Rigidez topológica y módulos analíticos de foliaciones holomorfas en superficies

David Marín

Introducción

Sea S una superficie compleja compacta con una foliación holomorfa singular $\mathcal{F}_0$. Existen varias maneras de abordar el problema de módulos analíticos de la foliación $\mathcal{F}_0$, las cuales vamos a esbozar brevemente:

Primeramente, podemos considerar el conjunto de foliaciones holomorfas $\mathcal{F}$ en S que son topológicamente conjugadas a $\mathcal{F}_0$ (por un homeomorfismo que preserva las orientaciones de S y de las hojas, tal y como lo hacen los automorfismos holomorfos de S). Si cocientamos dicho conjunto por la relación de equivalencia de ser analíticamente conjugadas obtenemos el genuino espacio de módulos analíticos de $\mathcal{F}_0$. Este enfoque es el más natural, pero también el más difícil. Es por ello que a menudo se considera el problema con deformaciones, lo que constituye el segundo enfoque.

Una deformación holomorfa $\mathcal{F}_t$ de $\mathcal{F}_0$ con espacio de parámetros P es una foliación holomorfa de dimensión uno en el producto $S \times P$ tal que sus hojas están contenidas en las superficies $S \times \{t\}$, $t \in P$. En lo que sigue consideraremos el caso en que P es el germen de espacio analítico $(\mathbb{C}, 0)$. Decimos que una tal deformación es topológicamente trivial si y sólo si existe una familia continua de homeomorfismos $\Phi_t : S \to S$ conjugando $\mathcal{F}_0$ y $\mathcal{F}_t$ tal que $\Phi_0 = id$. Podemos considerar el conjunto cociente de las deformaciones holomorfas de $\mathcal{F}_0$ que son topológicamente triviales, por la relación de equivalencia analítica.

Una tercera aproximación al problema consiste en considerar los *despliegues* de $\mathcal{F}_0$, es decir, foliaciones holomorfas $\mathcal{F}$ de codimensión uno en el producto $S \times P$ de manera que $\mathcal{F}_{|S\times\{0\}} = \mathcal{F}_0$. Todo despligue $\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}_0$ tiene una deformación subyacente natural $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{|S\times\{t\}}$. Sin entrar en los detalles técnicos, podemos decir que un despliegue equisingular de $\mathcal{F}_0$ es aquél que admite una reducción de singularidades en familia. Es conocida la existencia de un espacio versal de despliegues equisingulares de una foliación $\mathcal{F}_0$, ver por ejemplo [8, 9].

Finalmente, recordemos que a cada despliegue equisingular $\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}_0$ se le puede asociar un elemento del grupo de cohomología $H^1(S, \mathcal{O}_S(T_{\mathcal{F}_0}))$ llamado la velocidad de deformación de $\mathcal{F}$. Aquí $\mathcal{O}_S(T_{\mathcal{F}_0})$ denota el haz de gérmenes de secciones holomorfas del fibrado tangente a $\mathcal{F}_0$. Así, dicho grupo puede interpretarse geométricamente como los despliegues infinitesimales de $\mathcal{F}_0$, es decir como el espacio tangente al espacio versal citado anteriormente, cf. [8].

A cada enfoque se le puede asociar por tanto un espacio de módulos y una noción de rigidez caracterizada por la trivialidad del correspondiente espacio de módulos.

1 Despliegues equisingulares y deformaciones

Comencemos recordando la relación entre los despliegues infinitesimales y los despliegues equisingulares de una foliación $\mathcal{F}_0$, la cual se pone de manifiesto en el siguiente resultado de [9].

Teorema 1 (Mattei-Nicolau) *Sea S una superficie compleja compacta y $\mathcal{F}_0$ una foliación holomorfa en S con singularidades aisladas $p_1, \ldots, p_r$. Sea K_i^{loc} el espacio de parámetros del despliegue versal de la singularidad p_i y sea K_e el espacio versal de despliegues equisingulares de $\mathcal{F}_0$. Denotemos por*

$$\chi : K_e \to K_1^{loc} \times \cdots \times K_r^{loc}$$

la aplicación natural de restricción. Si $H^1(S, \mathcal{O}_S(T_{\mathcal{F}_0})) = 0$ entonces la aplicación tangente $T_0\chi$ es un isomorfismo. Además, si $H^2(S, \mathcal{O}_S(T_{\mathcal{F}_0})) = 0$ entonces K_e es liso y χ es un isomorfismo.

Como consecuencia, si las singularidades de $\mathcal{F}_0$ son reducidas y se verifica la condición $H^1(S, \mathcal{O}_S(T_{\mathcal{F}_0})) = 0$ entonces todo despliegue de $\mathcal{F}_0$ (automáticamente equisingular) es analíticamente trivial.

Es bien conocido que la deformación subyacente a un despliegue equisingular es topológicamente trivial. Dado que la teoría de despliegues es más rica que la de deformaciones, la pregunta natural que se plantea es: ¿qué se puede decir acerca de la afirmación recíproca?

El primer resultado en esta línea fue dado por Yu S. Ilyashenko, quien en [5] muestra la rigidez (por deformación) de las foliaciones holomorfas en $\mathbb{CP}^2$ que admiten una recta invariante y verifican a su vez ciertas condiciones genéricas. Más tarde, X. Gómez-Mont y L. Ortíz-Bobadilla generalizan dicho resultado al caso de una superficie proyectiva cambiando la recta por una curva amplia invariante. En ambas formulaciones la última hipótesis se utiliza para asegurar que todas las hojas (salvo un número finito) acumulan a la curva invariante, portadora de un grupo de holonomía suficientemente rico, en un sentido que precisaremos a continuación. Usando la existencia de una inmersión de la superficie en un espacio proyectivo tal que la curva amplia es una sección hiperplana se considera entonces una carta afín de manera que dicha curva quede en el infinito. El principio del máximo nos permite concluir que las soluciones no constantes del sistema son no acotadas y por tanto acumulan a la curva amplia que se encuentra en el infinito. Cabe destacar también el trabajo de A. Lins-Neto, P. Sad y B. Scárdua [6], en el que se muestra que las foliaciones rígidas de $\mathbb{CP}^2$ forman un conjunto abierto y se da una descripción del complementario.

Una adaptación de las técnicas utilizadas en la exposición de [2] permite demostrar nuestro primer resultado.

Teorema 2 *Sea S una superficie compleja y $\mathcal{F}_0$ una foliación holomorfa en S tal que:*

(a) $\mathcal{F}_0$ admite una hoja cerrada $\mathcal{L}$ cuyo grupo de holonomía es rígido y contiene un elemento hiperbólico;

(b) todas las hojas (salvo quizás un número finito de hojas cerradas) acumulan a $\mathcal{L}$ en puntos regulares.

Entonces toda deformación holomorfa de $\mathcal{F}_0$ que sea topológicamente trivial es subyacente a un despliegue.

Recordemos que la rigidez del grupo de holonomía $G \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ de $\mathcal{L}$ significa que si $h : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ es un germen de homeomorfismo tal que $h \circ g \circ h^{-1} \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ para todo $g \in G$ entonces h es un homeomorfismo conforme, esto es, holomorfo o antiholomorfo.

2 Superficies fibradas

Nuestro siguiente objetivo es aplicar el Teorema 2 al caso en que S es una superficie fibrada (i.e. el espacio total de un fibrado localmente trivial sobre una curva compleja no singular) y $\mathcal{F}_0$ admite una fibra invariante F_0 que jugará el papel de la hoja $\mathcal{L}$.

La razón para restringir nuestra atención a esta situación es que estamos en disposición de verificar con bastante generalidad la hipótesis (b) del Teorema 2, es decir, que casi todas las hojas de $\mathcal{F}_0$ acumulan a la fibra invariante F_0 en puntos regulares. Para ello utilizamos el Teorema de Painlevé que asegura la existencia de elevación de caminos a las hojas de la foliación. Más concretamente, tomando un camino en la base que tienda a la proyección de la fibra invariante F_0 y elevándolo a las hojas de $\mathcal{F}_0$ probamos que toda hoja (salvo otra eventual fibra invariante) acumula a F_0. Para poder asegurar que existen puntos de acumulación regulares impondremos que las singularidades de $\mathcal{F}_0$ sobre la fibra F_0 sean hiperbólicas.

Teorema 3 *Sea S una superficie compleja compacta fibrada y $\mathcal{F}_0$ una foliación holomorfa sobre S con singularidades reducidas verificando las siguientes condiciones:*

(a) Existe una fibra invariante F_0 tal que todas las singularidades de $\mathcal{F}_0$ sobre F_0 son hiperbólicas y cuyo grupo de holonomía es rígido.

(b) $H^1(S, \mathcal{O}_S(T_{\mathcal{F}_0})) = 0$.

Entonces $\mathcal{F}_0$ es rígida, más precisamente, toda deformación holomorfa $\mathcal{F}_t$ de $\mathcal{F}_0$ que sea topológicamente trivial también es analíticamente trivial.

A fin de decidir sobre la nulidad del grupo $H^1(S, \mathcal{O}_S(T_{\mathcal{F}_0}))$ particularizaremos el Teorema 3 al caso de superficies regladas, es decir, cuya fibra es $\mathbb{CP}^1$.

3 Superficies regladas

En primer lugar, vamos a dar algunos ejemplos de superficies regladas sobre una curva compleja B. Si E es un fibrado vectorial de rango dos sobre B entonces su proyectivización $p : S = \mathbb{P}(E) \to B$ nos proporciona el primer ejemplo de superficie reglada. De hecho, es bien conocido que toda superficie reglada $p : S \to B$ se puede obtener de esta forma. Se utiliza para ello la sucesión exacta de cohomología no abeliana asociada a la sucesión exacta de haces sobre B:

$$1 \to \mathcal{O}_B^* \to \mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_B) \to \mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}_B) \to 1,$$

y el hecho de que $H^2(B, \mathcal{O}_B^*) = 0$ (pues $\dim B = 1$).

Si tomamos por ejemplo el caso de $B = \mathbb{CP}^1$ podemos aplicar un conocido Teorema de Grothendieck el cual afirma que todo fibrado vectorial sobre $\mathbb{CP}^1$ descompone como suma directa de fibrados de línea. Así, toda superficie reglada sobre $\mathbb{CP}^1$ es la proyectivización de un fibrado del tipo $\mathcal{O}(n) \oplus \mathcal{O}(m)$. Es fácil ver que al tensorializar un fibrado de rango dos con un fibrado de línea obtenemos un nuevo fibrado de rango dos cuya proyectivización es biholomorfa a la anterior. Así vemos que las únicas superficies regladas sobre $\mathbb{CP}^1$ son las superficies $S_e = \mathbb{P}(\mathcal{O}(e) \oplus \mathcal{O})$, $e \geq 0$, conocidas bajo el nombre de superficies de Hirzebruch. De la definición se desprende que $S_0 = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ y es fácil ver que S_1 es biholomorfa al explotado de $\mathbb{CP}^2$ en un punto.

Existe un estudio exhaustivo de X. Gómez-Mont en [4] de los grupos de cohomología sobre superficies regladas a coeficientes el haz de secciones de un fibrado de línea arbitrario. De dicho estudio se desprende que la condición $H^1(S, \mathcal{O}_S(T_{\mathcal{F}_0})) = 0$ se verifica para toda foliación $\mathcal{F}_0$ con singularidades aisladas, salvo en los siguientes casos:

(1) Si $\mathcal{F}_0$ es la fibración $p : S \to B$, la cual es única excepto para el producto $S = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ (que admite dos).

(2) Si $\mathcal{F}_0$ es transversa a la fibración fuera de un número finito de fibras invariantes, es decir, si $\mathcal{F}_0$ es una foliación de Riccati.

(3) Si $\mathcal{F}_0$ es una foliación regular sobre una superficie reglada que fibra sobre una curva elíptica E. Además, si $\mathcal{F}_0$ es una foliación de este tipo que no está contenida en los casos precedentes entonces S es un cociente finito no ramificado del producto $\mathbb{CP}^1 \times E$. Este grupo contiene las foliaciones *tourbillonées*, ver por ejemplo [1].

(4) Cierto tipo de foliaciones en la primera superficie de Hirzebruch obtenidas explotando un punto regular de una foliación en $\mathbb{CP}^2$.

Podemos reformular entonces el Teorema 3 en superficies regladas como sigue.

Corolario 4 *Sea S una superficie reglada y $\mathcal{F}_0$ una foliación holomorfa en S con singularidades hiperbólicas admitiendo una fibra invariante con grupo de holonomía rígido. Si $\mathcal{F}_0$ no pertenece a la lista (1)-(4) anterior entonces es topológicamente rígida (por deformación).*

Dado que la fibración (caso (1)) es única y los casos (3) y (4) se dan únicamente cuando el género de B es uno o cero respectivamente (y aún así las condiciones impuestas son bastantes restrictivas), podemos decir que la clase que contiene mayor cantidad de foliaciones no rígidas sobre las superficies regladas son las foliaciones de Riccati. Es por ello que vamos a proceder a recordar la clasificación analítica y a demostrar la clasificación topológica (bajo ciertas condiciones) de este tipo de foliaciones.

4 Foliaciones de Riccati

Sea $\mathcal{F}$ una foliación de Riccati con k fibras invariantes $F_i = p^{-1}(b_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Supondremos que cada fibra invariante contiene dos singularidades hiperbólicas de $\mathcal{F}$. Si denotamos por $S^* = S \setminus (F_1 \cup \ldots \cup F_k)$ entonces la restricción $\mathcal{F}^*$ de $\mathcal{F}$ al abierto S^* es transversa a la proyección $p : S^* \to B^*$, donde $B^* = B \setminus \{b_1, \ldots, b_k\}$. Sea $b_0 \in B^*$ y $F_0 = p^{-1}(b_0)$ una fibra transversa a $\mathcal{F}$. La transversalidad nos proporciona una representación de holonomía global

$$H_{\mathcal{F}} : \pi_1(B^*, b_0) \to \mathrm{Aut}(F_0) \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}).$$

De hecho, $\mathcal{F}^*$ se obtiene como la suspensión de la representación $H_{\mathcal{F}}$, lo que nos proporciona la clasificación analítica en S^*. Para obtener la clasificación analítica en todo S debemos tener en cuenta que los residuos de las singularidades de $F_1, \ldots, F_k$ son invariantes analíticos.

4.1 Clasificación analítica

Resumimos a continuación, en forma de teorema, varios hechos bien conocidos sobre foliaciones de Riccati en superficies regladas.

Teorema 5 *Si $\Phi : S \to S$ es un automorfismo holomorfo de S conjugando la foliación de Riccati $\mathcal{F}$ con otra foliación holomorfa $\mathcal{F}'$ entonces se tienen las siguientes propiedades:*

(0) La foliación $\mathcal{F}'$ también es de Riccati con k fibras invariantes $F_i' = p^{-1}(b_i')$ que numeramos de manera que $\Phi(F_i) = F_i'$, $i = 1, \ldots, k$.

(1) El biholomorfismo Φ preserva la fibración e induce un automorfismo holomorfo ϕ de la base B.

(2) La restricción $\psi = \Phi_{|F_0} : F_0 \to F_0' = p^{-1}(b_0')$ es un biholomorfismo que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(B^*, b_0) & \xrightarrow{\varphi} & \pi_1(B'^*, b_0') \\ {\scriptstyle H_{\mathcal{F}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H_{\mathcal{F}'}} \\ \mathrm{Aut}(F_0) & \xrightarrow{\psi_*} & \mathrm{Aut}(F_0') \end{array} \qquad (*)$$

donde ψ_* denota la conjugación por ψ y φ es el isomorfismo inducido por ϕ a nivel de homotopía.

(3) Los residuos de las singularidades de F_i y F_i' coinciden para todo $i = 1, \ldots, k$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{F}'$ es una foliación de Riccati con k fibras invariantes $F_i' = p^{-1}(b_i')$ de manera que exista un biholomorfismo $\phi : B \to B$ tal que $\phi(b_i) = b_i'$, $i = 1, \ldots, k$; exista $\psi : F_0 \to F_0'$ un biholomorfismo entre dos fibras transversas tal que el diagrama $(*)$ sea conmutativo; y finalmente, que los residuos de $\mathcal{F}$ en F_i coinciden con los residuos de $\mathcal{F}'$ en F_i'. Entonces existe un biholomorfismo $\Phi : S \to S$ que conjuga $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$.

4.2 Clasificación topológica

Para proceder con la clasificación topológica seguiremos el mismo espíritu que en el Teorema 5. Consideremos un homeomorfismo $\Phi : S \to S$ conjugando la foliación de Riccati $\mathcal{F}$ con otra foliación holomorfa $\mathcal{F}'$ de manera que las orientaciones de S y de las hojas sean preservadas.

Cuestión (0'): ¿Podemos concluir que $\mathcal{F}'$ también es una foliación de Riccati? La respuesta es afirmativa y es consecuencia de dos hechos:

(A) Una caracterización cohomológica de las foliaciones de Riccati en términos de la clase de Chern de su fibrado tangente, ver [4]. El grupo abeliano $H^2(S, \mathbb{Z})$ es libre de rango dos generado por la clase, $\mathbf{f}$, de una fibra y la clase de una sección holomorfa.

Una foliación holomorfa $\mathcal{F}$ en una superficie reglada S es de Riccati si y sólo si la clase de Chern de su fibrado tangente $c(T_{\mathcal{F}})$ es múltiplo de $\mathbf{f}$.

(B) La invariancia topológica de la clase de Chern del fibrado tangente de una foliación holomorfa de dimensión uno, ver [3]:

Si $\Phi : S \to S$ es un homeomorfismo conjugando dos foliaciones holomorfas $\mathcal{F}$ y $\Phi^*\mathcal{F}$ entonces $\Phi^*(c(T_{\mathcal{F}})) = c(T_{\Phi^*\mathcal{F}})$.

Observación (1'): El homeomorfismo $\Phi : S \to S$ en general no es fibrado pero induce un isomorfismo (geométrico) $\varphi : \pi_1(B^*, b_0) \to \pi_1(B'^*, b_0')$.

En efecto, como $\mathbb{CP}^1$ es simplemente conexo se tiene que $\pi_1(B^*) \cong \pi_1(S^*)$ por lo que podemos tomar φ como $\Phi_* : \pi_1(S^*) \to \pi_1(S'^*)$ actuando sobre las bases.

Observación (2'): Aunque en general $\Phi(F_0)$ no es una fibra existe una isotopía entre Φ y otro homeomorfismo $\hat{\Phi}$ de manera que preserva la foliación $\mathcal{F}'$ y tal que la restricción de $\hat{\Phi}$ a F_0 es un homeomorfismo $\psi : F_0 \to F_0'$ entre dos fibras transversas que conjuga las representaciones de holonomía de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$, i.e. que hace conmutativo el diagrama $(*)$.

La demostración de este hecho es de naturaleza puramente topológica. Consideremos la composición $f : F_0 \to B$ de la restricción de Φ a F_0 con la proyección $p : S \to B$. Como F_0 es transversa a $\mathcal{F}$ se sigue que la imagen de f está contenida en $B'^* \subset B$ que es una superficie de Riemann diferente de la esfera. Así pues, su recubrimiento universal es bien el disco, bien el plano, de donde deducimos que su segundo grupo de homotopía es trivial. Como F_0 es topológicamente una esfera de dimensión dos, deducimos que f es homótopa a constante. Elevando a las hojas de $\mathcal{F}'$ la homotopía que contrae $f(F_0)$ a un punto b_0' obtenemos la isotopía deseada.

Observación (3'): Si el grupo de holonomía $G \hookrightarrow \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ de $\mathcal{F}$ es rígido entonces el homeomorfismo $\psi : F_0 \to F_0'$ es de hecho un biholomorfismo, lo que implica que los residuos de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ de las fibras correspondientes por φ coinciden.

Maticemos que la rigidez de G en este contexto significa que si $h : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ es un homemorfismo tal que $h \circ g \circ h^{-1} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ para todo $g \in G$ entonces h es un homeomorfismo conforme. Dicha propiedad se verifica por ejemplo cuando G es no resoluble y no discreto, ver por ejemplo [7].

Recíprocamente, supongamos que disponemos de un isomorfismo geométrico $\varphi : \pi_1(B^*, b_0) \to \pi_1(B'^*, b_0')$ (i.e. inducido por un homeomorfimo $\phi : B \to B$ gracias al Teorema de Nielsen, ver por ejemplo [10] para más detalles) y un biholomorfismo $\psi : F_0 \to F_0'$ haciendo conmutativo el diagrama $(*)$ y cumpliendo además que los residuos de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son iguales en las fibras correspondientes por φ. Entonces podemos construir un homeomorfismo *fibrado* $\Phi : S \to S$ conjugando $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$.

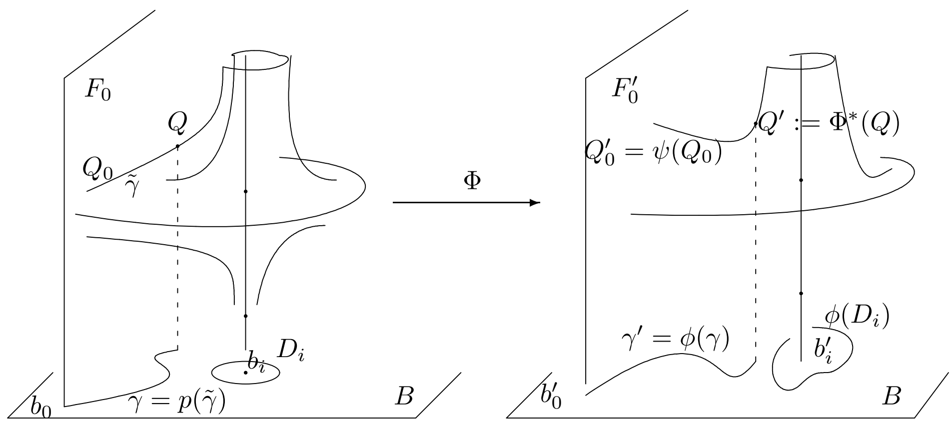

Figura 1: Conjugación fibrada Φ entre dos foliaciones de Riccati.

Demostración: Podemos suponer sin pérdida de generalidad que el homeomorfismo $\phi : B \to B$ que induce φ en homotopía es holomorfo en un pequeño entorno D_i de b_i para $i = 1, \ldots, k$. Al igual que en la demostración del Teorema 5 podemos aplicar la técnica de elevación de caminos para construir una conjugación topológica fibrada Φ^* en S^*. Del hecho de que $\phi_{|D_i}$ sea holomorfo se desprende que Φ^* es holomorfo en $p^{-1}(D_i \setminus \{b_i\})$, mientras que de la igualdad de los residuos se deduce que Φ^* está acotada en S^*. Aplicando el Teorema de extensión de Riemann concluimos que Φ^* extiende holomorficamente a F_i, para $i = 1, \ldots, k$. $\square$

Referencias

[1] Marco Brunella. Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 30(5):569–594, 1997.

[2] X. Gómez-Mont and L. Ortíz-Bobadilla. *Sistemas dinámicos holomorfos en superficies*. Sociedad Matemática Mexicana, México City, 1989.

[3] X. Gómez-Mont, J. Seade, and A. Verjovsky. The index of a holomorphic flow with an isolated singularity. *Math. Ann.*, 291(4):737–751, 1991.

[4] Xavier Gómez-Mont. Holomorphic foliations in ruled surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 312(1):179–201, 1989.

[5] Yu. S. Ilyashenko. Topology of phase portraits of analytic differential equations on a complex projective plane. *Trudy Sem. Petrovsk.*, (4):83–136, 1978.

[6] A. Lins Neto, P. Sad, and B. Scárdua. On topological rigidity of projective foliations. *Bull. Soc. Math. France*, 126(3):381–406, 1998.

[7] Alcides Lins Neto. Construction of singular holomorphic vector fields and foliations in dimension two. *J. Differential Geom.*, 26(1):1–31, 1987.

[8] Jean-François Mattei. Modules de feuilletages holomorphes singuliers. I. Équisingularité. *Invent. Math.*, 103(2):297–325, 1991.

[9] Jean-François Mattei and Marcel Nicolau. Equisingular unfoldings of foliations by curves. *Astérisque*, (222):6, 285–302, 1994. Complex analytic methods in dynamical systems (Rio de Janeiro, 1992).

[10] Heiner Zieschang, Elmar Vogt, and Hans-Dieter Coldewey. *Surfaces and planar discontinuous groups*. Springer, Berlin, 1980. Translated from the German by John Stillwell.

David Marín
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona. Edifici C.
08193 Bellaterra (Barcelona)
david@mat.uab.es