elle a deux points doubles si et seulement si la droite est une bitangente de S.

Donc le nombre $n_2 = 324$ apparaît comme le nombre de bitangentes d'une courbe sextique.

De la même façon, le nombre $n_3 = 3200$ est le nombre de plans tri-tangents à une surface quartique dans $\mathbb{P}^3$ (calculé par Salmon).

On peut demander maintenant qu'est-ce qui se passe quand la classe de D n'est pas primitive; quand il existe des courbes réductibles ou non-réduites dans $|\mathrm{D}|$.

Le premier cas est le système $|2\mathrm{D}|$ pour $g = 2$. Les courbes dans $|2\mathrm{D}|$ sont les pull-backs des coniques planes. Par Riemann-Hurwitz, le genre de la courbe générale est 5. (Comme la dimension du système des coniques.)

Si la formule de Yau-Zaslow était vraie pour ce cas non-primitif, il y aurait 176 256 courbes rationnelles dans $|2\mathrm{D}|$...

Pourtant, parmi les courbes il y a des courbes réductibles ou non-réduites : par exemple, si C est une courbe rationnelle dans $|\mathrm{D}|$, alors 2C est une courbe "rationnelle" dans $|2\mathrm{D}|$.

Ce qu'on veut c'est compter les courbes rationnelles honnêtes : les irréductibles, 5-nodales.

On voit facilement qu'il y en a une pour chaque conique 5-fois tangentes à S, et pas d'autres. Donc le nombre 70 956, solution du problème des coniques, est aussi la solution pour le premier problème non-primitif, auquel la formule de Yau-Zaslow ne peut pas se prononcer.

2 Les espaces de Gathmann

Au lieu d'utiliser $\mathbb{P}^5$ comme espace de paramètres des coniques, on utilise les espaces de Kontsevich des application stables. L'espace $\overline{\mathrm{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \beta)$ est une compactification de l'espace

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\mu} \mathbb{P}^r & & \mu_*[\mathbb{P}^1] = \beta \\ \quad \in & & \\ p_i & & n \text{ points marqués distincts} \end{array} \right\}$$

Les top intersections intéressantes (les invariants de Gromov-Witten) sont calculables par des recursions.

On va imposer une condition sur chaque marque. Une virtue de ces espaces est que les marques ne coïncident jamais. Si deux marques s'approchent, une nouvelle composante apparaît qui prends les deux marques.

Description de $\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{S}}_{\mathbf{m}}(\mathbb{P}^r, \beta)$, et la formule de Gathmann.

Soit $\mathrm{S} \subset \mathbb{P}^r$ une hypersurface lisse générique.

Les espaces de Gathmann sont des sous-espaces de $\overline{\mathrm{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \beta)$ formés par les applications stables qui ont certains contacts avec S.

Soit $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ un vecteur de multiplicités.

Idéalement, l'espace $\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{S}}_{\mathbf{m}}(\mathbb{P}^r, \beta)$ est formé par toutes les applications stables qui ont ordre de contact m_i avec S dans la marque p_i:

$$\{\mu \mid \mu^*\mathrm{S} \geq \sum m_i p_i\}$$

Or, à la frontière de $\overline{\mathrm{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \beta)$ où les applications stables ont source réductible, il peut arriver que une composante entière s'applique dans S. Ici, la description naïve ne marche pas.

Soit C_0 une composante de la source C, telle que $\mu(\mathrm{C}_0) \subset \mathrm{S}$. Soit $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_v$ les autres composantes de C qui intersectent C_0 dans des points q_j.

Alors on peut se demander quelle est l'ordre de contact de C_j avec S dans la marque q_j. Dénotons ce nombre a_j.

Maintenant la critère précise pour appartenir à $\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{S}}_{\mathbf{m}}(\mathbb{P}^r, \beta)$ est :

- Pour la partie où $\mu^{-1}\mathrm{S}$ est fini, on a $\mu^*\mathrm{S} \geq \sum m_i p_i$
- Pour les parties $\mathrm{C}_0 \subset \mu^{-1}\mathrm{S}$, on a

$$\beta_0 \cdot \mathrm{S} + \sum_j a_j \geq \sum_{p_i \in \mathrm{C}_0} m_i$$

Proposition (2.1) *Pour* $\mathrm{S} = \mathrm{H} \subset \mathbb{P}^r$ *un hyperplan, l'espace* $\overline{\mathrm{M}}_{\mathbf{m}}^{\mathrm{H}}(\mathbb{P}^r, \beta)$ *est irréductible. C'est l'adhérence des courbes honnêtes.*

Dans ce cas il y a une autre description qui est utile pour l'information quantitative. Chaque espace est un diviseur dans l'espace précédent, et on peut le réaliser comme schéma des zéros d'une section d'un fibré en droites dont on connait la classe de Chern.

On a la famille universelle

$$
\begin{tikzcd}
\overline{\mathrm{U}}_{0,n}(\mathbb{P}^r,\beta) \arrow[r, "\boldsymbol{\mu}"] \arrow[d, shift left, "\pi"] & \mathbb{P}^r \\
\overline{\mathrm{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r,\beta) \arrow[u, shift left, "\sigma_i"]
\end{tikzcd}
$$

Une application a contact d'ordre m_n+1 avec $\mathrm{H}=\mathrm{Z}(f)$ à la marque p_n si le pullback $\boldsymbol{\mu}^*f \in \boldsymbol{\mu}^*\mathcal{O}(1)$ s'annule à ordre m_n+1 à p_n. C'est-à-dire que tous les dérivés de la section jusqu'à ordre m_n s'annulent à p_n. Ce lieu, c'est le schéma des zéros de la section

$$\varphi_n^{(m_n+1)} := \sigma_n^* \partial_\pi^{m_n} \mu^* f \in \sigma_n^* \mathrm{J}_\pi^{m_n} \mu^* \mathcal{O}(1).$$

où $\mathrm{J}_\pi^{m_n}$ dénote les partes principales relatives au morphisme π — dérivation le long les fibres.

Hélas, ça ne marche pas bien à la frontière.

Mais en chaque pas, le schéma des zéros a la dimension espérée, et on peut jeter les composantes qu'on ne veut pas. Les composantes qu'on ne veut pas sont décrites (négativement) par la critère générale.

Pour jeter une composante, il faut savoir avec quelle multiplicité la section s'annule le long elle. Les composantes sont formées par des applications stables comme décrite dans la critère, sauf que la règle n'est pas satisfait. Mais dans cette notation, la multiplicité d'une composante est

$$\prod_{j=1}^{v} a_j.$$

Prouver ça est assez difficile. Gathmann a fait ça utilisant des techniques de Ravi Vakil.

Dans le cas d'une hypersurface générale, l'espace est construit comme ça :

Utiliser le système complète $|\mathrm{S}|$ pour plonger $\mathbb{P}^r \hookrightarrow \mathbb{P}^{\mathrm{N}}$. Alors l'espace est défini comme le pullback

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{S}}_{\mathbf{m}}(\mathbb{P}^r, \beta) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{H}}_{\mathbf{m}}(\mathbb{P}^{\mathrm{N}}, d\beta) \arrow[d, hook] \\
\overline{\mathrm{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^r, \beta) \arrow[r, hook] & \overline{\mathrm{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^{\mathrm{N}}, d\beta).
\end{tikzcd}$$

Comme schéma, c'est l'intersection schématique. Comme classe de cycles, c'est l'intersection raffinée de Fulton.

$\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{S}}_{\mathbf{m}}(\mathbb{P}^r, \beta)$ a souvent des composantes de dimension excessive.

Au niveau schématique, la situation est beaucoup plus compliquée pour une hypersurface générale que pour le hyperplan. Mais dans le groupe de Chow, la formule de Gathmann est toujours valable. Elle se prononce alors sur les classes virtuelles des espaces.

Connaissant la top Chern classe du fibré

$$c_{top}(\sigma_n^* \mathrm{J}_\pi^{m_n} \mu^* \mathcal{O}(\mathrm{S})) = \nu_n^* \mathrm{S} + m_n \boldsymbol{\psi}_n.$$

la formule s'écrit

$$(\nu_n^* \mathrm{S} + m_n \boldsymbol{\psi}_n) \cap [\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{S}}_{\mathbf{m}}(\mathbb{P}^r, \beta)] = [\overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{S}}_{\mathbf{m}+}(\mathbb{P}^r, \beta)] \ + \ \text{corrections}$$

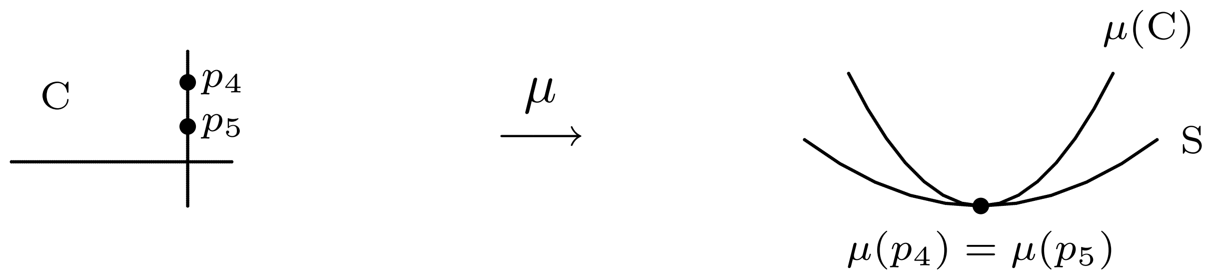
En fait, la formule est valable dans le groupe de Chow de chaque composante de l'espace.

Exemple

Soit $\mathrm{S} \subset \mathbb{P}^2$ une courbe plane. Dans l'espace $\overline{\mathrm{M}}_{22221} = \overline{\mathrm{M}}^{\mathrm{S}}_{22221}(\mathbb{P}^2, 2)$ on impose la condition de tangence dans la dernière marque :

On a demandé de p_5 qu'il devienne tangent à S, mais il va toujours essayer de tricher : au lieu de devenir tangent honnêtement, il va parasiter son ami (p_4 disons) qui est déjà tangent. Quand il s'approche de lui, deux choses arrivent : une nouvelle composante apparaît pour éviter la collision des deux marques, et la courbe honnête gagne contact 3 (la somme des deux contactes qu'il y avait réellement).

Donc on a la configuration



Les modules pour la composante nouvelle est un point $\overline{\mathrm{M}}_{0,3}$. Les modules pour la composante honnête est $\overline{\mathrm{M}}_{2223}$. Puisque p_5 a quatre copains à parasiter, on peut écrire

$$\begin{aligned}(\nu_5^*\mathrm{S} + \boldsymbol{\psi}_5) \cap [\overline{\mathrm{M}}_{22221}] \;&=\; [\overline{\mathrm{M}}_{22222}] \\ &\quad + 3\,[\overline{\mathrm{M}}_{3222}] + 3\,[\overline{\mathrm{M}}_{2322}] + 3\,[\overline{\mathrm{M}}_{2232}] + 3\,[\overline{\mathrm{M}}_{2223}].\end{aligned}$$

3 Le calcul des coniques

L'espace $\overline{\mathrm{M}}_{22222}$

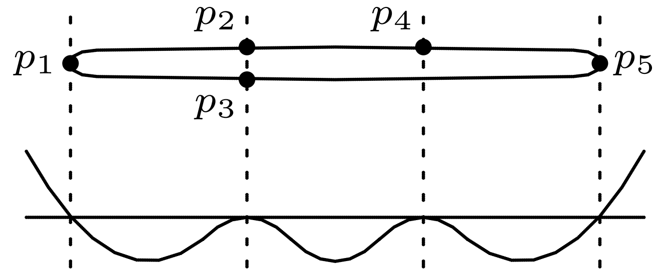
L'espace $\overline{\mathrm{M}}_{22222}$ serait l'espace de modules pour le problème. Sa classe virtuelle est de dimension 0, et on sait la calculer. (Par des récursions assez compliquées — il faut se faire aider par un ordinateur.)

Pourtant, ce numéro n'est pas la solution pour le problème : La classe reçoit des contributions de certaines droites doubles bitangentes, et il y a même une famille de dimension 1 là-dedans…

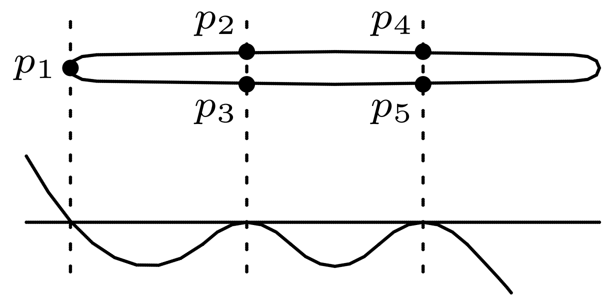
Soit w_d le nombre de bitangents de S.

L'espace $\overline{\mathrm{M}}_{22222}$ a les composantes suivantes :

- Un nombre fini de points isolés correspondant à des coniques lisses 5-fois tangentes à S.
- $w_d\, 5!(d-4)(d-5)$ points isolés, solutions de type $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{B}}$:



- $w_d\, 5!(d-4)/4$ composantes de dimension 1, de type $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}$:



Les termes de corrections

Proposition (3.1) *La section qui définit* $\overline{\mathrm{M}}_{22222}$ *s'annule avec multiplicité* 1 *à chaque conique lisse.*

Proposition (3.2) *La section qui définit* $\overline{\mathrm{M}}_{22222}$ *s'annule avec multiplicité* 1 *à chaque point de type* $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{B}}$*.*

Donc pour faire la corrections de courbes de type $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{B}}$ il suffit déterminer le nombres de composantes qu'il a.

La partie difficile est calculer la contribution de $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}$. On les dénote $[\overline{\mathrm{M}}_{22222}] \mid_{\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}}$.

Observe que on traite d'une composante spécifique, où p_4 et p_5 ont le même image.

La formule de Gathmann dit

$$(\nu_5^* \mathrm{S} + \boldsymbol{\psi}_5) \cap [\overline{\mathrm{M}}_{22221}] \;=\; [\overline{\mathrm{M}}_{22222}] + \text{corrections}$$

Cette égalité vaut aussi dans chaque composante de $\overline{\mathrm{M}}_{22221}$. Une des composantes est justement $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}$, donc :

$$\big((\nu_5^* \mathrm{S} + \boldsymbol{\psi}_5) \cap [\overline{\mathrm{M}}_{22221}]\big) \,|_{\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}} \;=\; [\overline{\mathrm{M}}_{22222}] \,|_{\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}} + 3\, [\overline{\mathrm{M}}_{2223}] \,|_{\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}} \,. \tag{1}$$

evpsi

Le dernier terme est la seule correction de la frontière. Ce sont des courbes où p_5 et p_4 coïncident. (Les autres composantes de corrections ne touchent pas $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}$: la marque p_5 peut s'approcher de p_4 mais jamais aux autres marques.)

On déterminera ces intégrales via des calculs en coordonnées locales.

Premier, on calcule $[\overline{\mathrm{M}}_{2223}]\mid_{\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}} = 3$. C'est-à-dire que la classe virtuelle de $\overline{\mathrm{M}}_{2223}$ (qui est de dimension 0) contient $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}$ avec multiplicité 3. Ce calcul a lieu dans l'espace $\overline{\mathrm{M}}_{2222}$ où on impose le contact 3 et détermine avec quelle multiplicité la section s'annule sur $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}$.

D'une manière similaire on calcule

$$\left(\nu_5^*\mathrm{S} + \boldsymbol{\psi}_5\right) \cap [\overline{\mathrm{M}}_{22221}]\mid_{\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}} = 8.$$

Donc l'équation (1) devient :

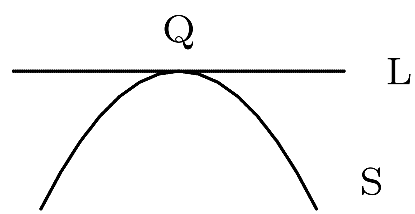
$$8 \;=\; [\overline{\mathrm{M}}_{22222}]\mid_{\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}} + 3 \cdot 3.$$

et on conclut

$$[\overline{\mathrm{M}}_{22222}]\mid_{\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}} = -1$$

Multiplicités

Pour les calculs en coordonnées locales, on fixe la droite L bitangente comme la droite horizontale, $y = 0$. Localement, on suppose que S est donné par l'équation $x^2 - y$.



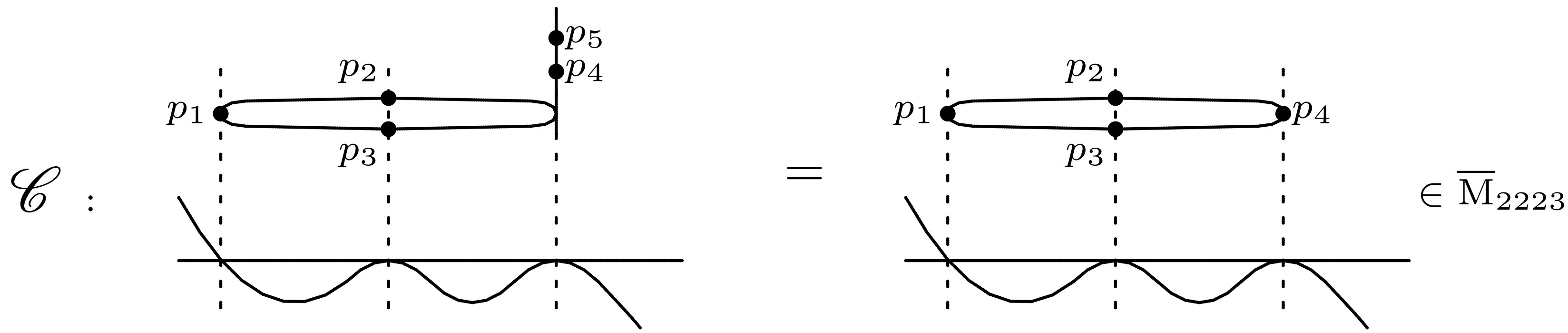
On va construire des familles de parametrisations

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} f(b,t) \\ g(b,t) \end{pmatrix}$$

qui dépend d'un paramètre b. La section p_5 sera toujours donnée par $t = 0$, et on va arranger les choses pour qu'elle s'applique toujours sur $Q = (0, 0)$.

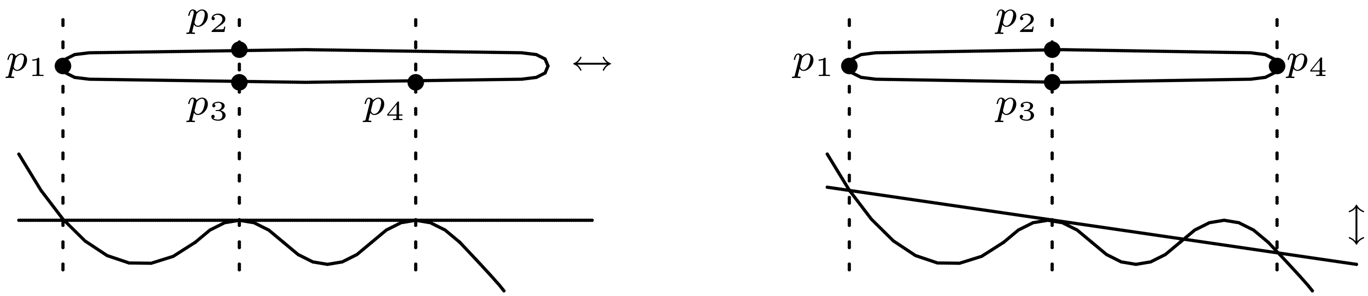
Composantes de $\overline{\mathrm{M}}_{2222}$ proche de $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}$

Le seul point de $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}$ qui est aussi dans l'espace $\overline{\mathrm{M}}_{2223}$ c'est le point $\mathscr{C}$ où p_4 et p_5 coïncident sur un point de ramification qui tombe sur une tangence. On l'interprète comme le point dans $\overline{\mathrm{M}}_{2223}$.



Dans ce point, $\overline{\mathrm{M}}_{2222}$ a deux composantes.

Une où le point de ramification bouge; autre où la droite tourne.



Lemme (3.3) *On a*

$$[\overline{\mathrm{M}}_{2223}] \mid_{\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}} = 3$$

On se place dans $[\overline{\mathrm{M}}_{2223}]$.

La classe $[\overline{\mathrm{M}}_{2223}]$ est le lieu des zéros de la section φ_4 qui exprime "contact d'ordre 3".

La démonstration consiste en évaluer la multiplicité avec laquelle la section s'annule en $\mathscr{C}$ sur chaque composante.

Dans la famille du point de ramification qui bouge, la multiplicité est 2, et dans la famille de la droite qui tourne, la multiplicité est 1.

Dans la première famille, le point de ramification bouge. Elle est localement comme ça :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1 & \longrightarrow & \mathbb{A}^2 \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} t(t-b) \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ici, la section p_4 est donnée par $t = 0$, qui s'envoie toujours à $(0, 0)$. Le point de ramification bouge avec b. Pour $b = 0$ il est $t = 0$, donc il coïncide avec p_4.

On fait la substitution dans l'équation de S :

$$t^2(t-b)^2$$

Pour avoir contact d'ordre 3 dans p_4 il faut tuer le terme t^2 (les termes t et constant sont déjà morts, parce qu'on est dans $\overline{\mathrm{M}}_{2222}$). Ce terme est b^2t^2. Donc, pour $b = 0$ on a une solution, avec multiplicité 2, comme affirmé.

Dans la deuxième famille, la droite supporte tourne. Cette famille est locale- analytiquement décrite comme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1 & \longrightarrow & \mathbb{A}^2 \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} t^2 \\ b\,t^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

La droite tourne sur le point Q, toujours avec le point de ramification p_4 sur Q.

Le pull-back de l'équation de S est

$$t^4 - b\,t^2$$

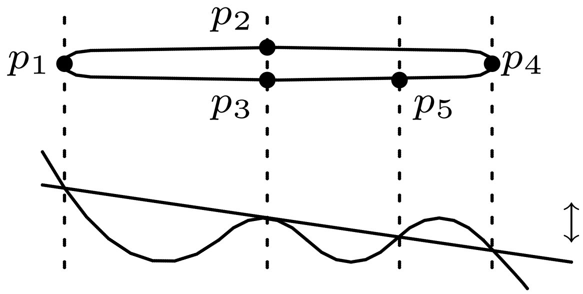
Pour avoir contact d'ordre 3, il faut tuer $-bt^2$. Donc, $b = 0$ est solution, avec multiplicité égale à 1.

L'espace $\overline{\mathrm{M}}_{22221}$ autour de $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}$

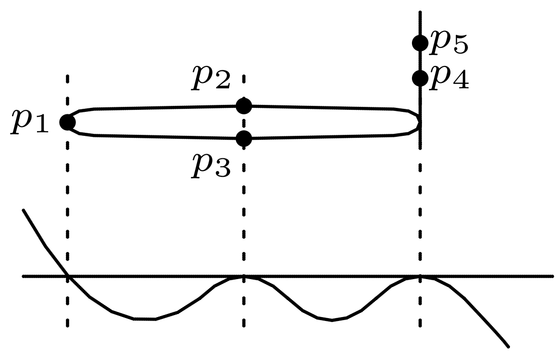
Pour évaluer l'intégrale $\left(\nu_5^*\mathrm{S} + \boldsymbol{\psi}_5\right) \cap [\overline{\mathrm{M}}_{22221}] \mid_{\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}}$, on se place dans $\overline{\mathrm{M}}_{22221}$.

$\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}$ lui-même est une composante de $\overline{\mathrm{M}}_{22221}$.

Il y a aussi la composante Z :

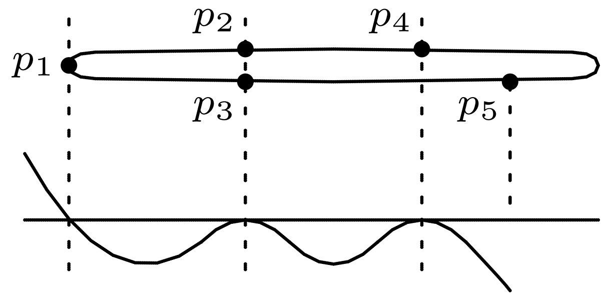


Z intersecte $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}$ dans le point $\mathscr{C}$:



Lemme (3.4) $[\overline{\mathrm{M}}_{22221}]$ *contient* $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}$ *avec multiplicité* 2

On se place dans $\overline{\mathrm{M}}_{22220}$ qui (autour de $\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}$) est lisse de dimension 2. Cet espace est ainsi :



Le point de ramification bouge, et la marque p_5 bouge.

Localement, on a

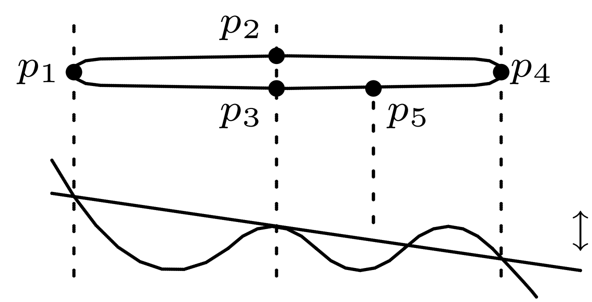
$$t \quad \longmapsto \quad \begin{pmatrix} (t-1)(t-b) \\ 0 \end{pmatrix}$$

où p_5 est donné par $(t = 0)$. Quand $b \to 0$ alors $p_5 \to (0, 0)$.

Le pull-back de l'équation de S est $(t-1)^2(t-b)^2$. Il faut tuer le terme constante b^2. Donc la multiplicité est égale à 2.

Lemme (3.5) $[\overline{\mathrm{M}}_{22221}]$ *contient* Z *avec multiplicité* 1.

Autour de Z, l'espace $\overline{\mathrm{M}}_{22220}$ est lisse de dimension 2 :



En plus de la liberté pour tourner la droite, on a la liberté de p_5, qui n'a pas besoin de tomber sur S.

Quand p_5 s'approche d'un point de S, il s'approche transversalement, et on voit facilement que la multiplicité est 1.

Donc on peut écrire

$$\big((\nu_5^*\mathrm{S} + \boldsymbol{\psi}_5) \cap [\overline{\mathrm{M}}_{22221}]\big) \mid_{\overline{\mathrm{M}}_\mathrm{C}} = (\nu_5^*\mathrm{S} + \boldsymbol{\psi}_5) \cap 2[\overline{\mathrm{M}}_\mathrm{C}] + \big((\nu_5^*\mathrm{S} + \boldsymbol{\psi}_5) \cap [\mathrm{Z}]\big) \mid_{\overline{\mathrm{M}}_\mathrm{C}}$$

Dans les deux cas on peut interpréter $(\nu_5^*\mathrm{S} + \boldsymbol{\psi}_5)$ comme la classe d'un schéma de zéros d'une section d'un fibré. Il faut déterminer avec quelle multiplicité elle s'annule sur les points de $\overline{\mathrm{M}}_\mathrm{C}$.

Lemme (3.6) *On a*

$$(\nu_5^*\mathrm{S} + \boldsymbol{\psi}_5)[\overline{\mathrm{M}}_{\mathrm{C}}] = 2.$$

Observation : on a $\nu_5^*\mathrm{S} = d \cdot \nu_5^*\mathrm{H}$, où H est une droite générale. Or, une droite générale ne passe pas par le point $\mathrm{Q} = \mu(p_5)$. Donc il suffirait de traiter $\boldsymbol{\psi}_5$ abstraitement. Faute de ça, on la reinterprète comme la classe d'une autre condition géométrique : on impose tangence à la droite H qui est vertical et passe par Q. Bien évidemment la tangence peut se produire seulement si le point de ramification coïncide avec p_5 (et par conséquence : coïncident avec p_4 aussi, et dans ce cas, une nouvelle composante apparaît). On veut calculer la classe de ça : c'est $\nu_5^*\mathrm{H} + \boldsymbol{\psi}_5$, et on sait déjà que H ne contribue pas. Donc, la solution pour cette problème est la même que la solution pour le problème original.

Voici :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1 & \longrightarrow & \mathbb{A}^2 \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} t(2b-t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

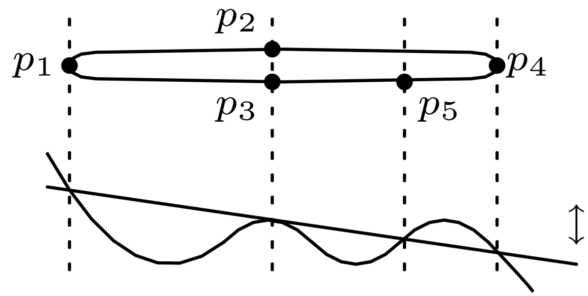
où p_5 est donné par $(t=0)$. L'autre marque p_4 est $(t=2b)$. Le point de ramification est $t=b$. Quand $b \to 0$ alors la ramification vient coïncider avec les deux marques, et une nouvelle composante apparaît. C'est l'éclatement : $b\tilde{t} = t\tilde{b}$. Dans la carte $\tilde{b}=1$ on a

$$\begin{pmatrix} b\tilde{t}(2b-b\tilde{t}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'équation de H est x. Le pull-back est $b\tilde{t}(2b-b\tilde{t})$, et il faut tuer le terme linéaire qui est $2b^2\tilde{t}$. Donc, $b=0$ est solution, multiplicité 2.

Lemme (3.7) *Dans la composante* Z, *la section* φ_5 *s'annule avec ordre* 4 *dans le point* $\mathscr{C}$.

Z :



Localement on décrit la famille comme suit : on laisse la droite tourner sur $\mu(p_5) = (0,0)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^1 & \longrightarrow & \mathbb{A}^2 \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} t(2b-t) \\ b^2\, t(2b-t) \end{pmatrix} \end{array}$$

Les sections sont $p_4 : (t = b)$, et $p_5 : (t = 0)$. On observe que ces deux section s'appliquent sur S, et que p_4 est toujours un point de ramification.

Pour stabiliser la famille, il faut éclater le point $(b=0, t=0)$ où les deux sections se croisent, donc $b\tilde{t} = t\tilde{b}$. Dans la carte $\tilde{b} = 1$ on a

$$\begin{pmatrix} b\tilde{t}(2b - b\tilde{t}) \\ b^2\, b\tilde{t}(2b - b\tilde{t}) \end{pmatrix}$$

Substituer ça dans l'équation de S :

$$b^2\tilde{t}^2(2b - b\tilde{t})^2 - b^3\tilde{t}(2b - b\tilde{t})$$

Le terme linéaire doit s'annuler. Ce terme est $b^4\tilde{t}$. Donc, à $b = 0$ on a une solution avec multiplicité 4.

En conclusion, notre équation

$$\big((\nu_5^*\mathrm{S} + \boldsymbol{\psi}_5) \cdot [\overline{\mathrm{M}}_{22221}]\big) \mid_{\overline{\mathrm{M}}_\mathrm{C}} = [\overline{\mathrm{M}}_{22222}] \mid_{\overline{\mathrm{M}}_\mathrm{C}} + 3[\overline{\mathrm{M}}_{2223}] \mid_{\overline{\mathrm{M}}_\mathrm{C}}$$

devient

$$2 \cdot 2 + 4 = [\overline{\mathrm{M}}_{22222}] \mid_{\overline{\mathrm{M}}_\mathrm{C}} + 3 \cdot 3.$$

Donc,

$$[\overline{\mathrm{M}}_{22222}] \mid_{\overline{\mathrm{M}}_\mathrm{C}} = -1.$$

Il nour reste que joindre les pièces. . .

Bibliographie

[1] Andreas Gathmann. Absolute and relative Gromov-Witten invariants of very ample hypersurfaces. To appear in Duke. Math. J. (math.AG/9908054).

[2] Andreas Gathmann. The number of plane conics 5-fold tangent to a given curve. Preprint, math.AG/0202002. 2