Mètodes Numèrics — Grau de Matemàtiques
Interpolació

Lluís Alsedà

adaptat dels *Apunts de Mètodes Numèrics* de Josep Maria Mondelo, 2009

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

http://www.mat.uab.cat/~alseda

abril 2016 (versió 1.2.1)

UAB Universitat Autònoma de Barcelona
DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES

Continguts

Suposem que tenim una família de funcions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que depenen de $n+1$ paràmetres,

$$\Phi(x; a_0, \ldots, a_n)$$

on $a_0, \ldots, a_n$ són els paràmetres. Suposem també que tenim $n+1$ punts $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$.

El *problema d'interpolació* de $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ per Φ consisteix a determinar $a_0, \ldots, a_n$ tals que

$$\Phi(x_i; a_0, \ldots, a_n) = y_i, \quad i = 0 \div n.$$

Els $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ es diuen *punts de suport*, els $\{x_i\}_{i=0}^n$ *abscisses de suport* i els $\{y_i\}_{i=0}^n$ *ordenades de suport*.

Es diu que el problema d'interpolació és *lineal* si Φ depèn linealment dels paràmetres,

$$\Phi(x; a_0, \ldots, a_n) = a_0\Phi_0(x) + a_1\Phi_1(x) + \cdots + a_n\Phi_n(x),$$

per exemple, la *interpolació polinomial*,

$$\Phi(x; a_0, \ldots, a_n) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

o la *interpolació trigonomètrica*,

$$\Phi(x; a_0, \ldots, a_n) = a_0 + a_1 e^{ix} + a_2 e^{i2x} + \cdots + a_n e^{inx}.$$

Exemples d'interpolació no lineal són la *interpolació racional* (interpolació de Padé),

$$\Phi(x; a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m},$$

i la *interpolació exponencial*,

$$\Phi(x; a_0, \ldots, a_n, \lambda_0, \ldots, \lambda_n) = a_0 e^{\lambda_0 x} + a_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + a_n e^{\lambda_n x}.$$

També hi ha la interpolació amb *splines* i d'*Hermite* (que té en compte les derivades). Aquests tipus d'interpolació, els veurem en detall més endavant.

Introducció (cont.)

Abans de l'aparició de les calculadores, la principal aplicació de la interpolació era obtenir, a partir de taules, valors no tabulats (de funcions trigonomètriques, logarítmiques, distribucions de probabilitat,...). En l'actualitat, la interpolació continua essent una eina fonamental per l'aproximació de funcions, que és el fonament d'altres mètodes numèrics, alguns dels quals els veurem durant el curs. També és important per a la representació gràfica.

En aquest tema només tractarem la interpolació polinomial i per splines.

Denotem per Π_n el conjunt de polinomis de grau $\leq n$. El problema d'interpolació de Lagrange consisteix a, donats $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n} \subset \mathbb{R}^2$, amb $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$, trobar $P \in \Pi_n$ tal que

$$P(x_i) = y_i, \quad i = 0 \div n. \tag{1}$$

Proposició

El problema d'interpolació de Lagrange (1) *té solució única.*

Demostració

Per a veure l'existència de solució, anem a construir-la explícitament.

Primer pensem en un problema més simple: Suposem que $y_k = 1$ i que $y_i = 0$ per a tot $i \neq k$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$:

x	x_0	x_1	$\ldots$	x_{k-1}	x_k	x_{k+1}	$\ldots$	x_n
y	0	0	$\ldots$	0	1	0	$\ldots$	0

Considerem el polinomi:

$$\lambda_k(x) := \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} (x - x_i) = (x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n).$$

Llavors, el polinomi interpolador buscat és

$$L_k(x) := \frac{\lambda_k(x)}{\lambda_k(x_k)} = \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)}.$$

Demostració (cont.)

Els polinomis $L_0, \dots, L_n \in \Pi_n$ s'anomenen *polinomis bàsics de Lagrange*, i verifiquen

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Aleshores, el problema d'interpolació general

x	x_0	x_1	$\dots$	x_{k-1}	x_k	x_{k+1}	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	$\dots$	y_{k-1}	y_k	y_{k+1}	$\dots$	y_n

el resol el polinomi

$$P(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x) \in \Pi_n$$

que, clarament, verifica $P(x_i) = y_i$, per $i = 0 \div n$.

Demostració (cont.)

Per veure'n la unicitat, suposem que $P, Q \in \Pi_n$ verifiquen $P(x_i) = Q(x_i) = y_i$ per $i = 0 \div n$. Aleshores $P - Q \in \Pi_n$ té $n+1$ zeros diferents, $x_0, \dots, x_n$. Pel teorema fonamental de l'àlgebra, necessàriament ha de ser el polinomi zero, i per tant $P = Q$. $\square$

Els polinomis bàsics de Lagrange donen un mètode de càlcul del polinomi interpolador. Tot i que és interessant des del punt de vista teòric, altres mètodes que veurem més endavant són més adequats per càlculs efectius. No obstant això, la fórmula de Lagrange pot ser interessant en situacions en les quals s'han de resoldre molts problemes d'interpolació per les mateixes abscisses de suport.

Exemple

x	-1	3	4
y	α	β	γ

Llavors,

$$P_2(x) = \alpha\frac{(x-3)(x-4)}{(-1-3)(-1-4)} + \beta\frac{(x+1)(x-4)}{(3+1)(3-4)} + \gamma\frac{(x+1)(x-3)}{(4+1)(4-3)}.$$

Demostració re-visitada — usant sistemes lineals

Anem a imposar la condició d'interpolació (1) a un polinomi genèric

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Obtenim

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_0 & + & a_1 x_0 & + & a_2 x_0^2 & +\cdots+ & a_n x_0^n & = & y_0 \\ a_0 & + & a_1 x_1 & + & a_2 x_1^2 & +\cdots+ & a_n x_1^n & = & y_1 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_0 & + & a_1 x_n & + & a_2 x_n^2 & +\cdots+ & a_n x_n^n & = & y_n \end{array}\right\},$$

que és un sistema lineal $(n+1) \times (n+1)$.

Tindrà solució única si i només si el determinant de la seva matriu de coeficients és no nul.

Demostració (re-visitada — usant sistemes lineals — cont.)

El determinant esmentat és

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j) = \prod_{j=0}^{n-1} \prod_{i=j+1}^{n} (x_i - x_j) \neq 0,$$

que es diu *determinant de Vandermonde*. □

Algorisme de Neville

Considerem els punts de suport $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^{n}$ i, per a $k \le n$, i una successió $\{i_0, i_1, \dots, i_k\} \subset \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Denotem per

$$P_{i_0,i_1,\dots,i_k} \in \Pi_k \tag{2}$$

l'únic polinomi que resol el problema d'interpolació

$$P_{i_0,i_1,\dots,i_k}(x_{i_j}) = f_{i_j}, \quad j = 0 \div k. \tag{3}$$

Exemple $n = 2$ i $(x_0, f_0) = (0, 1)$, $(x_1, f_1) = (1, 3)$ i $(x_2, f_2) = (3, 2)$

- $P_0(x)$ és el polinomi de grau zero que satisfà $P_0(x_0) = f_0$, i.e. $P_0(0) = 1$. Amb les notacions anteriors, $P_0 = P_{i_0}$, amb $i_0 = 0$.
- $P_{0,2}(x)$ és el polinomi de grau ≤ 1 que satisfà $P_{0,2}(x_0) = f_0$ i $P_{0,2}(x_2) = f_2$, és a dir, $P_{0,2}(0) = 1$, $P_{0,2}(3) = 2$. Amb les notacions anteriors, $P_{0,2} = P_{i_0,i_1}$ amb $i_0 = 0$, $i_1 = 2$.
- $P_{0,1,2}(x)$ és el polinomi de grau ≤ 2 que satisfà $P_{0,1,2}(0) = 1$, $P_{0,1,2}(1) = 3$, $P_{0,1,2}(3) = 2$.

Vegem la recurrència que dóna lloc a l'algorisme de Neville en forma de proposició.

Proposició (Algorisme de Neville)

Se satisfà

$$P_i(x) = f_i, \tag{4}$$

$$P_{i_0,i_1,\ldots,i_k}(x) = \frac{(x - x_{i_0})P_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(x) - (x - x_{i_k})P_{i_0,i_1,\ldots,i_{k-1}}(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}}. \tag{5}$$

Demostració

La igualtat (4) és trivial. Per veure (5), denotem per $R(x)$ la part dreta de la igualtat i provem per inducció que satisfà (2) i (3). Llavors, per unicitat del polinomi interpolador, tindrem $R(x) = P_{i_0 i_1 \ldots i_k}(x)$.

Algorisme de Neville 2/5

Demostració (cont.)

És clar que (2) es compleix ja que

$$P_{i_1,i_2,\dots,i_k}(x), P_{i_0,i_1,\dots,i_{k-1}}(x) \in \Pi_{k-1}.$$

Per altra banda,

$$\begin{array}{rcccl} R(x_{i_0}) & = & P_{i_0,\dots,i_{k-1}}(x_{i_0}) & = & f_{i_0}, \\ R(x_{i_k}) & = & P_{i_1,\dots,i_k}(x_{i_k}) & = & f_{i_k}, \end{array}$$

degut a les propietats d'interpolació de $P_{i_0,\dots,i_{k-1}}$ i $P_{i_1,\dots,i_k}$.

Finalment

$$R(x_{i_j}) = \frac{(x_{i_j} - x_{i_0})f_{i_j} - (x_{i_j} - x_{i_k})f_{i_j}}{x_{i_k} - x_{i_0}} = f_{i_j}, \quad j = 1 \div k-1,$$

com volíem veure. $\square$

Donat x, suposem que volem avaluar $P(x)$, on P és el polinomi interpolador de Lagrange amb punts de suport $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^{n}$. Segons les notacions anteriors, $P(x) = P_{0,1,\ldots,n}(x)$.

L'organització dels càlculs de la recurrència (4), (5) en la següent taula

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	
x_0	$f_0 = P_0(x)$			
		$P_{0,1}(x)$		
x_1	$f_1 = P_1(x)$		$P_{0,1,2}(x)$	
		$P_{1,2}(x)$		$\ddots$
x_2	$f_2 = P_2(x)$			
$\vdots$	$\vdots$			

que s'omple columna a columna d'esquerra a dreta, es coneix com a *Algorisme de Neville*.

Exemple $n = 2$ i $(x_0, f_0) = (0, 1)$, $(x_1, f_1) = (1, 3)$ i $(x_2, f_2) = (3, 2)$

Volem avaluar el polinomi interpolador a $x = 2$, és a dir, volem trobar $P_{0,1,2}(2)$.
La taula de l'algorisme de Neville és

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$
$x_0 = 0$	$f_0 = P_0(2) = 1$		
		$P_{0,1}(2) = 5$	
$x_1 = 1$	$f_1 = P_1(2) = 3$		$P_{0,1,2}(2) = 10/3$
		$P_{1,2}(2) = 5/2$	
$x_2 = 3$	$f_2 = P_2(2) = 2$		

on

$$
\begin{aligned}
P_{01}(2) &= \left.\frac{(x - x_0)P_1(x) - (x - x_1)P_0(x)}{x_1 - x_0}\right|_{x=2} = \frac{(2-0)3 - (2-1)1}{1-0} = 5 \\
P_{12}(2) &= \left.\frac{(x - x_1)P_2(x) - (x - x_2)P_1(x)}{x_2 - x_1}\right|_{x=2} = \frac{(2-1)2 - (2-3)3}{3-1} = \frac{5}{2} \\
P_{012}(2) &= \left.\frac{(x - x_0)P_{12}(x) - (x - x_2)P_{01}(x)}{x_2 - x_0}\right|_{x_2} = \frac{(2-0)\frac{5}{2} - (2-3)5}{3-0} = \frac{10}{3}
\end{aligned}
$$

El mètode de Neville és adequat per a avaluar el polinomi interpolador a un punt una única vegada, però és ineficient per a avaluar-lo diverses vegades. Per a això, el que voldrem és tenir l'expressió general del polinomi interpolador i avaluar-la tantes vegades com calgui. D'això ens ocuparem en aquesta secció.

Suposem que volem trobar $P_n \in \Pi_n$ polinomi interpolador de Lagrange amb punts de suport $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^{n}$.

És convenient escriure'l en la forma:

$$\begin{aligned} P_n(x) = & a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ & + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{6}$$

En primer lloc, aquesta formulació permet avaluar fàcilment el polinomi interpolador mitjançant l'*esquema de Horner*, per exemple

$$P_3(x) = a_0 + (x - x_0)\Big[a_1 + (x - x_1)[a_2 + (x - x_2)a_3]\Big]. \qquad (7)$$

Per altra banda, si imposem la condició d'interpolació a (6), obtenim

$$\begin{cases} f_0 = P_n(x_0) = a_0 \\ f_1 = P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ f_n = P_n(x_n) = a_0 + a_1(x_n - x_0) + \cdots + a_n(x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1}) \end{cases}$$

Aquest és un sistema d'equacions lineal $(n+1)\times(n+1)$, triangular, que es pot resoldre recurrentment:

$a_0 = f_0$,
$a_1 = (f_1 - a_0)/(x_1 - x_0)$,
$a_2 = \big(f_2 - a_0 - a_1(x_2 - x_0)\big)/\big((x_2 - x_0)(x_2 - x_1)\big), \ldots$

En particular, té solució única (i aquesta és una altra demostració d'existència i unicitat del polinomi interpolador).

Per a estudiar el cas general introduïm la notació següent:

Definició

Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funció, $\{x_i\}_{i=0}^{k} \subset \mathbb{R}$ diferents dos a dos. Definim la *diferència dividida d'ordre k de f aplicada als arguments* $x_0, \ldots, x_k$, que denotarem per $f[x_0, \ldots, x_k]$, com el coeficient de grau més gran del polinomi interpolador de Lagrange amb punts de suport $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{k}$.

Nota

Les diferències dividides estan ben definides degut a l'existència i unicitat del polinomi interpolador.

Proposició

El polinomi interpolador de Lagrange amb punts de suport $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$ *és*

$$P_n(x) = f[x_{i_0}] + f[x_{i_0}, x_{i_1}](x - x_{i_0}) + f[x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2}](x - x_{i_0})(x - x_{i_1}) + \dots + f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}](x - x_{i_0})(x - x_{i_1}) \dots (x - x_{i_{n-1}}).$$

Demostració

Recuperem les notacions de l'algorisme de Neville: per a $\{i_0, \dots, i_k\} \subset \{0, \dots, n\}$ denotem per $P_{i_0,\dots,i_k}$ l'únic polinomi de grau $\leq k$ que verifica $P_{i_0,\dots,i_k}(x_{i_j}) = f(x_{i_j})$ per $j = 0 \div k$.

Demostració

Observem que, per definició, $P_{i_0,\dots,i_k}(x) - P_{i_0,\dots,i_{k-1}}(x)$ és un polinomi de grau $\leq k$ que té zeros $x_{i_0}, \dots, x_{i_{k-1}}$.

Per tant, existeix una única constant $f_{i_0,\dots,i_k}$ tal que

$$P_{i_0,\dots,i_k}(x) - P_{i_0,\dots,i_{k-1}}(x) = f_{i_0,\dots,i_k}(x - x_{i_0}) \dots (x - x_{i_{k-1}}).$$

A més, com que $P_{i_0,\dots,i_{k-1}}(x)$ té grau $\leq k-1$, $f_{i_0,\dots,i_k}$ és el coeficient del terme dominant de $P_{i_0,\dots,i_k}(x)$.

Llavors,

$$P_{i_0,\dots,i_k}(x) - P_{i_0,\dots,i_{k-1}}(x) = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}](x - x_{i_0}) \dots (x - x_{i_{k-1}}).$$

Demostració (Demostració (cont.))

Aleshores, per la unicitat del polinomi interpolador, $P_n(x) = P_{i_0,\ldots,i_n}(x)$ per a tota elecció de $i_0, \ldots, i_n$ i, per tant,

$$\begin{aligned} P_{i_0,\ldots,i_n}(x) =& P_{i_0,\ldots,i_{n-1}}(x) + f[x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}](x - x_{i_0}) \ldots (x - x_{i_{n-1}}) \\ =& P_{i_0,\ldots,i_{n-2}}(x) + f[x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-1}}](x - x_{i_0}) \ldots (x - x_{i_{n-2}}) \\ & \qquad + f[x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}](x - x_{i_0}) \ldots (x - x_{i_{n-1}}) \\ & \vdots \\ =& P_{i_0}(x) + f[x_{i_0}, x_{i_1}](x - x_{i_0}) + \\ & \quad + f[x_{i_0}, x_{i_1}, x_{i_2}](x - x_{i_0})(x - x_{i_1}) + \cdots + \\ & \quad + f[x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}](x - x_{i_0})(x - x_{i_1}) \ldots (x - x_{i_{n-1}}) \end{aligned} \tag{8}$$

A més, per definició, $P_{i_0}(x) = f(x_{i_0}, x_{i_1}) = f[x_{i_0}]$. $\square$

A la vista de la proposició anterior, per a calcular el polinomi interpolador ens falta una fórmula (recursiva) per les diferències dividides.

Proposició (Mètode de les diferencies dividides de Newton)

Per $x \in \mathbb{R}$, se satisfà

$$f[x] = f(x),$$

i, per $n \in \mathbb{N}$, $x_0, \ldots, x_n \subset \mathbb{R}$ diferents dos a dos,

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}. \tag{9}$$

Demostració

La primera igualtat és òbvia a partir de les definicions (ja la hem justificat abans).

Per la **Proposició de l'algorisme de Neville**, sabem que

$$P_{0,\dots,n}(x) = \frac{(x - x_0)P_{1,\dots,n}(x) - (x - x_n)P_{0,\dots,n-1}(x)}{x_n - x_0},$$

d'on

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}. \tag{10}$$

$\square$

El càlcul del polinomi interpolador de Lagrange mitjançant les diferències dividides de Newton se sol organitzar en una taula semblant a la de l'algorisme de Neville:

Exemple $n = 2$ i $(x_0, f_0) = (0, 1)$, $(x_1, f_1) = (1, 3)$ i $(x_2, f_2) = (3, 2)$

La taula de diferències dividides és

$$
\begin{array}{r|llll}
x_0 = 0 & f[x_0] = 1 & & & \\
 & & f[x_0, x_1] = \frac{3-1}{1-0} = 2 & & \\
x_1 = 1 & f[x_1] = 3 & & & f[x_0, x_1, x_2] = \frac{-1/2-2}{3-0} = -\frac{5}{6} \\
 & & f[x_1, x_2] = \frac{2-3}{3-1} = -\frac{1}{2} & & \\
x_2 = 3 & f[x_2] = 2 & & &
\end{array}
$$

que s'omple per columnes, d'esquerra a dreta (observeu com es tradueix la recurrència (9) sobre la taula). El polinomi interpolador és, d'acord amb la proposició anterior,

$$
\begin{aligned}
P(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&= 1 + 2x - \frac{5}{6}x(x - 1).
\end{aligned}
$$

Exemple $n = 2$ i $(x_0, f_0) = (0, 1)$, $(x_1, f_1) = (1, 3)$ i $(x_2, f_2) = (3, 2)$ (cont.)

Noteu que els coeficients que entren al polinomi interpolador són els de la part de dalt de la taula de diferències dividides.

Anem a trobar el polinomi interpolador per Neville:

$x_0 = 0$	$P_0(x) = f_0 = 1$		
		$P_{0,1}(x) = 2x + 1$	
$x_1 = 1$	$P_1(x) = f_1 = 3$		$P_{0,1,2} = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{17}{6}x + 1$
		$P_{1,2}(x) = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}$	
$x_2 = 3$	$P_2(x) = f_2 = 2$		

on els càlculs intermedis per completar la taula són

$$P_{0,1}(x) = \frac{(x - x_0)P_1(x) - (x - x_1)P_0(x)}{x_1 - x_0} = \frac{(x - 0)3 - (x - 1)1}{1} = 2x + 1$$

$$P_{1,2}(x) = \frac{(x - x_1)P_2(x) - (x - x_2)P_1(x)}{x_2 - x_1} = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}$$

$$P_{0,1,2}(x) = \frac{(x - x_0)P_{1,2}(x) - (x - x_2)P_{0,1}(x)}{x_2 - x_0} = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{17}{6}x + 1$$

Exemple $n = 2$ i $(x_0, f_0) = (0, 1)$, $(x_1, f_1) = (1, 3)$ i $(x_2, f_2) = (3, 2)$ (cont.)

El polinomi interpolador és, per tant,

$$P(x) = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{17}{6}x + 1,$$

que coincideix amb el que havíem calculat amb diferències dividides (expandiu-lo). A més,

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1] &= 2 = \text{coeficient de grau màxim de } P_{0,1}, \\ f[x_1, x_2] &= -1/2 = \text{coeficient de grau màxim de } P_{1,2}, \\ f[x_0, x_1, x_2] &= -5/6 = \text{coeficient de grau màxim de } P_{0,1,2}, \end{aligned}$$

d'acord amb la definició de diferències dividides.

Tot i que aquí ho hem fet amb finalitats il·lustratives, noteu que no és eficient trobar l'expressió general del interpolador pel mètode de Neville, donat que requereix manipulació simbòlica. El mètode de Neville és adequat per a avaluar el polinomi interpolador a un punt una única vegada.

Hem vist tres mètodes de càlcul del polinomi interpolador de Lagrange:

- usar polinomis bàsics de Lagrange,
- l'algorisme de de Neville, i
- les diferències dividides de Newton.

Si hem d'avaluar el polinomi interpolador de Lagrange $P \in \Pi_n$ corresponent a determinats punts de suport $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^n$ una única vegada (per exemple, només necessitem $P(3)$), la millor opció és usar l'algorisme de Neville, donat que ens estalvia construir explícitament $P(x)$.

Si hem d'avaluar P a diversos punts, llavors és més eficient construir explícitament $P(x)$ mitjançant les diferències dividides de Newton, i llavors avaluar-lo tants cops com calgui (aprofitant l'esquema de Horner). Recordem que amb aquest algorisme podem afegir nodes d'interpolació i re-calcular el polinomi interpolador sense perdre els càlculs ja realitzats. Comparació entre els diversos mètodes 1/2

L'expansió en polinomis bàsics de Lagrange és d'interès principalment teòric. No obstant, hi ha una situació pràctica en la que pot ser interessant, i és quan hem de treballar amb diversos polinomis interpoladors amb les mateixes abscisses de suport. Concretament, si definim

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)},$$

llavors el polinomi interpolador de Lagrange amb punts de suport $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^n$ és

$$P(x) = f_0 L_0(x) + f_1 L_1(x) + \cdots + f_n L_n(x).$$

Si ara necessitem el polinomi interpolador amb punts de suport $\{(x_i, g_i)\}_{i=0}^n$ (o sigui, només canviem les ordenades de suport), el podem escriure com

$$Q(x) = g_0 L_0(x) + g_1 L_1(x) + \cdots + g_n L_n(x),$$

on les $L_i(x)$ són les mateixes d'abans.

Comparació entre els diversos mètodes 2/2

Error a la interpolació de Lagrange

Teorema

Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}, $\{x_i\}_{i=0}^{n} \subset [a, b]$ diferents dos a dos, $P \in \Pi_n$ polinomi interpolador de Lagrange amb punts de suport $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$. Aleshores, $\forall x \in [a, b]$,

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\omega_n(x),$$

on $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ i $\xi(x) \in \langle x_0, \dots, x_n, x\rangle$ és una funció desconeguda de x.

Demostració

Fixem $x \in [a, b]$.

Si $x = x_i$ per $i \in \{0, \dots, n\}$, aleshores $\omega(x_i) = 0$ i $f(x_i) - P(x_i) = 0$; i el teorema es compleix escollint $\xi(x)$ arbitrari.

Error a la interpolació de Lagrange 1/14

Error a la interpolació de Lagrange (cont.)

Demostració (cont.)

Suposem $x \notin \{x_0, \ldots, x_n\}$. Considerem la funció

$$F(z) := f(z) - P(z) - \omega(z)S(x), \quad \text{on} \quad S(x) = \frac{f(x) - P(x)}{\omega(x)}$$

(recordeu que x està fixada, i noteu que $S(x)$ és constant respecte de z).

És immediat comprovar que F té $n+2$ zeros (respecte de z): $x_0, \ldots, x_n, x$:

- $F(x_i) = f(x_i) - P(x_i) - \omega(x_i)S(x) = 0 - 0S(x) = 0.$
- $F(x) = f(x) - P(x) - \omega(x)\frac{f(x)-P(x)}{\omega(x)} = 0.$

Ordenem-los i canviem-los de nom: siguin

$$\{\xi_0^{(0)}, \xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_{n+1}^{(0)}\} := \{x_0, \ldots, x_n, x\}$$

amb $\xi_0^{(0)} < \xi_1^{(0)} < \cdots < \xi_n^{(0)} < \xi_{n+1}^{(0)}$.

Demostració (cont.)

Ara, apliquem el teorema de Rolle $n+1$ cops:

$$
\begin{array}{rrll}
 & F \text{ té } n+2 \text{ zeros:} & \{\xi_i^{(0)}\}_{i=0}^{n+1} & \\
\stackrel{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} & F' \text{ té } n+1 \text{ zeros:} & \{\xi_i^{(1)}\}_{i=1}^{n+1}, & \xi_i^{(1)} \in (\xi_{i-1}^{(0)}, \xi_i^{(0)}) \\
\stackrel{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} & F'' \text{ té } n \text{ zeros:} & \{\xi_i^{(2)}\}_{i=2}^{n+1}, & \xi_i^{(2)} \in (\xi_{i-1}^{(1)}, \xi_i^{(1)}) \\
\vdots & \vdots & & \\
\stackrel{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} & F^{(n)} \text{ té } 2 \text{ zeros:} & \{\xi_i^{(n)}\}_{i=n}^{n+1}, & \xi_i^{(n)} \in (\xi_{i-1}^{(n-1)}, \xi_i^{(n-1)}) \\
\stackrel{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} & F^{(n+1)} \text{ té } 1 \text{ zero:} & \{\xi_i^{(n+1)}\}_{i=n+1}^{n+1}, & \xi_i^{(n+1)} \in (\xi_{i-1}^{(n)}, \xi_i^{(n)})
\end{array}
$$

Llavors tenim

$$0 = F^{(n+1)}(\xi_{n+1}^{(n+1)}) = f^{(n+1)}(\xi_{n+1}^{(n+1)}) - (n+1)!S(x),$$

donat que : P és un polinomi de grau n i, per tant, la seva derivada $n+1$ és zero, i que $\omega(z)$ és un polinomi mònic de grau $n+1$ i, per tant, la seva derivada $n+1$ és $(n+1)!$.

Error a la interpolació de Lagrange (cont.)

Demostració (cont.)

Aïllant $S(x)$ de la fórmula anterior tenim

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1}^{(n+1)})}{(n+1)!} = S(x) = \frac{f(x) - P(x)}{\omega(x)},$$

i només cal multiplicar per $\omega(x)$.

Noteu que $\xi_{n+1}^{(n+1)}$ depèn de x, donat que x surt a la llista de punts amb la que comencem a aplicar Rolle. $\square$

Observacions

1. No tenim cap control sobre $\xi(x)$, de manera que la fitació més fina de l'error d'interpolació que podem fer és

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\max_{y\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(y)\right|}{(n+1)!}|\omega(x)|$$

(on $[a, b]$ el prenem tan petit com puguem).

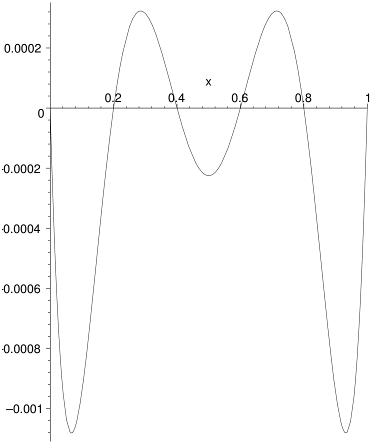
Error a la interpolació de Lagrange (cont.)

Observacions (veieu les figures de la plana següent)

2. Per a abscisses equiespaiades, la funció $\omega(x)$ és simètrica respecte de $(x_0 + x_n)/2$ per n senar, antisimètrica respecte del mateix punt per n parell. La podeu dibuixar amb Maple fent

```
plot(mul(x-i/n,i=0..n), x=0..1);
```

   (proveu diversos valors de i vegeu la figura següent).
3. Observeu que $|\omega(x)|$ és més petita al mig que a les puntes. Per això convé que les abscisses d'interpolació estiguin distribuïdes el més simètricament possible respecte del punt on interpolem.
4. La funció $|\omega(x)|$ creix molt ràpidament fora de $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$. Això ens diu que *extrapolar* (avaluar el polinomi interpolador fora de l'interval generat per les abscisses d'interpolació, i.e., fora de $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$) és perillós i s'ha de fer amb compte.



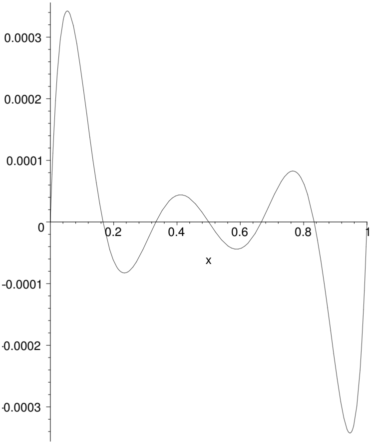


Figura: Representació gràfica de $\omega(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$ amb abscisses equiespaiades a $[0, 1]$ ($x_i = i/n,\ i = 0 \div n$), per $n = 5$ (esquerra) i $n = 6$ (dreta).

Error a la interpolació de Lagrange 6/14

Exercici (per lliurament suplementari)

Demostreu que per punts equiespaiats (és a dir, $x_i = x_0 + ih$ amb $h := \frac{x_n - x_0}{n}$)

$$|(\omega(x)| \leq h^{n+1} n!.$$

Exemple (sobre l'error d'interpolació)

Considerem el següent problema d'interpolació:

100	101	102	103	100.5
log(100)	log(101)	log(102)	log(103)	$P_3(100.5)$

on $P_3(100.5)$ denota el valor obtingut al avaluar el polinomi interpolador de grau 3 al punt 100.5.
En aquest cas,

$$f(x) - P_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}\omega_n(x)$$

i

$$f(x) = \log(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$
$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \qquad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}.$$

Exemple (sobre l'error d'interpolació – cont.)

Per tant,

$$\log(x) - P_3(x) = -\frac{6}{\xi^4(x)4!}(x-100)(x-101)(x-102)(x-103) \text{ i}$$

$$\log(100.5) - P_3(100.5) = -\frac{6}{\xi^4(x)4!}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right),$$

amb $\xi(x) \in [100, 103]$ (o, equivalentment, $\frac{1}{103} \leq \frac{1}{\xi(x)} \leq \frac{1}{100}$).

Llavors (suposant que $\log(100)$, $\log(101)$, $\log(102)$ i $\log(103)$ siguin exactes),

$$|\log(100.5) - P_3(100.5)| = \frac{6 \cdot 3 \cdot 5}{\xi^4(x) \cdot 4! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \leq \frac{15}{64}\frac{1}{100^4} \approx 2.34 \cdot 10^{-9}.$$

Exemple (sobre l'error d'interpolació – cont.)

Si log(100), log(101), log(102) i log(103) no fossin exactes tindríem

100	101	102	103	100.5
$\log(100) \pm \varepsilon_1$	$\log(101) \pm \varepsilon_2$	$\log(102) \pm \varepsilon_3$	$\log(103) \pm \varepsilon_4$	$\widetilde{P}_3(100.5)$

on $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3|$ i $|\varepsilon_4| < \varepsilon$ i $\widetilde{P}_3(100.5)$ és l'aproximació de $P_3(100.5)$ tenint en compte els errors. En aquest cas,

$$\left|P_3(100.5) - \widetilde{P}_3(100.5)\right| < \delta$$

per un cert δ que podem estimar amb la fórmula de propagació d'errors, i

$$\left|\log(100.5) - \widetilde{P}_3(100.5)\right| \le |\log(100.5) - P_3(100.5)| + \left|P_3(100.5) - \widetilde{P}_3(100.5)\right|$$
$$\approx 2.34 \cdot 10^{-9} + \delta.$$

Observació

Una altra expressió per l'error d'interpolació és

$$f(x) - P(x) = f[x_0, \ldots, x_n, x]\omega(x), \tag{11}$$

donat que

$$f(x) = \underbrace{f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})}_{=P(x)}$$
$$+ f[x_0, \ldots, x_n, x](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n)$$

i aquesta igualtat se segueix la unicitat del polinomi interpolador i del fet que la part de la dreta és l'expansió en diferències dividides del polinomi interpolador als punts $\{(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n)), (x, f(x))\}$.

D'acord amb aquesta observació, tenim el següent

Corol·lari

Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *de classe* C^{n+1}, $\{x_0, \dots, x_n\} \subset [a, b]$ *diferents dos a dos,* $x \in [a, b]$, $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$. *Aleshores existeix* $\xi_x \in \langle x_0, \dots, x_n, x\rangle$ *tal que*

$$f[x_0, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

Observació

Noteu que el que hem provat equival a dir que per $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ diferents dos a dos existeix $\xi \in \langle x_0, \dots, x_n\rangle$ tal que

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Noteu també que l'ordre de la derivada és el nombre d'arguments menys un.

Demostració

Sigui $P(x)$ el polinomi interpolador als punts $\{(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))\}$.

L'error d'interpolació és, d'acord amb el teorema i observació anteriors,

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega(x) = f[x_0, \dots, x_n, x]\omega(x),$$

i, com que $x \notin \{x_i\}_{i=0}^{n}$, podem dividir per $\omega(x)$ i tenim la igualtat que volíem. $\square$

Proposició (simetria de les diferències dividides)

Siguin $\{x_i\}_{i=0}^{n} \subset [a, b]$ *diferents dos a dos,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funció,* $\sigma \in S_n$ *permutació. Aleshores*

$$f[x_0, \ldots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n)}].$$

Demostració

En les notacions de la proposició de la recurrència de l'algorisme de Neville, $f[x_0, \ldots, x_n]$ és el coeficient de grau màxim de $P_{0,\ldots,n}$, i $f[x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n)}]$ és el coeficient de grau màxim de $P_{\sigma(0),\ldots,\sigma(n)}$. Però $P_{0,\ldots,n}$ i $P_{\sigma(0),\ldots,\sigma(n)}$ resolen el mateix problema d'interpolació de Lagrange, i, per unicitat de solució del problema d'interpolació de Lagrange, han de ser iguals. $\square$

Interpolació en nodes equiespaiats

Direm que les abscisses d'interpolació són *equiespaiades* si

$$x_i = x_0 + ih \text{ per } i = 0, 1, \ldots, n \quad \text{amb} \quad h := \frac{x_n - x_0}{n}.$$

Definició

$$\Delta f(x) := f(x+h) - f(x) \text{ i}$$
$$\Delta^{n+1} f(x) := \Delta\left(\Delta^n f(x)\right).$$

El lema següent dona una fórmula per a calcular les diferències dividides a partir de les diferències $\Delta^{n+1} f(x)$.

Lema

$$\Delta^n f(x_0) = n! \cdot h^n \cdot f[x_0, x_1, \ldots, x_n].$$

Interpolació en nodes equiespaiats (cont.)

Demostració

Demostrarem el lema per inducció. El cas $n = 1$ és un càlcul directe:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = h\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = hf[x_0, x_1].$$

Ara suposem que el lema és cert per k i demostrem-ho per $k+1$.

$$\begin{aligned}\Delta^{k+1} f(x_0) &= \Delta\left(\Delta^k f(x_0)\right) = \Delta^k f(x_1) - \Delta^k f(x_0)\\ &= k! \cdot h^k \cdot (f[x_1, \ldots, x_{k+1}] - f[x_0, x_1, \ldots, x_k])\\ &= k! \cdot h^k \cdot (k+1)h \cdot \frac{f[x_1, \ldots, x_{k+1}] - f[x_0, x_1, \ldots, x_k]}{x_{k+1} - x_0}\\ &= (k+1)! \cdot h^{k+1} \cdot f[x_0 x_1, \ldots, x_{k+1}].\end{aligned}$$

$\square$

Interpolació en nodes equiespaiats (cont.)

Exemple (Fórmules de la suma de quadrats)

Volem trobar les fórmules per $1^k + 2^k + \cdots + n^k$ sabent que són un polinomi $P_{k+1}(n)$ de grau $k+1$ avaluat a n.

Comencem amb $k = 1$: $S(n) = 1 + 2 + \cdots + n$. Tenim

n	0	1	2	3	4	5
$S(n)$	0	1	3	6	10	15

i la corresponent taula de diferències és:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	0			
		1		
1	1		1	
		2		0
2	3		1	
		3		0
3	6		1	
		4		0
4	10		1	
		5		
5	15			

Exemple (Fórmules de la suma de quadrats – cont.)

Llavors, pel lema anterior usant el fet que $h = 1$,

$$\begin{aligned} S(n) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}(x - x_0)(x - x_1) \\ &= 0 + \frac{1}{1}(n - 0) + \frac{1}{2}(n - 0)(n - 1) = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Exemple (Fórmules de la suma de quadrats – cont.)

Anem a fer ara $k = 2$: $S(n) = 1^1 + 2^2 + \cdots + n^2$.

Tenim:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	
0	0				
		1^2			
1	1		3		
		2^2		2	
2	5		5		0
		3^2		2	
3	14		7		0
		4^2		2	
4	30		9		
		5^2			
5	55				

Exemple (Fórmules de la suma de quadrats – cont.)

i, per tant,

$$\begin{aligned}
S(n) &= f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!}(x - x_0)(x - x_1) \\
&\quad + \frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&= 0 + n + \frac{3}{2}n(n-1) + \frac{2}{6}n(n-1)(n-2) \\
&= \frac{1}{3}n(n+1)\left(n + \tfrac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Es pot veure a l'exemple que les columnes Δ^2 en el primer cas i Δ^3 en el segon són constants. Això es verifica, en general, en el cas de polinomis com mostra el corol·lari següent.

Corol·lari (Test de "polinomialitat")

Suposem que la funció f és un polinomi de grau n i que la interpolem en nodes equiespaiats. Llavors,

$$\Delta^n f(x) \equiv constant.$$

Demostració

Pel lema i corol·lari anteriors,

$$\Delta^n f(x) = n! \cdot h^n \cdot f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = n! \cdot h^n \cdot \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!} = h^n f^{(n)}(\xi_x)$$

amb $\xi_x \in (x_0, x_n)$.

Si f és un polinomi de grau n, $f^{(n)} \equiv$ constant. Això acaba la demostració del corol·lari. □

En aquesta secció volem trobar polinomis dels quals, a més de prescriure'n valors, volem prescriure valors de les seves derivades.

Concretament, donats

- $\{x_i\}_{i=0}^{m} \subset \mathbb{R}$, verificant $x_0 < \cdots < x_m$ (abscisses d'interpolació),
- $\{n_i\}_{i=0}^{m} \subset \mathbb{N}$ (ordres màxims de derivació decrementats en una unitat),
- $\{y_i^{(k)}\}_{i=0\div m, k=0\div n_i-1} \subset \mathbb{R}$ (ordenades d'interpolació),

cerquem $H_n \in \Pi_n$ amb

$$n_0 + n_1 + \cdots + n_m = n + 1$$

tals que

$$H_n^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}, \quad i = 0 \div m, \quad k = 0 \div n_i - 1.$$

Exemple

Suposem que cerquem $H_5 \in \Pi_5$ verificant

$$
\begin{array}{lll}
H_5(1) = 1, & H_5(2) = 4, & H_5(3) = 6, \\
H_5'(1) = 2, & H_5'(2) = 5, & \\
H_5''(1) = 3. & &
\end{array}
$$

Llavors, en les notacions anteriors,

$$
\begin{array}{lll}
x_0 = 1, & x_1 = 2, & x_2 = 3, \\
n_0 = 3, & n_1 = 2, & n_2 = 1, \\
y_0^{(0)} = 1, & y_1^{(0)} = 4, & y_2^{(0)} = 6, \\
y_0^{(1)} = 2, & y_1^{(1)} = 5, & \\
y_0^{(2)} = 3. & &
\end{array}
$$

Proposició

El problema d'interpolació d'Hermite té solució única.

Observació

El problema d'interpolació de Lagrange és el cas particular $n_0 = n_1 = \cdots = n_m = 1$.

Demostració

Vegem primer la unicitat. Siguin $H_1, H_2 \in \Pi_n$ solució del problema d'interpolació d'Hermite. Aleshores

$$H_1^{(k)}(x_i) = H_2^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}, \quad i = 0 \div m, \quad k = 0 \div n_i - 1.$$

El polinomi $Q := H_1 - H_2$ té $n_0 + n_1 + \cdots + n_m = n + 1$ zeros comptant multiplicitats. Com que és de grau $\leq n$, pel teorema fonamental de l'Àlgebra necessàriament $Q = 0$.

Demostració (cont.)

Per veure'n l'existència, considerem un polinomi general $P(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$ de grau $\leq n$. $P(x)$ serà solució del problema d'interpolació d'Hermite si i només si

$$P^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}, \quad i = 0 \div m, \quad k = 0 \div n_i - 1.$$

Aquest és un sistema d'equacions lineals en $c_0, \ldots, c_n$, de $n_0 + n_1 + \cdots + n_m = n + 1$ equacions i $n + 1$ incògnites. Com que sabem que té solució única, la seva matriu de coeficients necessàriament és no singular, i per tant té solució. $\square$

Càlcul del polinomi interpolador d'Hermite

Es pot fer mitjançant les diferències dividides de Newton, de manera completament anàloga a la interpolació de Lagrange.

D'ara endavant, els parells

$$\begin{gathered}(x_0, y_0^{(0)}), \dots, (x_0, y_0^{(n_0-1)}),\\ (x_1, y_1^{(0)}), \dots, (x_1, y_1^{(n_1-1)}),\\ \vdots\\ (x_m, y_m^{(0)}), \dots, (x_m, y_m^{(n_m-1)}),\end{gathered}$$

els denotarem per:

$$\begin{gathered}(\xi_0, f_0), \dots, (\xi_{n_0-1}, f_{n_0-1}),\\ (\xi_{n_0}, f_{n_0}), \dots, (\xi_{n_0+n_1-1}, f_{n_0+n_1-1}),\\ \vdots\\ (\xi_{n_0+\dots+n_{m-1}}, f_{n_0+\dots+n_{m-1}}), \dots, (\xi_{n_0+\dots+n_m-1}, f_{n_0+\dots+n_m-1})\end{gathered}$$

(recordeu que $n_0 + \dots + n_m - 1 = n$).

Càlcul del polinomi interpolador d'Hermite (cont.)

Com que $x_0 < x_1 < \cdots < x_m$, tenim $\xi_0 \leq \xi_1 \leq \cdots \leq \xi_n$. El polinomi interpolador d'Hermite és

$$\begin{aligned} H_n(x) &= f[\xi_0] + f[\xi_0, \xi_1](x - \xi_0) + f[\xi_0, \xi_1, \xi_2](x - \xi_0)(x - \xi_1) \\ &\quad + \cdots + f[\xi_0, \ldots, \xi_n](x - \xi_0)(x - \xi_1) \ldots (x - \xi_{n-1}) \end{aligned}$$

Ara,el càlcul de les diferències dividides donat per la **Proposició de la recurrència de les diferències dividides**, s'ha de modificar, donat que poden haver-hi arguments repetits.

Observem que l'expressió

$$\frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

no està definida quan $x_n = x_0$.

Càlcul del polinomi interpolador d'Hermite 2/7

Per a resoldre aquest problema usarem el resultat que diu que per punts diferents dos a dos, existeix $\xi_x \in \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ tal que

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!},$$

i farem un pas al límit:

$$\boxed{f[\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{n+1}] = \lim_{\substack{x_1 \to x_0 \\ x_2 \to x_0 \\ \cdots \\ x_n \to x_0}} f[x_0, \dots, x_n] = \lim_{\substack{x_1 \to x_0 \\ x_2 \to x_0 \\ \cdots \\ x_n \to x_0}} \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.}$$

Això justifica la següent definició generalitzada de les diferències dividides:

$$f[\xi_i, \dots, \xi_{i+j}] = \begin{cases} \frac{f[\xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+j}] - f[\xi_i, \dots, \xi_{i+j-1}]}{\xi_{i+j} - \xi_i} & \text{si } \xi_i \neq \xi_{i+j}, \\ \frac{y_\ell^{(j)}}{j!} & \text{si } \xi_i = \xi_{i+j}, \\ & \text{on } \ell \text{ és tal que } x_\ell = \xi_i \end{cases}$$

(noteu que si $\xi_i = \xi_{i+j}$, llavors $\xi_i = \xi_{i+1} = \xi_{i+2} = \cdots = \xi_{i+j}$).

Exemple (continuem l'exemple anterior)

Siguin $\{x_i\}_{i=0}^2$, $\{n_i\}_{i=0}^2$ i $\{y_i^{(j)}\}_{i=0\div 2, j=0\div n_i-1}$ donats per les taules

i	0	1	2
x_i	1	2	3
n_i	3	2	1

$y_i^{(j)}$:

$j\backslash i$	0	1	2
0	1	4	6
1	2	5	
2	3		

Amb les notacions anteriors,

$$\xi_0 = x_0, \quad \xi_1 = x_0, \quad \xi_2 = x_0, \quad \xi_3 = x_1, \quad \xi_4 = x_1, \quad \xi_5 = x_2,$$
$$f_0 = y_0^{(0)}, \quad f_1 = y_0^{(1)}, \quad f_2 = y_0^{(2)}, \quad f_3 = y_1^{(0)}, \quad f_4 = y_1^{(1)}, \quad f_5 = y_2^{(0)}.$$

Exemple (continuem l'exemple anterior)

Els càlculs es poden organitzar així:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
\hline
x_0 & f[x_0] & & & & & \\
 & & f[x_0,x_0] & & & & \\
x_0 & f[x_0] & & f[x_0,x_0,x_0] & & & \\
 & & f[x_0,x_0] & & f[x_0,x_0,x_0,x_1] & & \\
x_0 & f[x_0] & & f[x_0,x_0,x_1] & & f[x_0,x_0,x_0,x_1,x_1] & \\
 & & f[x_0,x_1] & & f[x_0,x_0,x_1,x_1] & & f[x_0,x_0,x_0,x_1,x_1,x_2] \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_0,x_1,x_1] & & f[x_0,x_0,x_1,x_1,x_2] & \\
 & & f[x_1,x_1] & & f[x_0,x_1,x_1,x_2] & & \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_1,x_1,x_2] & & & \\
 & & f[x_1,x_2] & & & & \\
x_2 & f[x_2] & & & & &
\end{array}
$$

on

$$
f[x_0] = y_0^{(0)}, \qquad f[x_1] = y_1^{(0)}, \qquad f[x_2] = y_2^{(0)},
$$

$$
f[x_0,x_0] = y_0^{(1)}/1!, \quad f[x_1,x_1] = y_1^{(1)}/1!, \quad f[x_0,x_0,x_0] = y_0^{(2)}/2!.
$$

Càlcul del polinomi interpolador d'Hermite (cont.)

Exemple (continuem l'exemple anterior)

Obtenim,

1	1					
		2				
1	1		$3/2$			
		2		$-1/2$		
1	1		1		$3/2$	
		3		1		$-13/8$
2	4		2		$-7/4$	
		5		$-5/2$		
2	4		-3			
		2				
3	6					

i, per tant, el polinomi interpolador d'Hermite buscat és

Exemple (continuem l'exemple anterior)

$$
\begin{aligned}
H_5(x) = f[x_0] &+ f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_0](x - x_0)^2 \\
&+ f[x_0, x_0, x_0, x_1](x - x_0)^3 \\
&+ f[x_0, x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^3(x - x_1) \\
&+ f[x_0, x_0, x_0, x_1, x_1, x_2](x - x_0)^3(x - x_1)^2 \\
= 1 + 2(x - 1) &+ \frac{3}{2}(x - 1)^2 - \frac{1}{2}(x - 1)^3 \\
&+ \frac{3}{2}(x - 1)^3(x - 2) - \frac{13}{8}(x - 1)^3(x - 2)^2.
\end{aligned}
$$

Comproveu que es compleix $H_5^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}$.

Tenim un resultat anàleg al del cas de Lagrange.

Teorema

Sigui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *de classe* C^{n+1}, $\{x_0, \ldots, x_m\} \subset [a, b]$, $x_0 < x_1 < \cdots < x_m$, $\{n_0, \ldots, n_m\} \subset \mathbb{N}$, $n_0 + \cdots + n_m = n + 1$. *Sigui* H_n *el polinomi interpolador d'Hermite corresponent, i.e.,*

$$H_n^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i), \quad i = 0 \div m, \quad k = 0 \div n_i - 1.$$

Aleshores, per tot $x \in [a, b]$ *existeix* $\xi_x \in \langle x_0, \ldots, x_m, x\rangle$ *tal que*

$$f(x) - H_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n_0}(x - x_1)^{n_1} \ldots (x - x_m)^{n_m}.$$

Demostració

Només fem un cas particular (en general és molt pesat).

Suposem $m = 2$, $n_0 = 2$, $n_1 = 1$, $n_2 = 3$, d'on $n = 5$.

Fixem $x \in [a, b]$.

Si $x = x_i$ per a algun i les expressions a ambdós costats del signe igual són 0 i podem prendre qualsevol ξ_x.

Suposem $x \neq x_i$ per $i = 0 \div m$ i definim

$$F(x) := f(z) - H_5(z) - \omega(z)S(x), \text{ on}$$
$$S(x) := \frac{f(x) - H_5(x)}{\omega(x)}, \text{ i}$$
$$\omega(x) := (z - x_0)^2(z - x_1)(z - x_2)^3$$

(noteu que S no depèn de z).

Demostració (cont.)

Degut a les propietats d'interpolació d'H_5, F té zeros x_0, x_1, x_2 i x:

- $F(x_i) = (f(x_i) - H_5(x_i)) - \omega(x_i)S(x) = 0 - 0S(x) = 0.$
- $F(x) = f(x) - H_5(x) - \omega(x)\frac{f(x)-H_5(x)}{\omega(x)} = 0.$

Escrivim-los ordenats i repetits amb multiplicitats, i apliquem el teorema de Rolle sis vegades (per concretar suposem que $x \in [x_1, x_2]$):

$$
\begin{array}{rlccccccccccccc}
 & F \text{ s'anul·la a} & x_0 & & x_0 & & x_1 & & x & & x_2 & & x_2 & & x_2 \\
\Longrightarrow & F' \text{ s'anul·la a} & & x_0 & & \xi_2^{(1)} & & \xi_3^{(1)} & & \xi_4^{(1)} & & x_2 & & x_2 & \\
\Longrightarrow & F'' \text{ s'anul·la a} & & & \xi_2^{(2)} & & \xi_3^{(2)} & & \xi_4^{(2)} & & \xi_5^{(2)} & & x_2 & & \\
\Longrightarrow & F''' \text{ s'anul·la a} & & & & \xi_3^{(3)} & & \xi_4^{(3)} & & \xi_5^{(3)} & & \xi_6^{(3)} & & & \\
\Longrightarrow & F^{(4)} \text{ s'anul·la a} & & & & & \xi_4^{(4)} & & \xi_5^{(4)} & & \xi_6^{(4)} & & & & \\
\Longrightarrow & F^{(5)} \text{ s'anul·la a} & & & & & & \xi_5^{(5)} & & \xi_6^{(5)} & & & & & \\
\Longrightarrow & F^{(6)} \text{ s'anul·la a} & & & & & & & \xi_6^{(6)}. & & & & & &
\end{array}
$$

on l'element de cada fila està inclòs a l'interval obert format pels dos elements més propers de la fila anterior.

Demostració (cont.)

Ara prenem $\xi_x := \xi_6^{(6)} \in \langle x_0, x_1, x_2, x \rangle$, i tenim

$$0 = F^{(6)}(\xi_x) = f^{(6)}(\xi_x) - 6!S(x),$$

ja que $H_5^{(6)}(x) = 0$ i $\omega^{(6)}(x) = 6!$. Per tant,

$$\frac{f(x) - H_5(x)}{\omega(x)} = S(x) = \frac{f^{(6)}(\xi_x)}{6!}$$

i només cal multiplicar per $(x - x_0)^2(x - x_1)(x - x_2)^3$. $\square$

Error a la interpolació d'Hermite (cont.)

Observació

Per $m = 1$, el polinomi interpolador d'Hermite és el polinomi de Taylor, donat que $n_0 = m + 1$,

$$
\begin{aligned}
H_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_0](x - x_0)^2 \\
+ \cdots + f[x_0, \overset{n+1}{\ldots}, x_0](x - x_0)^n \\
= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\
+ \cdots + \frac{f^{n j)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.
\end{aligned}
$$

A més, l'error d'interpolació d'Hermite és, en aquest cas, la resta de Lagrange del polinomi de Taylor:

$$f(x) - H_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Comencem aquesta secció fent paleses algunes limitacions de la interpolació de Lagrange, que fan necessari considerar altres tipus d'interpolació.

Suposem que volem aproximar $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Prenem $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ i considerem $P_n(x)$ polinomi interpolador de Lagrange a $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0}^{n}$. Pot semblar que pujant el grau (és a dir el nombre de nodes) podem millorar arbitràriament l'aproximació, és a dir,

$$\forall x \in [a, b], \quad P_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

Això no és cert en general com mostra l'exemple següent degut a Runge (que ha donat nom al que es coneix com *fenomen de Runge*).

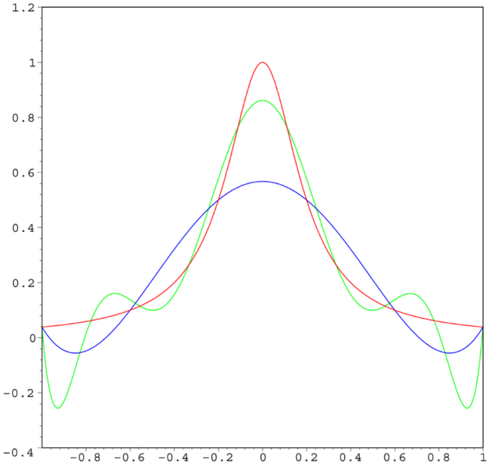


Figura (Fenomen de Runge): La corba vermella és la funció de Runge $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ a l'interval $[-1, 1]$. La corba blava és la gràfica del polinomi interpolador de grau 5 (amb 6 nodes d'interpolació igualment espaiats). La corba verda és la gràfica del polinomi interpolador de grau 9 (amb 10 nodes equiespaiats).

Notem que, d'acord amb la teoria, l'error entre la funció i el polinomi interpolador és zero mentre que l'error fora dels nodes d'interpolació empitjora per als polinomis d'ordre superior.

Voldríem un procediment interpolador que

- Mantingués una certa regularitat global.
- Permetés millorar l'aproximació arbitràriament en augmentar el número de nodes.

Una manera natural d'aconseguir el segon punt seria usar no un polinomi interpolador de grau elevat, sinó diversos polinomis interpoladors de grau més petit. Llavors, si volem tenir regularitat globalment, cal que empalmin de manera suau.

Això porta de manera natural a la noció de *spline*.

Definició

Donat un interval tancat $[a, b]$, direm que $\Delta := \{x_i\}_{i=0}^{n}$ n'és una *partició* si $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Els punts x_i s'anomenen *nodes*.

Definició

Un *spline de grau p* associat a la partició $\Delta := \{x_i\}_{i=0}^{n}$ d'un interval tancat $[a, b]$ és una funció $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^{p-1} verificant

$$s\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \Pi_p, \qquad \forall i = 0 \div n-1.$$

Denotarem per $S_p(\Delta)$ el conjunt d'splines de grau p associats a Δ.

Observació

$S_1(\Delta)$ correspon a interpolar linealment entre els nodes, mentre que $S_2(\Delta)$ correspon a la interpolació parabòlica.

Treballarem amb splines cúbics, que són els més emprats. De fet hi ha teories que mantenen que la regularitat que pot percebre l'ull humà és $\mathcal{C}^2$. Això fa ideals els splines cúbics (que són d'aquesta classe de regularitat) per a representar gràfiques "suaus".

Definició

Siguin $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n} \subset \mathbb{R}^2$ amb $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Anomenarem *spline cúbic interpolador* amb punts de suport $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n} \subset \mathbb{R}^2$ a tota funció $s \in S_3(\{x_i\}_{i=0}^{n})$ verificant

$$s(x_i) = y_i, \qquad i = 0 \div n.$$

Exemple

Donats els punts de suport $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{2}$ amb

i	0	1	2
x_i	0	1	2
y_i	1	0	3

l'spline cúbic interpolador corresponent és:

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) = 1 - 2x + x^3 & \text{si } x \in [0,1], \\ s_1(x) = 3 - 8x + 6x^2 - x^3 & \text{si } x \in [1,2]. \end{cases}$$

Podeu comprovar que:

$$s_0(0) = 1, \qquad s_0(1) = s_1(1) = 0, \qquad s_1(2) = 3,$$

$$s_0'(1) = s_1'(1) = 1$$

$$s_0''(1) = s_1''(1) = 6$$

Anem a determinar condicions d'existència i unicitat de splines cúbics interpoladors.

Fixem $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ punts de suport amb $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Per a $s \in S_3(\{x_i\}_{i=0}^{n})$ qualsevol, i denotem

$$s_i := s\Big|_{[x_i, x_{i+1}]} =: a_{i,0} + a_{i,1}x + a_{i,2}x^2 + a_{i,3}x^3.$$

Tenim un total de $4n$ coeficients a determinar.

Comptem el nombre de condicions:

- **Regularitat:** per a que $s \in C^2([x_0, x_n])$, cal demanar

$$\left.\begin{array}{rcl} s_{i-1}(x_i) & = & s_i(x_i) \\ s'_{i-1}(x_i) & = & s'_i(x_i) \\ s''_{i-1}(x_i) & = & s''_i(x_i) \end{array}\right\} \quad i = 1 \div n-1,$$

  que dóna un total de $3(n-1)$ condicions.
- **Interpolació:** cal

$$s(x_i) = y_i, \quad i = 0 \div n,$$

  que són $n+1$ condicions.

En total tenim $3(n-1) + n + 1 = 4n - 2$ condicions. Per igualar el nombre de coeficients a determinar, ens calen dues condicions més.

Se sol triar entre:

- **condicions d'extrem d'Hermite:** : per $y_0', y_n' \in \mathbb{R}$ donats, demanem
$$s'(x_0) = y_0', \qquad s'(x_n) = y_n', \tag{12}$$
- **condicions d'extrem naturals:** : demanem
$$s''(x_0) = s''(x_n) = 0, \tag{13}$$
- **condicions d'extrem periòdiques:** : demanem
$$s'(x_0) = s'(x_n), \quad s''(x_0) = s''(x_n). \tag{14}$$
Noteu que, perquè això tingui sentit, *cal que* $y_0 = y_n$!!

Els corresponents splines es diuen *d'Hermite*, *naturals* o *periòdics*, respectivament.

Noteu que totes les condicions que hem proposat són lineals en els coeficients i, com que tenim tantes equacions com coeficients a determinar, l'existència de solució equival a la unicitat. Anem a trobar un algorisme de càlcul, del qual se'n seguirà l'existència de solució (i per tant la unicitat).

Definició

Per a $s \in S_3(\{x_i\}_{i=0}^n)$, definim els seus *moments* per

$$M_i := s''(x_i).$$

Nota:

Si s és spline interpolador d'Hermite, natural o periòdic, els seus moments el determinen completament.

Farem la deducció pel cas d'splines naturals (encara que quasi tota la deducció és vàlida pels tres cassos).

Recordem que havíem definit $s_i := s\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \Pi_3$. Per tant, $s_i'' \in \Pi_1$ d'on, interpolant els nodes (x_i, M_i) i (x_{i+1}, M_{i+1}) emprant polinomis bàsics de Lagrange, tenim

$$\begin{aligned} s_i''(x) &= M_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \\ &= M_i \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{h_{i+1}}, \end{aligned}$$

on hem denotat: $\qquad h_i = x_i - x_{i-1}, \qquad i = 1 \div n.$

Integrant dos cops:

$$\begin{aligned} s_i'(x) &= -M_i \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{2h_{i+1}} + C_i, \\ s_i(x) &= M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_{i+1}} + C_i(x - x_i) + \widetilde{C}_i. \end{aligned} \tag{15}$$

Les constants d'integració C_i i $\widetilde{C}_i$ es dedueixen de les condicions d'interpolació:

$$\begin{aligned} y_i = s_i(x_i) &\Longrightarrow \widetilde{C}_i = y_i - M_i \frac{h_{i+1}^2}{6}, \\ y_{i+1} = s_i(x_{i+1}) &\Longrightarrow C_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - (M_{i+1} - M_i)\frac{h_{i+1}}{6}. \end{aligned} \tag{16}$$

Les expressions anteriors ja permetrien avaluar $s_i(x)$ per i arbitrària (donats els moments), però és més pràctic (per estabilitat numèrica i perquè permet usar l'esquema de Horner) usar l'expressió

$$\boxed{s_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i(x - x_i)^2 + \delta_i(x - x_i)^3,}$$

(que, per unicitat de l'interpolació, coincideix amb s_i).

Ara anem a deduir els coeficients $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ i δ_i.

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_i &= s_i(x_i) &&= y_i, \\ \beta_i &= s_i'(x_i) &&= \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}} - \frac{2M_i + M_{i+1}}{6} h_{i+1}, \\ \gamma_i &= \frac{1}{2} s_i''(x_i) &&= \frac{M_i}{2}, \\ \delta_i &= \frac{1}{6} s_i'''(x_i) &&= \frac{M_{i+1}-M_i}{6h_{i+1}}, \end{aligned}}$$

(recordeu que $s_i''(x_i) = M_i$ per definició dels moments).

Seguidament calculem els moments imposant continuïtat de la primera derivada: per $i = 1 \div n-1$, volem

$$s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i).$$

Usant (15) i (16), obtenim

$$M_i \frac{h_i}{2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - (M_i - M_{i-1}) \frac{h_i}{6} = -M_i \frac{h_{i+1}}{2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - (M_{i+1} - M_i) \frac{h_{i+1}}{6} \quad (17)$$

d'on

$$M_{i-1} \frac{h_i}{6} + M_i \frac{h_i + h_{i+1}}{3} + M_{i+1} \frac{h_{i+1}}{6} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}.$$

Multiplicant la darrera equació per $6/(h_i + h_{i+1})$, obtenim

$$\boxed{\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i,} \qquad i = 1 \div n-1, \qquad (18)$$

essent

$$\boxed{\begin{aligned} \mu_i &= \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \text{ i} \\ d_i &= \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right). \end{aligned}}$$

Per a determinar $M_0, \ldots, M_n$ (total $n+1$ moments) hem d'especificar quin tipus d'splines prenem i això ens determina les condicions a la frontera.

Com hem dit considerarem splines cúbics naturals.

Cas natural: Per definició tenim:

$$\boxed{\begin{aligned} M_0 &= s''(x_0) = 0 \text{ i} \\ M_n &= s''(x_n) = 0. \end{aligned}} \tag{19}$$

Ara, de l'equació (18) amb $i = 1$ tenim:

$$\mu_1 M_0 + 2M_1 + \lambda_1 M_2 = d_1 \Longleftrightarrow 2M_1 + \lambda_1 M_2 = d_1, \tag{20}$$

i, per $i = n - 1$,

$$\begin{aligned} \mu_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1} + \lambda_{n-1} M_n = d_{n-1} \Longleftrightarrow \\ \mu_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1} = d_{n-1}. \end{aligned} \tag{21}$$

Ajuntant (18) amb (19), (20) i (21), hem provat

Proposició

Siguin $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n} \subset \mathbb{R}^2$ *punts de suport,* $x_0 < \cdots < x_n$. *Sigui* $s \in S_3(\{x_i\}_{i=0}^{n})$ *el corresponent spline cúbic natural. Aleshores,* $M_0 = M_n = 0$ *i els moments* $M_1, M_2, \ldots, M_n - 1$ *de l'spline satisfan el següent sistema d'equacions*

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \mu_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix}$$

on,

$$\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \ i$$

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right).$$

per $i = 1 \div n - 1$.

Exemple (Interpolació per splines)

Anem a determinar l'spline cúbic natural amb punts de suport donats per la següent taula:

i	0	1	2	3	4
x_i	1	2	3	4	5
y_i	2	4	3	1	2

Primer trobem els moments. Sabem que $M_0 = M_4 = 0$, i que els altres moments satisfan el sistema d'equacions:

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 \\ 0 & \mu_3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

on μ_i, λ_i i d_i són els que apareixen a la proposició.

Tenint en compte que $h_i = 1 \; \forall i = 1 \div 4$, tenim:

i	λ_i	μ_i	d_i
1	$1/2$		-9
2	$1/2$	$1/2$	-3
3		$1/2$	9

Exemple (Interpolació per splines – cont.)

Resolem el sistema per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1/2 & 0 & -9 \\ 1/2 & 2 & 1/2 & -3 \\ 0 & 1/2 & 2 & 9 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1/2 & 0 & -9 \\ 0 & 15/8 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 1/2 & 2 & 9 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1/2 & 0 & -9 \\ 0 & 15/8 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 28/15 & 46/5 \end{array}\right)$$

d'on

$$M_3 = \frac{46/5}{28/15} = \frac{69}{14}$$

$$M_2 = \frac{-3/4 - (1/2)(69/14)}{15/8} = -\frac{12}{7}$$

$$M_1 = \frac{-9 - (1/2)(-12/7)}{2} = -\frac{57}{14}$$

Exemple (Interpolació per splines – cont.)

Ara, per trobar s_0, s_1, s_2, s_3, recordem que hem definit

$$s_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i(x - x_i)^2 + \delta_i(x - x_i)^3,$$

on

$$\alpha_i = y_i, \qquad \gamma_i = \frac{M_i}{2},$$

$$\beta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{2M_i + M_{i+1}}{6} h_{i+1}, \qquad \delta_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_{i+1}}.$$

Exemple (Interpolació per splines – cont.)

Llavors, els $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ surten

i	0	1	2	3
α_i	2	4	3	1
β_i	$75/28$	$9/14$	$-9/4$	$-9/14$
γ_i	0	$-57/28$	$-6/7$	$69/28$
δ_i	$-19/28$	$11/28$	$31/28$	$-23/28$

Per tant, l'spline és:

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) = 2 + \frac{75}{28}(x-1) - \frac{19}{28}(x-1)^3, & x \in [1,2], \\ s_1(x) = 4 + \frac{9}{14}(x-2) - \frac{57}{28}(x-2)^2 + \frac{11}{28}(x-2)^3, & x \in [2,3], \\ s_2(x) = 3 - \frac{9}{4}(x-3) - \frac{6}{7}(x-3)^2 + \frac{31}{28}(x-3)^3, & x \in [3,4], \\ s_3(x) = 1 - \frac{9}{14}(x-4) + \frac{69}{28}(x-4)^2 - \frac{23}{28}(x-4)^3, & x \in [4,5] \end{cases}$$

A continuació donarem una interpretació “mecànica” dels splines.

Definició

Sigui $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció de classe $\mathcal{C}^2$. Definim la (semi) norma d'f a $[a,b]$ com

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b (f''(x))^2 dx} < +\infty.$$

Aquesta semi-norma es pot interpretar (mol informalment) com el treball que realitza la funció en anar del punt $(a, f(a))$ al punt $(b, f(b))$.

Teorema

Sigui $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funció de classe* $\mathcal{C}^2$ *que interpola els nodes* $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n \subset \mathbb{R}^2$ *amb* $a \leq x_0 < \cdots < x_n \leq b$. *Sigui* $s \in S_3(\{x_i\}_{i=0}^n)$ *el corresponent spline cúbic natural. Llavors,*

$$\|f\| \geq \|s\| .$$

Observació

El teorema anterior diu que la forma que pren la funció spline és la que minimitza el treball d'anar del punt $(a, f(a))$ al punt $(b, f(b))$ *passant per tots els punts* (x_i, y_i).

Per a demostrar el teorema usarem la següent proposició.

Proposició

En les hipòtesis del teorema es té

$$\|f-s\|^2 = \|f\|^2 - \|s\|^2 - 2\left((f'-s')s''\Big|_{x_0}^{x_n} - \sum_{i=1}^{n} (f-s)s'''\Big|_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} \right).$$

Demostració (del teorema)

El fet que tan f com s interpolen ens diu que $(f-s)\Big|_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} = 0$ per a tot i.

Per tant, $\sum_{i=1}^{n} (f-s)s'''\Big|_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} = 0$. Per altra banda, com que s és natural, $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$. Llavors, $(f'-s')s''\Big|_{x_0}^{x_n} = 0$. En conseqüència,

$$\|f\|^2 - \|s\|^2 = \|f-s\|^2 \geq 0,$$

que és el que volíem demostrar. □

Demostració (de la proposició)

A partir de les definicions amb manipulacions elementals obtenim

$$
\begin{aligned}
\|f-s\|^2 &= \int_a^b (f''(x)-s''(x))^2 dx \\
&= \int_a^b (f''(x))^2 dx - 2\int_a^b f''(x)s''(x)dx + \int_a^b (s''(x))^2 dx \\
&= \|f\|^2 - 2\int_a^b f''(x)s''(x)dx + 2\int_a^b (s''(x))^2 dx \\
&\qquad - \int_a^b (s''(x))^2 dx \\
&= \|f\|^2 - \|s\|^2 - 2\int_a^b s''(x)(f''(x)-s''(x))dx.
\end{aligned}
$$

Demostració (de la proposició – cont.)

Ara desenvolupem el terme $\int_a^b s''(x)(f''(x) - s''(x))dx$.
El volem integrar per parts prenent $u = s''$ i $v' = f'' - s''$ ($u' = s'''$ i $v = f' - s'$), però això té problemes formals ja que s''' pot no estar definida als nodes d'interpolació x_i. De tota manera, com que s és un spline cúbic, $s'''(x_i^-)$ i $s'''(x_i^+)$ si que estan ben definits. Per tant, descomponem la integral en suma d'integrals sobre els intervals de la forma $[x_i, x_{i+1}]$, on s''' està ben definida i integrem per parts. Tenim

$$\int_a^b s''(x)(f''(x) - s''(x))dx$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} s''(x)(f''(x) - s''(x))dx$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (f' - s')s''\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} s'''(x)(f'(x) - s'(x))dx.$$

Demostració (de la proposició – cont.)

El primer terme de la desigualtat anterior és una suma telescòpica:

$$\sum_{i=1}^{n}(f'-s')s''\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = (f'-s')s''\Big|_{x_0}^{x_n}.$$

Per altra banda, donat que s es un spline cúbic, $s'''\big|_{(x_{i-1},x_i)}$ és constant per tot i. Per tant, podem integrar trivialment:

$$\int_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} s'''(x)(f'(x)-s'(x))dx = s'''(x)(f(x)-s(x))\Big|_{x_{i-1}^+}^{x_i^-}.$$

Llavors, ajuntant tot el que hem dit,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b s''(x)(f''(x)-s''(x))dx \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{n}(f'-s')s''\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} s'''(x)(f'(x)-s'(x))dx \\
&\qquad = (f'-s')s''\Big|_{x_0}^{x_n} - \sum_{i=1}^{n} s'''(x)(f(x)-s(x))\Big|_{x_{i-1}^+}^{x_i^-}.
\end{aligned}$$

Això acaba la demostració de la proposició. $\square$


"...AND, IN CONCLUSION, I DON'T KNOW WHAT I'M TALKING ABOUT..." HEY! WHICH ONE OF YOU GUYS INTERPOLATED MY SPEECH!!
CAMPAIGN HQ'S.
interpolate
(in-tûr′po-lāt) VERB
TO ALTER OR CORRUPT, AS A TEXT, BY INSERTING NEW OR FOREIGN MATTER.

